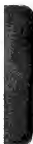



FIRENZE





TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

(SECTIONS CONIQUES)

CONTENANT

UN EXPOSÉ DES MÉTHODES LES PLUS IMPORTANTES DE LA GÉOMÉTRIE ET DE L'ALGÈBRE MODERNES,

PAR G. SALMON,

PROFESSEUR AU COLLÈGE DE LA TRINITÉ, A DUBLIN.

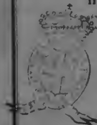
OUVRAGE TRADUIT DE L'ANGLAIS

SUR LA CINQUIÈME ÉDITION

PAR

H. RESAL,
INGÉNIEUR DES MINES,
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DE BESANÇON

V. VAUCHERET,
CAPITAINE D'ARTILLERIE,
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1870

TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
Rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

(SECTIONS CONIQUES)

CONTENANT

UN EXPOSÉ DES MÉTHODES LES PLUS IMPORTANTES DE LA GÉOMÉTRIE
ET DE L'ALGÈBRE MODERNES,

PAR G. SALMON,

PROFESSEUR AU COLLÉGE DE LA TRINITÉ, A DUBLIN.

OUVRAGE TRADUIT DE L'ANGLAIS

SUR LA CINQUIÈME ÉDITION

PAR

H. RESAL,
INGÉNIEUR DES MINES,
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DE BESANÇON

V. VAUCHERET,
CAPITAINE D'ARTILLERIE,
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1870



AVERTISSEMENT DE L'ÉDITEUR.

L'Ouvrage dont nous publions la traduction a paru en Angleterre sous le nom de *Traité des Sections coniques*, et forme le premier volume de la série des excellents Traités de Géométrie analytique de M. G. Salmon.

Sous un titre modeste, M. Salmon, associant d'une manière plus intime qu'on ne l'avait fait jusqu'ici l'Analyse et la Géométrie, donne les éléments nécessaires pour aborder la *théorie générale des courbes*, et fait une exposition à peu près complète des divers systèmes de coordonnées : *cartésiennes*, *trilinéaires* et *tangentielles*. La traduction a été faite avec un soin consciencieux et une connaissance approfondie du sujet, mais sans interprétations ni mutilations, comme il convient pour une œuvre correcte et remarquable en elle-même.

Un coup d'œil jeté sur la Table des matières permet de constater la richesse des matériaux que renferme ce livre et la méthode magistrale qui sert à leur mise en œuvre. Nous nous bornerons à citer ici la *théorie des notations abrégées* et ses nombreuses applications, l'exposé analytique et géométrique du *principe de dualité*, la méthode des *polaires réciproques*, les *propriétés harmoniques et anharmoniques* des sections coniques, la mé-

thode des *projections*, la méthode des *infiniment petits*, enfin la théorie féconde des *invariants et covariants des systèmes de coniques*, qui permet à la Géométrie d'utiliser les ressources de la nouvelle Analyse.

Ce qui distingue, en outre, cet Ouvrage, c'est la sage progression avec laquelle sont exposées les théories, le choix gradué de nombreux Exercices, et l'emploi systématique de problèmes numériques pour faire saisir plus nettement les applications.

Dans l'esprit des traducteurs, l'édition française du Traité de M. Salmon est appelée à rendre un réel service à l'enseignement; aussi nous espérons que cet Ouvrage ne tardera pas à devenir classique en France, comme il l'est déjà en Angleterre.

G.-V.

TABLE DES MATIÈRES (*).

CHAPITRE PREMIER.

DU POINT.

§ I. — *Préliminaires.*

Pages.

Système de coordonnées indiqué par Descartes, pour représenter la position d'un point sur un plan 1
Règle des signes 2
Distance de deux points 3
Signe à donner à cette distance 5
Coordonnées du point qui divise cette distance dans un rapport donné.. 6

§ II. — *Transformations des coordonnées.*

Déplacer les axes parallèlement à eux-mêmes 8
Changer la direction des axes 8
La transformation des coordonnees ne change pas le degré d'une équation 12

§ III. — *Coordonnées polaires.*

Passer des coordonnées polaires aux coordonnees ordinaires et réciproquement 13

CHAPITRE II.

DE LA LIGNE DROITE.

Deux équations représentent un ou plusieurs points 16
Une seule équation represente un lieu géometrique 17
Représentation géométrique des équations 18
Équation d'une droite parallèle à l'un des axes 18

(*) L'exposé des théories les plus essentielles de la Géométrie analytique fait l'objet des Chapitres I, II, V, VI, X, XI, XII. On pourra, dans une première étude, se borner aux douze premiers Chapitres, en réservant les Chapitres et les numéros marqués d'un astérisque.

Pages.
Équation d'une droite menée par l'origine.......................... 21
Équation d'une droite quelconque.................................. 22
Signification géométrique des constantes de l'équation d'une droite. 24
Équation d'une droite en fonction des segments qu'elle détermine sur les axes.. 25
Équation d'une droite en fonction de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur cette droite et des angles que cette perpendiculaire fait avec les axes.. 26
Expressions des angles qu'une droite fait avec les axes................ 27
Angle compris entre deux droites.................................. 29
Équation de la droite qui joint deux points donnés................... 32
Condition pour que trois points soient en ligne droite................ 34
Coordonnées de l'intersection de deux droites....................... 34
Les milieux des diagonales d'un quadrilatère sont en ligne droite...... 36
Équation de la perpendiculaire à une droite (*voir* aussi p. 89)........ 36
Équations des hauteurs d'un triangle............................... 38
Équations des perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés d'un triangle.. 38
Équation d'une droite qui en rencontre une autre sous un angle donné. 39
Distance d'un point à une droite.................................. 39
Équations des bissectrices de l'angle formé par deux droites........... 42
Aire d'un triangle en fonction des coordonnées de ses sommets........ 43
Aire d'un polygone quelconque.................................... 44
Condition pour que trois droites soient concourantes (*voir* aussi p. 48). 45
Aire du triangle formé par trois droites............................ 46
Équation d'une droite passant par l'intersection de deux autres......... 46
Criterium pour reconnaître si les droites représentées par trois équations sont concourantes.. 48
Relation entre les segments déterminés sur les côtés d'un triangle :
1° Par une transversale.. 50
2° Par des droites concourantes qui passent par les sommets.......... 51
Équation polaire de la ligne droite................................ 52

CHAPITRE III.

PROBLÈMES SUR LA LIGNE DROITE.

Recherche des lieux géométriques:.................................. 54
1° Lorsque ces lieux sont des droites.............................. 55
2° Lorsque ces lieux sont représentés par des équations d'un degré supérieur au premier.. 67
Problèmes où il s'agit de démontrer qu'une droite mobile passe par un point fixe.. 70
Centre des distances proportionnelles.............................. 72
Une droite passe par un point fixe lorsque les constantes de son équation vérifient une relation linéaire.................................. 73
Recherche des lieux géométriques en coordonnées polaires............. 74

CHAPITRE IV.

APPLICATION DE LA MÉTHODE DES NOTATIONS ABRÉGÉES A L'ÉQUATION DE LA LIGNE DROITE.

Pages.
Signification du coefficient k dans l'équation $\alpha - k\beta = 0$. 79
Les bissectrices des angles d'un triangle concourent en un même point.. 80
Il en est de même des médianes, des hauteurs, etc.................... 81
Équations de deux droites également inclinées sur α et β........ 82
Division anharmonique d'une droite.............. 82
Expression algébrique du rapport anharmonique d'un faisceau....... . 83
Systèmes de droites homographiques................................ 84
Équation d'une droite en fonction de trois autres.................... 85
Démonstration des propriétés harmoniques d'un quadrilatère (*voir* aussi p. 446).................... 86
Triangles homologues. Centre et axe d'homologie..................... 88
Condition pour que deux droites soient perpendiculaires........... ... 88
Distance d'un point à une droite..... 89
Les perpendiculaires elevées sur les milieux des côtés d'un triangle sont concourantes... 89
Angles compris entre deux droites 89
Coordonnées trilinéaires.......................... 90
Équation trilinéaire de la parallèle à une droite donnée.............. 91
Équation trilineaire de la droite qui joint deux points............... . 92
Les milieux des diagonales d'un quadrilatère sont en ligne droite....... 92
Équation d'une droite située à l'infini............. 94
Comparaison des equations en coordonnées cartésiennes aux équations en coordonnées trilinéaires..... 95
Coordonnées tangentielles.. 96
Théorèmes réciproques...... 97

CHAPITRE V.

DES ÉQUATIONS D'UN DEGRÉ SUPÉRIEUR AU PREMIER REPRÉSENTANT DES LIGNES DROITES.

Interprétation d'une équation pouvant se décomposer en facteurs........ 98
L'équation homogène du $n^{ième}$ degré représente n droites 98
Des droites imaginaires.... 99
Angle compris entre deux droites définies par une seule équation. 101
Équation des bissectrices de ces droites..... 102
Condition pour qu'une équation du second degré représente deux droites (*voir* aussi p. 209, 213, 216, 369)......... 104
Nombre de conditions à remplir pour qu'une équation d'un degré quelconque représente des lignes droites.............................. 107
Nombre des termes d'une équation de degré n................. 108

CHAPITRE VI.

DU CERCLE.

	Pages.
Équation du cercle	109
Conditions pour que l'équation générale représente un cercle	109
Coordonnées du centre et rayon	110
Condition pour que deux cercles soient concentriques	111
Condition pour qu'une courbe passe par l'origine	111
Coordonnées des points d'intersection d'une droite avec un cercle	112
Points imaginaires	112
Définition générale des tangentes	113
Condition pour qu'un cercle soit tangent à l'un des axes	114
Équation de la tangente menée à un cercle par un point donné	115
Condition pour qu'une droite soit tangente à un cercle	118
Équation de la polaire d'un point par rapport à un cercle ou à une conique	119
Longueur de la tangente menée au cercle par un point	121
Une droite menée par un point est divisée harmoniquement par le point, le cercle et la polaire du point	122
Équation du couple de tangentes menées au cercle par un point donné	123
Cercle passant par trois points (*voir* aussi p. 186)	125
Condition pour que quatre points appartiennent à une circonférence; sa signification géométrique	126
Équation polaire du cercle	126

CHAPITRE VII.

THÉORÈMES ET PROBLÈMES SUR LE CERCLE.

Des lieux géométriques qui sont des cercles	128
Condition pour que le segment déterminé sur une droite par un cercle soit vu sous un angle droit d'un point donné	131
Lorsqu'un point A est sur la polaire de B, le point B appartient à la polaire de A	133
Triangles polaire et autopolaire	133
Lorsque deux cordes se coupent en un point, les droites qui joignent transversalement leurs extrémités se coupent sur la polaire de ce point	135
Les distances de deux points au centre sont proportionnelles aux distances de ces points à leurs polaires	136
Expression des coordonnées d'un point du cercle au moyen d'un angle auxiliaire	136
Problèmes relatifs aux droites qui touchent constamment un cercle	138
Emploi des coordonnées polaires pour la résolution des problèmes relatifs au cercle	139

CHAPITRE VIII.

PROPRIÉTÉS D'UN SYSTÈME DE DEUX OU D'UN PLUS GRAND NOMBRE DE CERCLES.

Pages.

Équation de l'axe radical de deux cercles 143
Lieux du point tel, que les tangentes menées par ce point à deux cercles soient dans un rapport donné 144
Centre radical de trois cercles 144
Propriétés d'un système de cercles ayant même axe radical 145
Points limites du système 146
Propriétés des cercles coupant deux cercles fixes sous un angle droit, ou sous un angle constant 147
Tangente commune à deux cercles 150
Centre de similitude 151
Axe de similitude 156
Lieu des centres des cercles coupant trois cercles donnés sous des angles égaux 157
Décrire un cercle tangent à trois cercles donnés (*voir* aussi p. 188, 407) 159
Solution de M. Casey 163
Relation entre les tangentes communes relatives à quatre cercles qui en touchent un cinquième 163
Méthode des courbes inverses 165
Quantités qui ne changent pas dans l'inversion 166

CHAPITRE IX.

APPLICATION DE LA MÉTHODE DES NOTATIONS ABRÉGÉES A L'ÉQUATION DU CERCLE.

Équation du cercle circonscrit à un quadrilatère 168
Équation du cercle circonscrit à un triangle $\alpha\beta\gamma$ 170
Signification géométrique de cette équation 171
Lieux du point tel, que l'aire du triangle formé par ses projections sur les côtés d'un triangle, soit égale à une quantité donnée 172
Équation de la tangente menée par un sommet au cercle circonscrit 172
Équation tangentielle du cercle circonscrit 173
Conditions pour que l'équation générale représente un cercle 174
Axe radical de deux cercles, en coordonnées trilinéaires 176
Équation du cercle inscrit dans un triangle 177
Équation tangentielle de ce cercle 179
Déduire l'équation du cercle inscrit, de celle du cercle circonscrit 181
Longueur de la tangente menée d'un point à un cercle, en coordonnées trilinéaires 183
Théorème de Feuerbach. Les quatre cercles qui touchent les trois côtés d'un triangle sont tangents à un même cercle (*voir* aussi p. 440, 506) 183

Pages.
Équation tangentielle d'un cercle défini par son centre et son rayon..... 185
Distance de deux points, coordonnées trilinéaires..................... 185
Do l'emploi des *déterminants* 186
Équations, dans cette notation, du cercle passant par trois points, coupant trois cercles sous un angle droit.... 186
Relation entre les distances mutuelles do quatre points sur un plan.. .. 188
Démonstration des théorèmes de M. Casey............................ 188

CHAPITRE X.

CLASSIFICATION ET PROPRIÉTÉS COMMUNES DES COURBES REPRÉSENTÉES PAR L'ÉQUATION GÉNÉRALE DU DEUXIÈME DEGRÉ.

Nombre de conditions nécessaires pour déterminer une conique......... 190
Ce que devient l'équation du deuxième degré lorsqu'on déplace les axes parallèlement à eux-mêmes.................................... .. 191
Discussion de l'équation du second degré qui détermine les points où une droite rencontre une conique.................... 191
Équation des droites qui rencontrent la conique à l'infini.............. 193
Classification des coniques : ellipse, hyperbole, parabole 194
Coordonnées du centre d'une conique...... 199
Équations des diamètres............ 200
Les diamètres de la parabole rencontrent la courbe à l'infini............ 201
Diamètres conjugués...... 203
Équation de la tangente.... 204
Équation de la polaire....... 205
Ce qu'on entend par classe d'une courbe........ 205
Propriétés harmoniques des polaires (*voir* aussi p. 414).. 206
Propriétés polaires du quadrilatère inscrit (*voir* aussi p. 449).......... 207
Équation du couple de tangentes menées par un point à une conique (*voir* aussi p. 374)........... 208
Rapport des rectangles des segments des cordes parallèles.. 209
Cas où une des droites rencontre la courbe à l'infini 211
Condition pour qu'une droite donnée soit tangente à une conique (*voir* aussi p. 368, 479)............. 212
Lieu des centres des coniques passant par quatre points (*voir* aussi p. 351, 378, 425, 449).. 213

CHAPITRE XI.

DE L'ELLIPSE ET DE L'HYPERBOLE.

§ Ier. — *Réduction de l'équation générale du deuxième degré.*

Transformation de l'équation générale en prenant le centre pour origine. 215
Condition pour qu'elle représente deux droites........................ 216
Le centre est le pôle de la droite à l'infini............................ 217

Pages.
Asymptotes de la courbe.......... 217
Équations des axes.......... 217
Fonctions des coefficients qui ne changent pas lorsqu'on transforme les axes de coordonnées.......... 219
La somme des carrés des inverses des diamètres perpendiculaires est constante.......... 222
La somme des carrés de deux diamètres conjugués est constante.......... 223
Équation polaire de l'ellipse, le centre étant pris pour pôle.......... 224
Forme de l'ellipse.......... 225
Construction géométrique des axes (*voir* aussi p. 240).......... 225
Les ordonnées de l'ellipse sont proportionnelles à celles d'un cercle concentrique.......... 226
Forme de l'hyperbole.......... 227
Hyperbole conjuguée.......... 228
Asymptotes (*voir* aussi p. 217).......... 228
Excentricité de la conique définie par l'équation générale.......... 229

§ II. — *Tangentes et diamètres conjugués.*

Équation de la tangente et de la polaire.......... 230
Angle compris entre deux tangentes.......... 232
Lieu de l'intersection des tangentes qui se coupent sous un angle donné.. 232
Diamètres conjugués : leurs propriétés (*voir* aussi p. 222).......... 232
Propriétés de l'hyperbole équilatère.......... 234
Distance du centre à la tangente.......... 235
Angle compris entre deux diamètres conjugués.......... 235
Lieu du sommet des angles droits circonscrits (*voir* aussi p. 232, 375, 496). 238
Cordes supplémentaires.......... 238
Construire deux diamètres conjugués comprenant un angle donné.......... 238
Relation entre les segments déterminés sur deux tangentes fixes et parallèles, par une tangente variable (*voir* aussi p. 401, 419).......... 239
Relation entre les segments déterminés par une tangente mobile sur deux diamètres conjugués.......... 239
Étant donnés deux diamètres conjugués, construire les axes.......... 240

§ III. — *Normale.*

Propriétés de la normale.......... 241
Sous-normale et sous-tangente.......... 242
Mener une normale par un point donné (*voir* aussi p. 471).......... 243
La corde vue sous un angle droit d'un point fixe de la conique passe par un point fixe de la normale en ce point.......... 243
Coordonnées de l'intersection de deux normales, de deux tangentes.......... 244

§ IV. — *Foyers et directrices.*

Propriétés des foyers.......... 245
La somme ou la différence des rayons vecteurs issus des foyers est constante.......... 246

Pages.
Tracé mécanique de l'ellipse et de l'hyperbole.......... 247
Propriétés de la directrice.......... 248
Le produit des distances des foyers à une tangente est constant.......... 250
Les rayons vecteurs joignant les foyers au point de contact sont également inclinés sur la tangente.......... 250
Deux coniques homofocales se coupent à angle droit.......... 251
Les deux tangentes menées à une conique par un point P d'une conique homofocale font des angles égaux avec la tangente en P.......... 252
Lieu des projections des foyers sur une tangente.......... 253
L'angle sous lequel une corde est vue du foyer a pour bissectrice la droite menée par le foyer au pôle de la corde (*voir* aussi p. 352, 397).......... 254
La droite joignant un foyer au pôle d'une corde focale est perpendiculaire à cette corde.......... 254
Équation polaire de l'ellipse et de l'hyperbole, le foyer étant pris pour pôle.......... 256
La moyenne harmonique des segments d'une corde focale est constante.. 257
Origine des noms : ellipse, hyperbole, parabole.......... 258

§ V. — *Asymptotes.*

Détermination des asymptotes.......... 259
Les segments déterminés sur une corde par la courbe et les asymptotes sont égaux.......... 260
Équation de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes.......... 262
L'aire du triangle formé par les asymptotes et une tangente est constante 262
Les droites qui joignent deux points fixes de l'hyperbole à un point quelconque de la courbe déterminent sur l'asymptote un segment constant. 263
Tracé mécanique de l'hyperbole.......... 265

CHAPITRE XII.

DE LA PARABOLE.

§ Ier. — *Réduction de l'équation générale.*

Réduction de l'équation générale à la forme $y^2 = px$.......... 266
Expression du paramètre de la parabole définie par l'équation générale.. 269
Paramètre de la parabole en fonction de deux tangentes et de l'angle qu'elles comprennent (*voir* aussi p. 296).......... 270
La parabole est la limite vers laquelle tend une ellipse dont un foyer s'éloigne à l'infini.......... 273

§ II. — *Tangente et normale.*

Équation de la tangente.......... 274
La sous-tangente est double de l'abscisse.......... 274
Le segment déterminé sur l'axe par les polaires de deux points est égal à la projection de la distance de ces points.......... 275

Pages
Équation de la normale.. 275
La sous-normale est constante.................................. 276

§ III. — *Diamètres.*

Équation de la parabole rapportée à un diamètre. 276

§ IV. — *Foyer et directrices.*

La tangente fait des angles égaux avec l'axe et le rayon vecteur......... 278
Lieu des projections du foyer sur les tangentes.......................... 280
Lieu du sommet des angles droits circonscrits à la parabole (*voir* aussi p. 398, 496)... 281
L'angle compris entre deux tangentes est la moitié de l'angle sous lequel est vue du foyer leur corde de contact.............................. 281
Le cercle circonscrit au triangle formé par trois tangentes à une parabole passe par le foyer (*voir* aussi p. 296, 384, 399, 450) 283
Équation polaire de la parabole... 283

CHAPITRE XIII.

THÉORÈMES ET PROBLÈMES SUR LES SECTIONS CONIQUES.

§ I. — *Problèmes divers.*

Lieux géométriques divers.. 283
Propriétés focales... 287
Lieu du pôle d'une droite fixe par rapport à une série de coniques homofocales.. 288
Lorsque dans une conique on mène une corde par un point fixe O, le produit tang ½ PFO. tang ½ P'FO est constant (*voir* aussi p. 467).......... 289
Lieu de l'intersection des normales menées aux extrémités d'une corde focale.. 291
Angle compris entre deux tangentes à l'ellipse........................ 291
La différence des inverses des segments déterminés par la courbe sur une sécante est constante, lorsque la sécante passe par le foyer....... 292
Problèmes sur la parabole. — Les hauteurs du triangle formé par trois tangentes se coupent sur la directrice (*voir* aussi p. 341, 385, 406, 482). 293
Aire du triangle circonscrit.. 293
Rayon du cercle circonscrit au triangle inscrit ou circonscrit........... 293
Lieu de l'intersection des tangentes se coupant sous un angle donné (*voir* aussi p. 355, 399).. 295
Lieu des projections du foyer sur les normales.......................... 295
Coordonnées de l'intersection de deux normales........................ 295
Lieu de l'intersection des normales menées aux extrémités des cordes qui passent par un point fixe (*voir* aussi p. 471)....................... 296
L'hyperbole équilatère circonscrite à un triangle passe par le point de concours des hauteurs de ce triangle (*voir* aussi p. 406, 481)............ 297
Le cercle circonscrit à un triangle autopolaire par rapport à une hyper-

Pages.

bole équilatère passe par le centre de l'hyperbole (*voir* aussi p. 453).. 298

Lieu de l'intersection des tangentes déterminant un segment donné sur une droite fixe........ 298

Lieu des centres des coniques inscrites dans un quadrilatère (*voir* aussi p. 352, 372, 478).. 299

Lieu des centres des coniques tangentes à trois droites et dont les axes a et b sont liés par la relation $a^2+b^2=k^2$........ 300

Lieu des foyers des coniques circonscrites à un quadrilatère........... 301

§ II. — *De l'angle excentrique.*

Angle excentrique dans le cas de l'ellipse...... 302

Construction du diamètre conjugué d'un diamètre donné.............. 304

Équation d'une corde, d'une tangente 305

Rayon du cercle circonscrit à un triangle inscrit. .. 305

Aire du triangle formé par trois tangentes, trois normales...... 306

Angle excentrique dans le cas de l'hyperbole........ 308

§ III. — *De la similitude dans les sections coniques.*

Conditions pour que deux coniques soient semblables et semblablement placées.......... 310

Propriétés des coniques homothétiques...... 311

Condition pour que deux coniques soient semblables.... 313

§ IV. — *Du contact des sections coniques.*

Des ordres de contact.. 314

Des coniques ayant un double contact.......... 315

Définition du cercle osculateur....... 316

Expression et construction du rayon de courbure (*voir* aussi p. 325, 334, 523)........ 317

Lorsqu'un cercle rencontre une conique, les cordes d'intersection font des angles égaux avec l'axe (*voir* aussi p. 325)... 318

Condition pour que quatre points d'une conique soient situés sur une circonférence........ 319

Relation entre les trois points de la conique dont les cercles osculateurs passent par un même point.. 319

Coordonnées du centre de courbure. 321

Développées des coniques (*voir* aussi p. 476)........ 322

CHAPITRE XIV.

APPLICATION DE LA MÉTHODE DES NOTATIONS ABRÉGÉES AUX SECTIONS CONIQUES.

§ I. — *Propriétés générales.*

Signification de l'équation $S=kS'$........ 323

Il y a trois valeurs de k pour lesquelles cette équation représente deux droites........ 324

Pages
Équation d'une conique passant par cinq points donnés... 324
Équation du cercle osculateur.. 325
Équation des coniques ayant un double contact... 326
La parabole a une tangente située à l'infini (*voir* aussi p. 463)... 327
Deux coniques homothétiques ont deux points communs à l'infini... 328
Deux coniques homothétiques et concentriques se touchent à l'infini... 330
Tous les cercles passent par les deux mêmes points imaginaires situés à l'infini (*voir* aussi p. 454)... 330
Forme de l'équation d'une conique rapportée à un triangle autopolaire (*voir* aussi p. 350)... 331
Relation entre les distances d'un point d'une conique aux côtés d'un quadrilatère inscrit... 331
Propriété anharmonique des points d'une conique (*voir* aussi p. 348, 403, 446)... 332
Extension de la propriété fondamentale du foyer et de la directrice... 333
Résultat de la substitution des coordonnées d'un point dans l'équation de la conique... 333
Diamètre du cercle circonscrit au triangle formé par deux tangentes et leur corde de contact... 334
Propriété harmonique des cordes d'intersection de deux coniques ayant un double contact avec une troisième... 335
Les diagonales d'un quadrilatère inscrit et du quadrilatère circonscrit correspondant passent par un même point... 335
Lorsque trois coniques ont un double contact avec une quatrième, leurs cordes d'intersection passent trois par trois par le même point... 336
Théorème de Brianchon (*voir* aussi p. 391, 444)... 337
Lorsque trois coniques ont une corde commune, leurs trois cordes non communes se coupent en un même point... 338
Théorème de Pascal (*voir* aussi p. 391, 424, 444, 448)... 339
Théorème de Steiner sur l'hexagone de Pascal (*voir* aussi p. 530)... 340
Les cercles circonscrits aux triangles formés par quatre points passent par un même point... 341
Étant données cinq droites, les foyers des cinq paraboles tangentes à quatre d'entre elles appartiennent à un cercle... 341
Étant données cinq tangentes d'une conique, trouver leurs points de contact... 341
Génération des coniques d'après la méthode de Mac Laurin (*voir* aussi p. 419)... 342
Étant donnés cinq points d'une conique, la construire, trouver son centre et mener la tangente en un quelconque de ses points... 342

§ II. — *Des équations rapportées à deux tangentes et à leur corde de contact.*

Emploi d'une seule variable μ pour représenter un point de la conique. 343
Équation de la tangente, de la polaire, d'un point μ... 344
Points correspondants... 344
Les cordes correspondantes de deux coniques se coupent sur une de leurs cordes d'intersection (*voir* aussi p. 336, 339)... 345
Lieu du sommet d'un triangle circonscrit à une conique et dont deux

Pages.
sommets glissent sur des droites fixes (*voir* aussi p. 448, 492) 345
Inscrire dans une conique un triangle dont les côtés passent par trois points donnés (*voir* aussi p. 381, 393, 422) 346
Généralisation de la méthode de Mac Laurin pour la génération des coniques (*voir* aussi p. 420) 347
Propriété anharmonique des points d'une conique, de ses tangentes (*voir* aussi p. 332, 403, 446) 348
Le rapport anharmonique de quatre points est égal à celui de leurs correspondants 349
Enveloppe de la corde joignant deux points correspondants de deux systèmes homographiques pris sur une conique (*voir* aussi p. 425) 349

§ III. — *Des équations rapportées aux côtés d'un triangle autopolaire.*

Emploi d'une seule variable 350
Équation de la tangente, de la polaire 351
Lieu du pôle d'une droite donnée par rapport aux coniques passant par quatre points fixes (*voir* aussi p. 213, 372, 378, 425) 351
Même lieu par rapport aux coniques tangentes à quatre droites fixes (*voir* aussi p. 372, 387, 393, 451, 478) 351
Propriétés des foyers 352
Les coniques qui ont un foyer commun ont deux tangentes imaginaires communes (*voir* aussi p. 449, 497) 352
Méthode pour déterminer les coordonnées des foyers 353
Lieu de l'intersection des tangentes à la parabole se coupant sous un angle donné (*voir* aussi p. 295, 398) 355
Deux coniques ont toujours un triangle autopolaire commun (*voir* aussi p. 490, 509) 355
Dans quel cas il est réel, imaginaire 356
Lieu du troisième sommet d'un triangle circonscrit à une conique, et dont deux sommets glissent sur une conique (*voir* aussi p. 492) 356

§ IV. — *Des courbes enveloppes.*

Marche à suivre pour trouver les enveloppes 357
Problèmes sur la recherche des enveloppes 359
Déduire l'équation trilinéaire d'une conique de son équation tangentielle. 361
Problème inverse 362
Critérium pour reconnaître si un point est en dedans ou en dehors d'une conique 363
Discriminant de l'équation tangentielle 363
Lorsqu'une conique passant par deux points fixes a un double contact avec une conique, sa corde de contact passe par un point fixe 364
Équation d'une conique ayant un double contact avec deux coniques données 364
Équation d'une conique tangente à quatre droites 365
Lieu du point tel, que la somme ou la différence des tangentes menées par ce point à deux cercles soit constante 365
Problème de Malfatti 366

§ V. — *Équation générale du second degré.*

Pages.
Tangente et polaire en coordonnées trilinéaires........................ 367
Discriminant (*voir* aussi p. 104, 209, 213, 216)...................... 369
Coordonnées du pôle d'une droite donnée.............................. 370
Conditions pour que deux droites soient conjuguées................... 371
Condition pour qu'une droite touche la conique (*voir* aussi p. 212, 479) 372
Méthode de M. Hearn pour trouver le lieu du centre d'une conique assujettie à quatre conditions.. 372
Équation du couple des tangentes menées par un point donné (*voir* aussi p. 208).. 374
Relation entre les angles d'un hexagone circonscrit (*voir* aussi p. 404).... 376
Moyen de reconnaître lorsque trois couples de droites touchent la même conique.. 376
Équations des droites qui joignent un point donné aux intersections de deux courbes.. 377
Les cordes qui, dans une conique, sont vues sous un angle droit d'un point de la courbe passent par un point fixe............................ 377
Lieu décrit par ce point lorsque le premier se déplace sur la courbe.... 377
Enveloppe des cordes d'une conique qui sont vues sous un angle constant d'un point quelconque, ou sous un angle droit d'un point de la conique. 378
Les polaires d'un point prises par rapport aux coniques circonscrites à un même quadrilatère, passent par un point fixe.................... 378
Lieu de l'intersection des lignes correspondantes de deux faisceaux homographiques.. 378
Enveloppe de la polaire d'un point par rapport à une conique ayant un double contact avec deux coniques données.......................... 379
Le rapport anharmonique de quatre points est égal à celui de leurs polaires.. 379
Équation des asymptotes à la conique définie par l'équation générale (*voir* aussi p. 479)... 380
Enveloppe de l'asymptote d'une conique circonscrite à un triangle lorsque l'autre asymptote passe par un point fixe....................... 380
Inscrire dans une conique un triangle dont les côtés passent par trois points fixes (*voir* aussi p. 346, 393, 422)........................ 381
Équation d'une conique tangente à cinq droites........................ 383
Lieu du foyer d'une parabole inscrite dans un triangle (*voir* aussi p. 296, 399, 450)... 384
La directrice de cette parabole passe par l'intersection des hauteurs du triangle (*voir* aussi p. 293, 341, 406, 482).......................... 385
Lieu des foyers des coniques inscrites dans un quadrilatère (*voir* aussi p. 388).. 385

CHAPITRE XV.

DU PRINCIPE DE DUALITÉ ET DE LA MÉTHODE DES POLAIRES RÉCIPROQUES.

Principe de dualité.. 386
Lieu du centre des coniques inscrites dans un quadrilatère............ 387

Pages.
Lieu des foyers des coniques inscrites dans un quadrilatère... 388
Les cercles directeurs des coniques inscrites dans un quadrilatère ont même axe radical..... 388
Définition des polaires réciproques 389
Degré de la polaire réciproque 391
Les théorèmes de Pascal et de Brianchon sont réciproques............. 391
Axes de similitude et centres radicaux des coniques ayant un double contact avec une conique donnée.................. 393
Polaire réciproque d'un cercle par rapport à un autre cercle........... 396
Transformation par la méthode réciproque des théorèmes relatifs aux angles qui ont leur sommet au foyer.............................. 397
Enveloppes des asymptotes d'une série d'hyperboles ayant une directrice et un foyer communs.................... 398
Les réciproques des cercles égaux ont même paramètre............... 400
Relation entre les distances d'une tangente aux sommets d'un quadrilatère circonscrit.......... 400
Équation tangentielle de la conique réciproque........................ 402
Équation trilinéaire de la conique définie par un foyer et trois points, ou trois tangentes 402
Transformation, par la méthode réciproque, des propriétés anharmoniques. 403
Théorème de Carnot sur l'intersection d'une conique et d'un triangle (*voir* aussi p. 447)...... 404
Dans quel cas la réciproque est-elle une ellipse, une hyperbole, ou une parabole? 405
Dans quel cas, une hyperbole équilatère?.......................... 406
Détermination des axes de la conique réciproque... 406
Propriétés des coniques homofocales considérées comme réciproques.... 406
Décrire un cercle tangent à trois cercles donnés.......... 407
Équation de la courbe réciproque. 407
Déduire l'équation de la réciproque par rapport à une origine, de celle de la réciproque relative à une autre origine...... 408
Des réciproques par rapport à une parabole.......... 410

CHAPITRE XVI.

PROPRIÉTÉS HARMONIQUES ET ANHARMONIQUES DES SECTIONS CONIQUES.

Expression du rapport anharmonique lorsqu'un point est à l'infini.... . 412
Le centre est le pôle de la droite à l'infini. 413
Les asymptotes forment avec deux diamètres conjugués quelconques un faisceau harmonique. 414
Division déterminée sur la parallèle à une asymptote, par les droites qui joignent deux points fixes de la courbe à un point variable.......... 416
Division déterminée sur un diamètre par les parallèles menées aux asymptotes par un point de la courbe.................................. 417
Propriété anharmonique des tangentes à une parabole 418

Pages.
Segments déterminés sur deux tangentes fixes et parallèles par une tangente variable.. ... 419
Démonstration, par la propriété anharmonique, des modes de génération des coniques, de Mac Laurin et de Newton ... 419
Extension donnée par M. Chasles à ces théorèmes ... 420
Inscrire dans une conique un polygone dont les côtés passent par des points fixes ... 422
Décrire une conique ayant un double contact avec une conique donnée, et tangente à trois droites données (*voir* aussi p. 506) ... 424
Démonstration anharmonique du théorème de Pascal ... 424
Lieu du centre d'une conique circonscrite à un quadrilatère ... 425
Enveloppe de la droite qui joint les points correspondants de deux divisions homographiques ... 425
Critérium pour reconnaître lorsque deux systèmes de points sont homographiques ... 427
Condition pour que deux couples de points soient conjugués harmoniques. 428
Lieu d'un point tel, que les tangentes menées de ce point à deux coniques données forment un faisceau harmonique (*voir* aussi p. 486) ... 429
Condition pour qu'une droite soit divisée harmoniquement par deux coniques ... 431
Involution ... 431
Propriétés du centre ... 433
Propriétés des foyers ... 434
Deux couples de points déterminent un système en involution ... 435
Condition pour que six points ou six droites forment un système en involution ... 435
Les coniques passant par quatre points fixes déterminent sur une transversale un système de points en involution ... 437
Les couples de tangentes menées par un point fixe aux coniques inscrites dans un quadrilatère forment un faisceau en involution ... 438
Démonstration, par la théorie de l'involution, du théorème de Feuerbach relatif au cercle mené par les milieux des côtés d'un triangle ... 440

CHAPITRE XVII.

MÉTHODE DES PROJECTIONS.

§ Ier. — *Projections coniques.*

Définitions ... 442
Tous les points à l'infini peuvent être considérés comme appartenant à une même droite ... 444
Propriétés projectives ... 444
Propriétés d'un quadrilatère ... 446
Deux coniques peuvent être projetées suivant deux cercles ... 447
Démonstration du théorème de Carnot, par projection (*voir* aussi p. 404). 447
Démonstration, par projection, du théorème de Pascal ... 448

Pages.
Transformation des propriétés relatives aux foyers.................... 449
Les six sommets de deux triangles circonscrits sont situés sur une même conique.. 450
Transformation, par projection, des propriétés des angles droits........ 451
Lieu du pôle d'une droite fixe par rapport à une série de coniques homofocales.. 452
Les six sommets de deux triangles autopolaires sont situés sur une même conique (*voir* aussi p. 481).. 453
La corde d'une conique passe par un point fixe, lorsque l'angle sous lequel elle est vue d'un point de la courbe a pour bissectrice une droite fixe. 454
Transformation des théorèmes sur les angles en général................ 454
Lieu du point divisant dans un rapport donné le segment déterminé sur une tangente variable par deux tangentes fixes.......................... 456
Fondement analytique de la méthode des projections................... 456

§ II. — *Des sections planes du cône.*

Les sections faites dans un cône par des plans parallèles sont semblables. 459
La section d'un cône à base circulaire est une ellipse, une hyperbole, ou une parabole.. 460
Origine de ces dénominations.. 462
La parabole a une tangente à l'infini................................... 463
On peut toujours projeter une conique suivant un cercle, de telle sorte qu'une droite de son plan se projette à l'infini.......................... 465
Détermination des foyers d'une section conique......................... 466
Lieu du sommet des cônes droits sur lesquels on peut placer une conique donnée.. 467
Méthode pour déduire les propriétés des courbes planes de celles des courbes sphériques.. 467

§ III. — *Projections orthogonales*

Définitions et propriétés... 467
Rayon du cercle circonscrit au triangle inscrit dans une conique........ 469

CHAPITRE XVIII.

INVARIANTS ET COVARIANTS DES SYSTÈMES DE CONIQUES.

Équation des cordes d'intersection de deux coniques.................... 471
Lieu de l'intersection des normales menées à une conique par les extrémités d'une corde passant par un point fixe............................ 471
Définition des invariants... 472
Condition pour que deux coniques se touchent............................ 474
Critérium pour reconnaître lorsque deux coniques se coupent en deux points réels et deux points imaginaires, ou ne se coupent pas............. 474
Équation de la courbe parallèle à une conique........................... 475

Pages.
Équation de la développée d'une conique 476
Signification des invariants lorsqu'une conique se réduit à deux droites. 476
Critérium pour reconnaître lorsque six droites sont tangentes à une même conique 478
Équation du couple de tangentes correspondant à une corde de contact.. 478
Équation des asymptotes d'une conique définie par l'équation générale en coordonnées trilinéaires 479
Condition pour qu'un triangle autopolaire par rapport à une conique puisse être inscrit dans une autre conique, ou lui être circonscrit 479
Les six sommets de deux triangles autopolaires appartiennent à une même conique 481
Le cercle circonscrit à un triangle autopolaire coupe à angle droit le cercle directeur 481
Le centre du cercle inscrit dans un triangle autopolaire par rapport à une hyperbole équilatère se trouve sur la courbe 481
Lieu de l'intersection des hauteurs d'un triangle inscrit dans une conique et circonscrit à une autre 482
Condition pour qu'un pareil triangle soit possible 482
Équation tangentielle des quatre points d'intersection de deux coniques.. 484
Équation des quatre tangentes communes à deux coniques 485
Les huit points de contact appartiennent à une même conique 486
Définition des covariants et des contrevariants 487
Discriminant du covariant F; dans quel cas il s'évanouit 490
Trouver les équations des côtés du triangle autopolaire commun à deux coniques (*voir* aussi p. 509) 490
Enveloppe du troisième côté d'un triangle inscrit dans une conique et dont deux côtés touchent une autre conique 492
Lieu du sommet libre d'un polygone dont tous les côtés touchent une conique, et dont tous les sommets moins un glissent sur une autre conique 494
Condition pour que les droites qui joignent aux sommets opposés les points où une conique rencontre les côtés d'un triangle, forment deux faisceaux de droites concourantes 494
Équation générale, en coordonnées tangentielles, des points à l'infini du cercle 495
Condition pour qu'une conique soit une hyperbole équilatère, une parabole 495
Toute droite menée par un des points à l'infini du cercle est à elle-même sa perpendiculaire 495
Équation générale du cercle directeur 496
Équation de la directrice de la parabole définie par l'équation générale en coordonnées trilinéaires 497
Coordonnées des foyers de la conique représentée par l'équation générale. 497
Extension de la relation qui existe entre deux perpendiculaires 500
Équation du système réciproque de deux coniques ayant un double contact 501
Condition pour que deux coniques ayant un double contact avec une conique fixe soient tangentes 502

Pages
Mener une conique ayant un double contact avec S, et tangente à trois coniques qui ont un double contact avec S........ 503
Les quatre coniques qu'on peut mener par trois points fixes, ou tangentiellement à trois droites, de telle sorte qu'elles aient un double contact avec une conique donnée, sont tangentes aux mêmes coniques 506
Condition pour que trois coniques aient un double contact avec une même conique........ 506
Jacobien d'un système de trois coniques........ 507
Points correspondants du Jacobien........ 507
La droite qui joint deux points correspondants est divisée en involution par les trois coniques........ 507
Équation générale du Jacobien........ 508
Faire passer par quatre points une conique tangente à une conique donnée. 508
Former les équations des côtés du triangle autopolaire commun à deux coniques........ 509
Jacobien de trois coniques ayant deux points communs........ 509
Équation du cercle en coupant orthogonalement trois autres........ 509
Jacobien de trois coniques lorsque l'une d'elles se réduit à deux droites qui coincident........ 509
Condition pour qu'une droite soit divisée en involution par trois coniques. 509
Invariants d'un système de trois coniques........ 510
Condition pour que trois coniques passent par un même point........ 511
Condition pour que $LU + mV + nW$ soit un carré parfait........ 512
On peut déduire trois coniques d'une seule cubique........ 512
Formation de l'équation de la cubique........ 512

CHAPITRE XIX.

MÉTHODE DES INFINIMENT PETITS.

Tracé des tangentes aux sections coniques........ 516
Aires des sections coniques........ 518
La tangente à une conique détermine dans une conique homothétique et concentrique une aire constante........ 521
Division déterminée par son enveloppe : 1° sur la droite qui intercepte un arc constant sur une courbe; 2° sur la droite de longueur constante dont les extrémités glissent sur une courbe........ 522
Détermination des rayons de courbure........ 523
Si par un point d'une ellipse on mène deux tangentes à une ellipse homofocale, l'excès de la somme de ces tangentes sur l'arc qu'elles interceptent est constant........ 526
Si l'on mène deux tangentes à une ellipse par un point d'une hyperbole homofocale, la différence des arcs est égale à la différence des tangentes. 527
Théorème de Fagnani........ 528
Lieu du sommet libre d'un polygone circonscrit à une conique et dont tous les sommets moins un glissent sur des coniques homofocales........ 528

NOTES.

Pages
Sur le théorème de Pascal... 530
Des systèmes de coordonnées tangentielles.............................. 535
Sur la forme donnée par M. Casey à l'équation d'une conique ayant un double contact avec une conique fixe, et tangente à trois autres coniques.. 540
Sur le tracé d'une conique définie par cinq conditions.................... 542
Sur les systèmes de coniques assujetties à quatre conditions............ 545

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

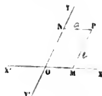
DU POINT.

§ I. — Préliminaires.

1. La méthode que nous allons exposer, pour déterminer la position d'un point sur un plan, est due à *Descartes*, qui l'a indiquée dans sa *Géométrie* en 1637 : elle a été généralement suivie par les géomètres qui lui ont succédé.

Par le point P (*fig.* 1), menons PM et PN parallèlement aux

Fig. 1.



droites fixes XX', YY' qui se coupent en O et sont données de position : il est évident que, connaissant la position du point P, nous pourrons en déduire les longueurs des parallèles PM et PN; et que réciproquement, connaissant ces longueurs, nous pourrons déterminer la position du point P.

Si, par exemple, on a $PN = a$, $PM = b$, il suffira de prendre $OM = a$, $ON = b$, et les droites MP et NP menées parallèlement à YY', XX' se couperont au point cherché P.

On représente habituellement par la lettre y la parallèle PM à OY, et par la lettre x la parallèle PN à OX. On dit alors que le point P est déterminé par les deux équations $x=a$, $y=b$.

2. Les parallèles PM et PN s'appellent les *coordonnées* du point P; PM est l'*ordonnée* de ce point, et PN, qui est égale au segment OM de OX déterminé par l'ordonnée, se nomme l'*abscisse*.

Les droites fixes XX' et YY' sont les *axes de coordonnées*, et le point O, où elles se coupent, est l'*origine*. Les axes sont dits *rectangulaires* ou *obliques* suivant que l'angle qu'ils comprennent est droit ou non.

Il est facile de voir que les coordonnées du point M (*fig.* 1) sont $x=a$, $y=o$; celles du point N, $x=o$, $y=b$; et celles de l'origine $x=o$, $y=o$.

3. Pour que les équations $x=a$, $y=b$ ne représentent qu'*un seul point*, il faut tenir compte, non-seulement de la *grandeur*, mais encore du *signe* des coordonnées.

Fig. 2.



Car en prenant (*fig.* 2) $OM=a$, et $ON=b$, d'un côté ou de l'autre de l'origine, on obtient quatre points P, P_1, P_2, P_3 dont les coordonnées satisfont aux équations $x=a$, $y=b$. Mais nous pouvons établir une distinction algébrique entre les lignes OM et OM' (qui sont de longueur égale et de direction opposée), en admettant, comme règle, que si des longueurs mesurées dans une direction sont regardées comme positives, les lignes mesurées dans une direction opposée seront considérées comme négatives. Le sens positif est en soi arbitraire, mais il est d'usage de regarder la longueur OM (mesurée en

allant de gauche à droite) et la longueur ON (mesurée de bas en haut) comme positives.

En partant de ces conventions, on distinguera facilement les quatre points P, P_1, P_2, P_3. Les coordonnées de ces points seront respectivement

$$x = +a,\quad y = +b;\quad x = -a,\quad y = +b;$$
$$x = +a,\quad y = -b;\quad x = -a,\quad y = -b.$$

Ces distinctions de signe ne sauraient présenter aucune difficulté au lecteur familiarisé avec les principes de la trigonométrie.

Remarque. — On désigne souvent, pour abréger, par point $(a,\ b)$, point $(x',\ y')$ les points qui ont pour coordonnées $x = a, y = b$ ou $x = x', y = y'$.

Il résulte de ce que nous avons dit plus haut, que les points $(+a,\ +b)$ et $(-a,\ -b)$ se trouvent sur une même droite passant par l'origine, sont également distants de l'origine et sont situés dans des régions opposées par rapport à cette origine.

4. *Trouver l'expression de la distance δ des deux points $(x',\ y')$, $(x'',\ y'')$, les coordonnées étant rectangulaires.*

Fig. 3.



On a évidemment pour la distance PQ (*fig.* 3) des deux points P et Q dont les ordonnées sont PM et QM', QS étant parallèle à OX,

$$\overline{PQ}^2 = \overline{PS}^2 + \overline{QS}^2;$$

d'ailleurs

$$PS = PM - QM' = y' - y'',$$
$$QS = OM - OM' = x' - x'';$$

par suite

$$\delta^2 = \overline{PQ}^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2.$$

Pour trouver la distance d'un point (x', y') à l'origine, on n'a qu'à faire $x''=0$, $y''=0$ dans l'équation précédente, et on trouve ainsi

$$\delta^2 = x'^2 + y'^2.$$

5. Nous aurons rarement occasion dans la suite de nous servir des coordonnées obliques, parce que les formules sont en général beaucoup plus simples avec les coordonnées rectangulaires : néanmoins, comme il y a quelquefois avantage à employer les coordonnées obliques, nous donnerons les formules principales dans leur forme la plus complète.

Si nous supposons que l'angle YOX soit quelconque (*fig.* 3) et égal à ω, nous aurons

$$\widehat{PSQ} = 180° - \omega,$$

et

$$\overline{PQ}^2 = \overline{PS}^2 + \overline{SQ}^2 - 2 PS.SQ \cos \widehat{PSQ},$$

ou

$$\overline{PQ}^2 = (y'-y'')^2 + (x'-x'')^2 + 2(y'-y'')(x'-x'')\cos\omega.$$

La distance d'un point (x', y') à l'origine s'obtient en faisant $x''=0$, $y''=0$ dans l'équation précédente; ce qui donne

$$\delta^2 = x'^2 + y'^2 + 2x'y'\cos\omega.$$

En appliquant ces formules, il faut faire attention aux signes des coordonnées. Ainsi, par exemple, si le point Q se trouvait dans l'angle XOY', le signe de y'' serait changé, et la ligne PS serait la *somme* et non la *différence* de y' et y''. Du reste, le lecteur n'éprouvera aucune difficulté en écrivant les coordonnées avec leurs signes, et en ayant soin de prendre pour PS et QS la différence *algébrique* des coordonnées correspondantes.

EXERCICES.

I. Trouver les longueurs des côtés du triangle dont les sommets ont pour coordonnées $x'=2$, $y'=3$; $x''=4$, $y''=-5$; $x'''=-3$, $y'''=-6$ (axes rectangulaires).

Réponse. $\sqrt{68}$, $\sqrt{50}$, $\sqrt{106}$.

II. Mêmes données, les axes faisant un angle de 60 degrés.

RÉPONSE. $\sqrt{52}$, $\sqrt{57}$, $\sqrt{151}$.

III. Exprimer que la distance du point (x, y) au point $(2, 3)$ est égale à 4.

RÉPONSE. $(x-2)^2+(y-3)^2=16$.

IV. Exprimer que le point (x, y) est également distant des points $(2, 3)$, $(4, 5)$.

RÉPONSE.

$$(x-2)^2+(y-3)^2=(x-4)^2+(y-5)^2 \quad \text{ou} \quad x+y=7.$$

V. Trouver le point qui est à égale distance des points $(2, 3)$, $(4, 5)$, $(6, 1)$. On pose deux équations qui servent à déterminer les inconnues x et y.

RÉPONSE. $x=\frac{13}{3}$, $y=\frac{8}{3}$;

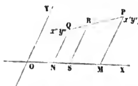
la distance de ce point à chacun des trois autres est égale à $\frac{\sqrt{50}}{3}$.

6. La distance de deux points, étant exprimée par une racine carrée, peut recevoir le double signe; de plus, si la distance PQ, mesurée dans le sens PQ, reçoit le signe +, la distance QP, mesurée dans le sens contraire QP, reçoit le signe —. Lorsqu'il s'agit simplement de la distance entre deux points, le signe n'est susceptible d'aucune interprétation, puisqu'il ne sert qu'à indiquer si cette distance doit s'ajouter à une autre distance, ou s'en retrancher; mais il n'en est pas de même lorsqu'il y a plusieurs distances à considérer. Si, par exemple, on se donne trois points en ligne droite P, Q, R, et les deux distances PQ, QR, on aura $PR = PQ + QR$; et, d'après ce qui a été dit plus haut, cette équation sera toujours vraie, que le point R soit ou non entre P et Q. Car s'il est en dehors de P et Q, PQ et QR se trouvent mesurées en sens contraire, et leur différence arithmétique est encore égale à leur somme algébrique.

Hors le cas où les droites sont parallèles à l'un des axes, on n'a établi aucune convention sur la direction qui doit être regardée comme positive.

7. *Trouver les coordonnées du point* R *qui partage dans le rapport* $m:n$ *la droite joignant les deux points* P *et* Q.

Fig. 4.



Menons les ordonnées QN, RS, PM (*fig.* 4); et soient x, y; x', y'; x'', y'', les coordonnées des points R, P et Q; nous avons

$$m : n :: \mathrm{PR} : \mathrm{RQ} :: \mathrm{MS} : \mathrm{SN},$$

ou

$$m:n::x'-x:x-x'',$$

c'est-à-dire

$$mx - mx'' = nx' - nx,$$

d'où

$$x = \frac{mx'' + nx'}{m+n}.$$

Nous trouverions de même

$$y = \frac{my'' + ny'}{m+n}.$$

Si la droite doit être coupée *extérieurement* (*) dans un rapport donné, nous aurons

$$m : n :: x - x' : x - x'',$$

et, par suite,

$$x = \frac{mx'' - nx'}{m-n}, \quad y = \frac{my'' - ny'}{m-n}.$$

On voit que les formules relatives au cas où la droite est coupée extérieurement se déduisent de celles qui sont relatives au cas où elle est coupée intérieurement en changeant

(*) Nous avons cru devoir conserver les expressions : *droite coupée intérieurement, extérieurement; section intérieure, extérieure*, en raison de leur concision.

le signe du rapport, c'est-à-dire en remplaçant $m : + n$ par $m : - n$. De fait, dans le cas où le point de partage est situé entre les deux points, PR et RQ sont mesurées dans la même direction, et par suite leur rapport doit être considéré comme positif (n° 6); tandis que, le point de partage étant situé en dehors, PR et RQ se trouvent mesurées suivant des directions opposées, et leur rapport doit être considéré comme négatif.

EXERCICES.

I. Trouver les coordonnées du milieu de la droite joignant (x', y'), (x'', y'').

RÉPONSE. $x = \frac{x' + x''}{2}$, $y = \frac{y' + y''}{2}$.

II. Trouver les coordonnées des milieux des côtés du triangle, ayant pour sommets les points $(2, 3)$, $(4, -5)$, $(-3, -6)$.

RÉPONSE. $\frac{1}{2}, -\frac{11}{2}$; $-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$; $3, -1$.

III. On divise en trois parties égales la droite joignant $(2, 3)$, $(4, -5)$: trouver les coordonnées du point de division le plus voisin du premier point.

RÉPONSE. $x = \frac{8}{3}$, $y = \frac{1}{3}$.

IV. Les coordonnées des sommets d'un trianglo sont x', y'; x'', y''; x''', y'''; une des médianes est divisée en trois parties égales ; trouver les coordonnées du point de division le plus éloigné du sommet d'où part la médiane.

RÉPONSE. $x = \frac{x' + x'' + x'''}{3}$, $y = \frac{y' + y'' + y'''}{3}$.

V. Trouver les coordonnées de l'intersection des médianes du triangle de l'Ex. II.

RÉPONSE. $x = 1$, $y = -\frac{8}{3}$.

VI. On joint au sommet d'un triangle le point qui divise le côté opposé dans le rapport de $m : n$; trouver les coordonnées du point qui divise la droite de jonction dans le rapport de $m + n : l$.

RÉPONSE. $x = \frac{lx' + mx'' + nx'''}{l + m + n}$, $y = \frac{ly' + my'' + ny'''}{l + m + n}$.

§ II. — Transformation des coordonnées.

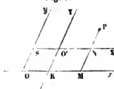
8. On appelle *transformation des coordonnées* l'opération à laquelle on est conduit, lorsque, connaissant les coordonnées d'un point par rapport à un système d'axes, on veut déterminer les coordonnées de ce point par rapport à un autre système d'axes.

Nous examinerons successivement trois cas.

9. I. *Les nouveaux axes sont parallèles aux anciens.*

Soient (*fig.* 5) Ox, Oy les anciens axes; $O'X$, $O'Y$ les nouveaux; $x' = O'S$, $y' = O'R$ les coordonnées de la nouvelle

Fig. 5.



origine O′ par rapport aux anciens axes; $x = OM$, $y = PM$ les anciennes coordonnées du point P; $X = O'N$ et $Y = PN$ les nouvelles : on aura

$$OM = OR + RM, \quad PM = PN + NM,$$

c'est-à-dire

$$x = x' + X, \quad y = y' + Y.$$

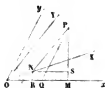
Ces formules sont évidemment indépendantes de l'angle que les axes font entre eux.

II. *On change la direction des axes sans déplacer l'origine.*

Soient (*fig.* 6) Ox, Oy les anciens axes; OX, OY les nouveaux; $OQ = x$ et $PQ = y$ les coordonnées du point P par rapport aux anciens axes; $ON = X$, $PN = Y$ les nouvelles coordonnées. Désignons par α et β les angles que OX et OY font respectivement avec l'ancien axe des x; par α' et β' les angles que ces droites font avec l'ancien axe des y. Si ω est

l'angle yOx compris entre les anciens axes, nous aurons évidemment $\alpha+\alpha'=\omega$, puisque $\widehat{XOx}+\widehat{XOy}=\widehat{xOy}$; et de même $\beta+\beta'=\omega$.

Fig. 6.



Nous obtiendrons facilement les formules de transformation en exprimant en fonction des anciennes et des nouvelles coordonnées les longueurs des perpendiculaires abaissées du point P sur les axes primitifs. Pour cela, menons à Ox les perpendiculaires PM, NR, et la parallèle NS.

Nous avons

$$PM = PQ \sin \widehat{PQM},$$

ou

$$PM = y \sin \omega.$$

Mais

$$PM = NR + PS = ON \sin \widehat{NOR} + PN \sin \widehat{PNS};$$

donc

$$y \sin \omega = X \sin \alpha + Y \sin \beta.$$

Nous trouverions de même

$$x \sin \omega = X \sin \alpha' + Y \sin \beta',$$

ou

$$x \sin \omega = X \sin(\omega - \alpha) + Y \sin(\omega - \beta).$$

Dans la *fig.* 6, les angles α, β et ω sont tous mesurés du même côté de Ox; et les angles α', β' et ω tous du même côté de Oy : si l'un de ces angles se trouvait de l'autre côté, on devrait lui donner le signe —. Si, par exemple, OY se trouvait à gauche de Oy, l'angle β serait plus grand que ω, et $\beta'=(\omega-\beta)$ serait négatif, et par suite le coefficient de Y dans l'expression de $x \sin \omega$ le serait aussi; c'est ce qui arrive dans le cas suivant, qui se présente assez souvent, et auquel nous consacrerons une figure spéciale.

Passer d'un système de coordonnées rectangulaires à un nouveau système de coordonnées rectangulaires, les axes du nouveau système faisant un angle θ avec les axes de l'ancien.

Nous avons, dans ce cas,

$$\alpha = \theta, \quad \beta = 90^\circ + \theta, \quad \alpha' = 90^\circ - \theta, \quad \beta' = -\theta,$$

et les formules générales deviennent

$$y = X \sin\theta + Y \cos\theta,$$
$$x = X \cos\theta - Y \sin\theta.$$

Fig. 7.



On peut démontrer directement ces formules : soient en effet (*fig.* 7) Ox, Oy les anciens axes, et OX, OY les nouveaux ; menons PM et NR perpendiculairement à Ox, NS parallèlement au même axe, et PN perpendiculairement à OX, nous aurons

$$y = PM = PS + NR, \quad x = OM = OR - SN;$$

et ces formules se ramènent aux précédentes, puisque

$$PS = PN\cos\theta, \quad NR = ON\sin\theta; \quad OR = ON\cos\theta, \quad SN = PN\sin\theta.$$

On rencontre aussi fréquemment dans la pratique le cas suivant :

Passer d'un système de coordonnées obliques à un système de coordonnées rectangulaires ayant le même axe des x.

On peut déduire les formules à employer des formules générales, en y faisant

$$\alpha = 0, \quad \beta = 90^\circ, \quad \alpha' = \omega, \quad \beta' = \omega - 90^\circ.$$

Mais il est plus simple de les déterminer directement.

Soient PQ et OQ les anciennes coordonnées (*fig.* 8), PM

et OM les nouvelles; nous aurons, puisque $\widehat{PQM} = \omega$,

$$Y = y \sin\omega, \quad X = x + y \cos\omega,$$

Fig. 8.



et par suite, pour exprimer les anciennes coordonnées en fonction des nouvelles,

$$y \sin\omega = Y, \quad x \sin\omega = X \sin\omega - Y \cos\omega.$$

10. III. *On change à la fois l'origine et la direction des axes.*

En combinant les formules obtenues dans les deux numéros précédents, nous pourrons trouver les coordonnées d'un point par rapport à un nouveau système d'axes situés dans une position quelconque. Nous calculerons d'abord (n° 9) les coordonnées du point par rapport à un système d'axes parallèles aux anciens et passant par la nouvelle origine, puis ensuite les coordonnées de ce point par rapport au système donné.

Les formules générales de transformation s'obtiendront en ajoutant x' et y' (c'est-à-dire les coordonnées de la nouvelle origine par rapport aux anciens axes) aux valeurs de x et de y données au n° 9, II.

EXERCICES.

I. Les coordonnées d'un point satisfont à la relation

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y = 18;$$

que deviendra cette relation si l'on transporte l'origine au point (2, 3)?

Réponse. $X^2 + Y^2 = 31$.

II. Les coordonnées d'un point, par rapport à des axes rectangulaires, satisfont à la relation $y^2 - x^2 = 6$; que deviendra cette relation si l'on prend pour axes les bissectrices des angles formés par les anciens?

Réponse. $XY = 3$.

III. Transformer l'équation $2x^2 - 5xy + 2y^2 = 4$, prise par rapport à des axes faisant entre eux un angle de 60 degrés, en prenant pour nouveaux axes les bissectrices des angles formés par les anciens.

RÉPONSE. $$X^2 - 27Y^2 + 12 = 0.$$

IV. Transformer les mêmes équations en prenant de nouveaux axes rectangulaires et conservant le même axe des x.

RÉPONSE. $$3X^2 + 10Y^2 - 7XY\sqrt{3} = 6.$$

V. Il est évident qu'en passant d'un système rectangulaire à un autre ayant même origine, on a toujours $x^2 + y^2 = X^2 + Y^2$, puisque l'un et l'autre terme de cette équation représentent le carré de la distance d'un point à l'origine. Vérifier cette proposition en élevant au carré et ajoutant les valeurs de X et Y données au n° 9.

VI. Vérifier de même qu'on a, en général,

$$x^2 + y^2 + 2xy\cos\widehat{xOy} = X^2 + Y^2 + 2XY\cos\widehat{XOY}.$$

Si l'on pose

$$X\sin\alpha + Y\sin\beta = L, \quad X\cos\alpha + Y\cos\beta = M,$$

les formules du n° 9 peuvent s'écrire

$$y\sin\omega = L, \quad x\sin\omega = M\sin\omega - L\cos\omega;$$

donc

$$\sin^2\omega(x^2 + y^2 + 2xy\cos\omega) = (L^2 + M^2)\sin^2\omega.$$

Mais

$$L^2 + M^2 = X^2 + Y^2 + 2XY\cos(\alpha - \beta) \quad \text{et} \quad \alpha - \beta = \widehat{XOY}.$$

11. *La transformation des coordonnées ne change pas le degré d'une équation existant entre les coordonnées d'un point.*

La transformation ne peut *augmenter* le degré de l'équation, puisque les termes $x^m, y^m, \ldots$, du degré le plus élevé dans l'équation donnée, se trouvent remplacés dans l'équation transformée par les termes

$$[x'\sin\omega + x\sin(\omega - \alpha) + y\sin(\omega - \beta)]^m,$$
$$(y'\sin\omega + \sin\alpha + y\sin\beta)^m,$$

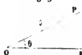
qui ne contiennent pas x et y à un degré supérieur à m.

La transformation ne peut pas non plus *diminuer* le degré de l'équation, car il faudrait alors que la transformation inverse augmentât le degré de l'équation, ce qui est impossible, comme on vient de le voir.

§ III. — Coordonnées polaires.

12. On peut aussi déterminer la position d'un point P (*fig.* 9) par sa distance $\rho = OP$ à un point fixe O, et l'angle θ que fait la droite OP, avec une droite fixe OB passant par le point O.

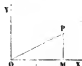
Fig. 9.



La droite OP s'appelle alors *rayon vecteur;* le point fixe est le *pôle*. La distance ρ et l'angle θ sont les *coordonnées polaires* du point P.

Il est facile de trouver la relation qui existe entre les coordonnées rectilignes $x = OM$, $y = PM$ d'un point P (*fig.* 10), et ses coordonnées polaires $\rho = OP$ et $\theta = \widehat{POM}$, relatives à la même origine O.

Fig. 10.



1° Supposons que l'axe fixe soit l'axe des x; nous aurons

$$OP : PM :: \sin\widehat{PMO} : \sin\widehat{POM};$$

représentant OP par ρ et l'angle POM par θ, il viendra

$$PM = y = \frac{\rho\sin\theta}{\sin\omega}.$$

Nous trouverions de même

$$OM = x = \frac{\rho\sin(\omega - \theta)}{\sin\omega}.$$

Si les coordonnées sont rectangulaires, ce qui est le cas le plus général, ω est égal à 90 degrés; les formules se simplifient alors et deviennent

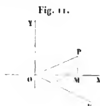
$$x = \rho\cos\theta,\quad y = \rho\sin\theta.$$

2° Supposons que la droite fixe OB ne coïncide plus avec l'axe des x (*fig.* 11), et fasse avec lui un angle α; on aura alors

$$\widehat{POB} = \theta \quad \text{et} \quad \widehat{POM} = \theta - \alpha,$$

et il suffira de remplacer θ par $\theta - \alpha$ dans les formules précédentes.

Fig. 11.



Dans le cas des coordonnées rectangulaires, on aura

$$x = \rho\cos(\theta - \alpha),\quad y = \rho\sin(\theta - \alpha).$$

EXERCICES.

I. Rapporter à des coordonnées polaires les équations suivantes, relatives à des coordonnées rectangulaires,

$x^2 + y^2 = 5mx$,	Réponse	$\rho = 5m\cos\theta$,
$x^2 - y^2 = a^2$.		$\rho^2\cos 2\theta = a^2$.

II. Rapporter à des coordonnées rectangulaires les équations suivantes, relatives à des coordonnées polaires,

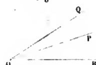
$\rho^2\sin 2\theta = a^2$,	Réponse.	$xy = a^2$,
$\rho^2 = a^2\cos 2\theta$,		$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$,
$\rho^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{2}\theta = a^{\frac{1}{2}}$,		$x^2 + y^2 = (2a - x)^2$,
$\rho^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{2}\theta$.		$(2x^2 + 2y^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)$.

13. *Exprimer la distance δ de deux points en fonction des coordonnées polaires de ces points.*

Soient P et Q (*fig.* 12) les deux points, O le pôle et OB la droite fixe.

$$OP = \rho', \quad \widehat{POB} = \theta',$$
$$OQ = \rho''; \quad \widehat{QOB} = \theta'';$$

Fig. 12.



mais

$$\overline{PQ}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 - 2\,OP.OQ\cos POQ;$$

donc

$$\delta^2 = \rho'^2 + \rho''^2 - 2\rho'\rho''\cos(\theta'' - \theta').$$

CHAPITRE II.

DE LA LIGNE DROITE.

14. *Deux équations quelconques entre les coordonnées représentent géométriquement un ou plusieurs points.*

Lorsque ces équations sont toutes deux du premier degré, elles représentent un seul point, car, en les résolvant par rapport à x et y, on obtient deux équations de la forme $x = a$, $y = b$, qui, ainsi que nous l'avons démontré dans le Chapitre précédent, représentent un seul point.

Si ces équations sont d'un degré supérieur au premier, elles représentent plusieurs points; en effet, éliminant y entre les deux équations, on obtient une équation en x seulement, dont nous représenterons les racines par $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$. En substituant une de ces valeurs, α_1, à la place de x dans les équations primitives, on trouve deux équations en y, ayant une racine commune $y = \beta_1$ (puisque l'équation résultant de l'élimination de y entre les deux équations est satisfaite par $x = \alpha_1$). Les valeurs $x = \alpha_1$, $y = \beta_1$ satisfont aux équations données et correspondent à un point représenté par ces équations. Le même raisonnement s'appliquerait aux autres points $x = \alpha_2$, $y = \beta_2, \ldots$.

EXERCICES.

I. Quel est le point représenté par les équations

$$3x + 5y = 13, \quad 4x - y = 2\,?$$

RÉPONSE. $x = 1, \quad y = 2.$

II. Quels sont les points représentés par les deux équations

$$x^2 + y^2 = 5, \quad xy = 2\,?$$

Éliminant y entre ces équations on trouve

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0.$$

Les racines de cette équation sont $x^2 = 1$, $x^2 = 4$, et par suite les quatre valeurs de x sont

$$x = +1, \quad x = -1, \quad x = +2, \quad x = -2.$$

Substituant successivement ces valeurs dans la deuxième équation, on trouve, pour les valeurs correspondantes de y,

$$y = +2, \quad y = -2, \quad y = +1, \quad y = -1.$$

Les deux équations données représentent donc les quatre points

$$(+1, +2), \quad (-1, -2), \quad (+2, +1), \quad (-2, -1).$$

III. Quels sont les points représentés par les équations

$$x - y = 1, \quad x^2 + y^2 = 25?$$

Réponse. $(4, 3)$, $(-3, -4)$.

IV. Quels sont les points représentés par les équations

$$x^2 - 5x + y + 3 = 0, \quad x^2 + y^2 - 5x - 3y + 6 = 0?$$

Réponse. $(1, 1)$, $(2, 3)$, $(3, 3)$, $(4, 1)$.

15. *Une seule équation entre les coordonnées représente un lieu géométrique.*

Il est évident qu'une seule équation est insuffisante pour déterminer les deux inconnues x et y, et qu'elle peut être satisfaite par un nombre indéfini de systèmes de valeurs de x et de y, sans que, cependant, elle le soit par un système de valeurs pris au hasard. L'ensemble des points dont les coordonnées satisfont à l'équation forme un *lieu* qui est considéré comme la représentation géométrique de l'équation donnée.

Ainsi, par exemple, nous avons vu (n° 5, Ex. III) que l'équation

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$$

représente la distance du point (x, y) au point $(2, 3)$, qui est égale à 4. Cette équation est donc satisfaite par les coor-

données d'un point quelconque du cercle qui a pour centre le point (2, 3) et 4 pour rayon, et elle n'est satisfaite que par les coordonnées de ces points. On dit alors que le cercle est le lieu représenté par cette équation.

L'exemple suivant, plus simple encore, nous permettra de faire voir aussi qu'une seule équation entre les coordonnées représente un lieu géométrique. Reprenons la construction au moyen de laquelle (n° 1) nous avons déterminé la position du point représenté par les deux équations $x=a$, $y=b$. Nous avons obtenu le point P (*fig.* 13) en prenant $MP=b$ sur la parallèle MK menée à OY par le point M distant du

Fig. 13.

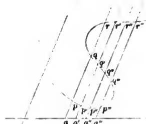


point O de $OM=a$. Si nous nous étions donné une valeur différente b' pour y, en procédant de la même manière, nous aurions encore trouvé un point situé sur la ligne MK, mais à une distance différente de M. Enfin, si la valeur de y est laissée tout à fait indéterminée, et si nous ne nous donnons que l'équation $x=a$, le point P sera situé *quelque part* sur la ligne MK, et sa position sur cette droite sera indéterminée. La ligne MK est donc le lieu de tous les points représentés par l'équation $x=a$, puisque, quel que soit le point que l'on prenne sur cette ligne MK, l'abscisse x de ce point sera toujours égale à a.

16. En général, lorsqu'on a une équation de degré quelconque entre les coordonnées, on peut prendre pour x une valeur arbitraire, $x=a$, et déduire de cette équation un nombre fini de valeurs de y correspondantes à cette valeur particulière de x : par conséquent cette équation sera satisfaite par chacun des points $p, q, r,\ldots$ (*fig.* 14), qui ont pour abscisse cette valeur particulière, et pour ordonnées les valeurs corres-

pondantes déduites de l'équation. En partant d'une autre valeur de x, $x = a'$, nous trouverons de même une autre série

Fig. 14.



de points satisfaisant à l'équation. Et il en sera encore ainsi pour d'autres valeurs de x, $x = a''$, $x = a'''$,.... Si donc nous donnons successivement à x toutes les valeurs possibles, l'ensemble de tous les points trouvés comme il vient d'être dit formera un *lieu* dont chaque point satisfera à l'équation, et qui en sera par conséquent la représentation géométrique.

On peut, en suivant le procédé qui vient d'être indiqué, déterminer autant de points qu'il est nécessaire, pour figurer la forme du lieu.

EXERCICES.

I. Représenter graphiquement (*) une série de points satisfaisant à l'équation $y = 2x + 3$.

Réponse. Donnant à x les valeurs $-2, -1, 0, 1, 2, \ldots$, on trouve, pour y, $-1, 1, 3, 5, 7, \ldots$, et l'on voit alors que les points correspondants sont en ligne droite.

II. Représenter le lieu correspondant à l'équation $y = x^2 - 3x - 2$.

Réponse. Aux valeurs de x : $-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4$,

correspondent les valeurs de y : $2, -\frac{1}{4}, -2, -\frac{13}{4}, -4, -\frac{17}{4}, -4$,

(*) Nous recommandons au lecteur de se servir pour cet objet de papier quadrillé.

$-\frac{13}{4}$, -2, $-\frac{1}{4}$, 2. Ces points sont suffisants pour indiquer la forme de la courbe ; on peut du reste les multiplier en donnant à x des valeurs positives ou négatives plus grandes.

III. Représenter la courbe $y = 3 \pm \sqrt{20 - x - x^2}$.

Réponse. A chaque valeur de x correspondent deux valeurs de y : aucune partie de la courbe ne se trouve à droite de la ligne $x = 4$, ni à gauche de la ligne $x = -5$, puisqu'en donnant à x des valeurs positives ou négatives plus grandes, la valeur de y devient imaginaire.

17. Toute la Géométrie analytique est fondée sur la corrélation qui, ainsi que nous venons de le montrer, existe entre une équation et un lieu géométrique. De là un double but à remplir. Si une courbe est définie par une propriété géométrique, nous aurons à déduire de cette propriété l'équation qui devra être satisfaite par les coordonnées des points de la courbe. Ainsi, par exemple, si l'on définit le cercle : le lieu des points (x, y) dont la distance à un point fixe (a, b) est constante et égale à r, on aura pour l'*équation du cercle* en coordonnées rectangulaires (n° 4)

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Si, d'un autre côté, on nous donne une équation, nous aurons à déterminer la forme de la courbe qu'elle représente, ainsi que les propriétés géométriques de cette courbe. Pour faire cette recherche avec méthode, après avoir classé les équations suivant leur degré, nous déterminerons la forme et les propriétés du lieu représenté par une équation, en commençant par les équations du degré le moins élevé.

Le degré d'une équation se définit par la plus grande valeur de la somme des exposants de x et de y prise dans chacun de ses termes. Ainsi l'équation $xy + 2x + 3y = 4$ est du second degré, puisqu'elle renferme le terme xy. Si ce terme n'existait pas, elle serait du premier degré. On dit qu'une courbe est du degré n lorsque l'équation qui la représente est elle-même du degré n.

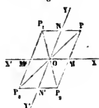
Nous étudierons d'abord l'équation du premier degré : nous

ferons voir qu'elle représente toujours une *ligne droite*, et que, réciproquement, l'équation d'une ligne droite est toujours du premier degré.

18. Nous avons déjà examiné (nº 15) un cas très-simple de l'équation du premier degré, celui de l'équation $x = a$. Reprenant les mêmes considérations, nous ferions voir que l'équation $y = b$ représente une parallèle PN à l'axe OX (*fig.* 15), coupant l'axe OY à une distance de l'origine $ON = b$. Si b devient nul, l'équation se réduit à $y = 0$ et représente l'axe OX; de même l'équation $x = 0$ représente l'axe OY.

Passons à un cas un peu moins simple, et cherchons quelle est la relation qui existe entre les coordonnées d'un point situé sur une droite passant par l'origine.

Fig. 15.



Les deux coordonnées PM et PN du point P (*fig.* 15) sont de longueurs variables, mais leur rapport est constant, puisqu'il est égal à

$$\sin\widehat{POM} : \sin\widehat{MPO};$$

l'équation

$$y = \frac{\sin\widehat{POM}}{\sin\widehat{MPO}}\, x$$

sera donc satisfaite par tous les points de la droite : ce sera l'équation de la ligne OP.

Réciproquement, si nous cherchons quelle est la ligne représentée par l'équation

$$y = mx,$$

nous voyons, en mettant l'équation sous la forme $\frac{y}{x} = m$, que

cela revient à « trouver le lieu d'un point P tel, que le rapport PM : PN des deux droites menées par ce point parallèlement à deux droites fixes soit constant. » Ce lieu est évidemment une droite OP passant par l'intersection O des droites fixes, et divisant l'angle qu'elles forment de telle sorte que

$$\sin \widehat{POM} = m \sin \widehat{PON}.$$

Si les axes sont rectangulaires, on a $\sin \widehat{PON} = \cos \widehat{POM}$, et alors $m = \operatorname{tang} \widehat{POM}$. L'équation représente dans ce cas une droite passant par l'origine et faisant avec l'axe des x un angle dont la tangente est m.

19. Une équation de la forme $y = + mx$ représente une droite OP située dans les angles YOX, Y'OX' ; car il résulte de cette équation qu'à une valeur positive de x correspondra une valeur positive de y, et à une valeur négative de x une valeur négative de y. Les points représentés par cette équation auront donc leurs deux coordonnées à la fois positives ou à la fois négatives : par suite, ces points ne pourront se trouver (n° 4) que dans les angles YOX, Y'OX'.

Au contraire, pour que l'équation $y = - mx$ soit satisfaite, il faut que y soit négatif si x est positif, ou positif si x est négatif. Les points satisfaisant à cette équation auront donc leurs coordonnées de signes *différents :* par suite, la droite que représente l'équation se trouvera (n° 3) dans les angles Y'OX, YOX'.

20. Cherchons maintenant l'équation de la droite PQ (*fig.* 16) située d'une manière quelconque par rapport aux axes.

Menons par l'origine une parallèle OR à QP, et soit R le point de rencontre de OR et de l'ordonnée PM. Il est évident (n° 18) que le rapport RM : OM est constant (on aura, par exemple, $RM = m.OM$); mais l'ordonnée PM diffère de RM de la quantité constante $PR = OQ = b$; nous pourrons donc écrire

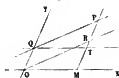
$$PM = RM + PR \quad \text{ou} \quad PM = m.OM + PR,$$

c'est-à-dire

$$y = mx + b.$$

Cette équation, étant satisfaite par tous les points de la droite QP, sera par suite l'équation de cette droite.

Fig. 16.



Il résulte du numéro précédent que m sera positif ou négatif suivant que la parallèle OR à QP se trouvera dans l'angle YOX ou Y'OX. D'autre part, b sera positif ou négatif suivant que le point Q, où la droite rencontre l'axe des y, sera au-dessus ou au-dessous de l'origine.

Réciproquement, l'équation $y = mx + b$ représente toujours une ligne droite. En mettant, ce qui est possible, cette équation sous la forme

$$\frac{y - b}{x} = m,$$

et menant QT parallèlement à OM, on aura

$$\text{TM} = b,$$

et, par suite,

$$\text{PT} = y - b.$$

La proposition ci-dessus revient donc à « trouver le lieu d'un point tel, qu'en menant par le point une parallèle PT à OY jusqu'à la rencontre de la droite fixe QT, on détermine un segment PT qui soit à QT dans un rapport constant. » Et ce lieu est évidemment une droite PQ passant par le point Q.

L'équation la plus générale du premier degré,

$$\text{A}x + \text{B}y + \text{C} = 0,$$

peut évidemment se ramener à la forme $y = mx + b$, puis-

qu'elle est équivalente à

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Elle représente donc *toujours* une ligne droite.

21. Ce que nous venons de dire plus haut permet de préciser la signification géométrique des constantes qui se trouvent dans l'équation de la ligne droite. Si la droite représentée par l'équation $y = mx + b$ fait un angle α avec l'axe des x et un angle β avec l'axe des y, on a (n° 18)

$$m = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta},$$

et, si les axes sont rectangulaires,

$$m = \tang\alpha.$$

D'ailleurs (n° 20) b est le segment déterminé par la droite sur l'axe des y.

L'équation étant donnée sous la forme $Ax + By + C = o$, peut se ramener comme précédemment à la forme $y = mx + b$; on trouve alors

$$-\frac{A}{B} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta},$$

ou, si les axes sont rectangulaires,

$$-\frac{A}{B} = \tang\alpha;$$

et le rapport $-\frac{C}{B}$ représente le segment que la droite détermine sur l'axe des y.

Corollaire. — Les droites $y = mx + b$, $y = m'x + b'$ sont parallèles si $m = m'$, puisqu'elles font toutes deux les mêmes angles avec les axes. De même les droites $Ax + By + C = o$, $A'x + B'y + C' = o$ sont parallèles lorsque

$$\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'}.$$

Avant d'aller plus loin, nous allons faire connaître deux

formes différentes sous lesquelles on met fréquemment l'équation de la ligne droite.

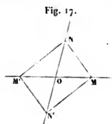
22. *Trouver l'équation d'une droite* MN (*fig.* 17) *en fonction des segments* $OM = a$, $ON = b$ *qu'elle détermine sur les axes.*

Nous pouvons déduire cette équation de l'équation déjà connue

$$Ax + By + C = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{A}{C}x + \frac{B}{C}y + 1 = 0.$$

Cette dernière équation, devant être satisfaite par tous les

Fig. 17.



points de la droite, le sera par le point $M(x = a,\ y = 0)$ (n° 2); nous aurons donc

$$\frac{A}{C}a + 1 = 0, \quad \frac{A}{C} = -\frac{1}{a}.$$

Elle le sera de même par le point $N(x = 0, y = b)$, donc

$$\frac{B}{C} = -\frac{1}{b}.$$

Portant ces valeurs dans l'équation générale, elle devient

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Cette équation est indépendante de l'angle que font entre eux les axes de coordonnées.

La position de la droite varie évidemment avec les signes des quantités a et b. Ainsi, à l'équation $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, qui donne des quantités positives pour les segments faits sur les axes,

L'équation de la droite MN est (n° 22)

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Multipliant cette équation par p, il vient

$$\frac{p}{a}x + \frac{p}{b}y = p.$$

Mais $\frac{p}{a} = \cos\alpha$, $\frac{p}{b} = \cos\beta$, donc l'équation de la droite sera

$$x\cos\alpha + y\cos\beta = p.$$

Si les coordonnées sont rectangulaires, ce qui est le cas le plus fréquent, $\beta = 90° - \alpha$, et l'équation de la droite devient

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p.$$

Si l'on suppose que α puisse prendre une valeur quelconque comprise entre 0 et 360 degrés, cette équation présentera quatre cas particuliers correspondants à ceux de l'équation du n° 22. Si la droite a la position NM' (*fig.* 17), α sera compris entre 90 et 180 degrés, et le coefficient de x sera négatif; si elle a la position M'N', α sera compris entre 180 et 270 degrés, les coefficients de x et de y seront tous deux négatifs; enfin, si elle a la position MN', α étant compris entre 270 et 180 degrés, le coefficient de y sera négatif. Néanmoins, dans ces deux derniers cas, il sera plus commode d'écrire l'équation sous la forme $x\cos\alpha + y\sin\alpha = -p$, et de regarder α comme l'angle, compris entre 0 et 180 degrés, que le *prolongement* de la perpendiculaire fait avec la direction positive de l'axe des x. Par suite, dans l'emploi de la formule

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p,$$

nous supposerons p susceptible de recevoir le double signe, et nous prendrons pour α l'angle, toujours inférieur à 180 degrés, que la direction positive de l'axe des x fait avec la perpendiculaire ou avec son prolongement.

On peut facilement ramener à la forme $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$, l'équation générale $Ax + By + C = 0$; car, en divisant tous

expriment respectivement les cosinus des angles que la perpendiculaire abaissée de l'origine sur la droite

$$Ax + By + C = 0$$

fait avec l'axe des x et celui des y, et que

$$\frac{C \sin\omega}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AC\cos\omega}}$$

est la longueur de cette perpendiculaire. Cette longueur peut, du reste, se calculer plus facilement en divisant le double (ON.OM sinω) de l'aire du triangle NOM (*fig.* 18) par la longueur de MN dont on connaît l'expression.

Le radical qui se trouve au dénominateur doit recevoir le double signe, puisque l'équation peut se ramener à l'une ou l'autre des formes

$$x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0,$$
$$x\cos(\alpha + 180^\circ) + y\cos(\beta + 180^\circ) + p = 0.$$

25. *Trouver l'angle compris entre deux droites, dont les équations sont données, en coordonnées rectangulaires.*

L'angle formé par les deux droites est évidemment égal à celui qui est compris entre les perpendiculaires abaissées de l'origine sur ces droites; si donc ces perpendiculaires font avec l'axe des x les angles α et α', $Ax + By + C = 0$, $A'x + B'y + C' = 0$ étant les équations des deux droites, nous aurons (n° 23)

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$
$$\cos\alpha' = \frac{A'}{\sqrt{A'^2 + B'^2}}, \quad \sin\alpha' = \frac{B'}{\sqrt{A'^2 + B'^2}},$$

d'où

$$\sin(\alpha - \alpha') = \frac{BA' - AB'}{\sqrt{A^2 + B^2}.\sqrt{A'^2 + B'^2}},$$
$$\cos(\alpha - \alpha') = \frac{AA' + BB'}{\sqrt{A^2 + B^2}.\sqrt{A'^2 + B'^2}},$$

et, par suite,

$$\tan(\alpha - \alpha') = \frac{BA' - AB'}{AA' + BB'}.$$

Corollaire I. — Les deux droites sont parallèles (n° 21) lorsque

$$BA' - AB' = 0,$$

puisque l'angle qu'elles forment devient nul.

Corollaire II. — Les deux droites sont perpendiculaires lorsque

$$AA' + BB' = 0,$$

puisque la tangente de l'angle qu'elles comprennent devient infinie.

Si les équations des droites sont données sous la forme

$$y = mx + b, \quad y' = m'x + b',$$

les tangentes des angles qu'elles font avec l'axe des x sont m et m' (n° 21), et comme l'angle qu'elles comprennent est égal à la différence de ces angles, on aura pour sa tangente

$$\frac{m - m'}{1 + mm'}.$$

Les droites sont parallèles si $m = m'$, et perpendiculaires si $1 + mm' = 0$.

*26. *Trouver l'angle compris entre deux droites, les coordonnées étant obliques.*

Partant des expressions du n° 24, et procédant comme ci-dessus, nous trouverons, en désignant par ω l'angle que forment les axes,

$$\cos\alpha = \frac{A \sin\omega}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\omega}},$$

$$\cos\alpha' = \frac{A' \sin\omega}{\sqrt{A'^2 + B'^2 - 2A'B'\cos\omega}},$$

et

$$\sin\alpha = \frac{B - A\cos\omega}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\omega}},$$

$$\sin\alpha' = \frac{B' - A'\cos\omega}{\sqrt{A'^2 + B'^2 - 2A'B'\cos\omega}}.$$

Donc

$$\sin(\alpha-\alpha') = \frac{(BA'-AB')\sin\omega}{\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\omega}\,.\sqrt{A'^2+B'^2-2A'B'\cos\omega}},$$

$$\sin(\alpha-\alpha') = \frac{BB'+AA'-(AB'+A'B)\cos\omega}{\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\omega}\,.\sqrt{A'^2+B'^2-2A'B'\cos\omega}},$$

$$\tang(\alpha-\alpha') = \frac{(BA'-AB')\sin\omega}{BB'+AA'-(AB'+A'B)\cos\omega}.$$

Corollaire I. — Les droites sont parallèles lorsque

$$BA' = AB'.$$

Corollaire II. — Les droites sont perpendiculaires lorsque

$$AA'+BB' = (AB'+BA')\cos\omega.$$

27. *On peut toujours trouver une droite satisfaisant à deux conditions.*

Toutes les formes sous lesquelles nous avons donné l'équation générale de la ligne droite renferment deux constantes. Ainsi les formes $y = mx + b$, $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ renferment les constantes m et b, α et p. La seule forme

$$Ax + By + C = 0$$

semble en renfermer un plus grand nombre ; mais dans ce cas on n'a pas à considérer les grandeurs absolues des coefficients, mais bien leurs rapports, car, en multipliant ou en divisant tous les termes d'une équation par une même quantité, on ne change pas la nature du lieu qu'elle représente. On peut donc ramener l'équation $Ax + By + C = 0$ à n'avoir que deux constantes $\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$ en divisant tous ses termes par C. Par suite, en adoptant une quelconque de ces formes, par exemple $y = mx + b$, pour celle de l'équation générale de la droite, on peut considérer m et b comme des inconnues qu'il s'agit de déterminer. Lorsque nous aurons deux conditions, nous pourrons trouver les valeurs de m et de b relatives à la droite qui satisfait à ces deux conditions.

Ce sujet sera du reste développé d'une façon plus explicite dans les n°s 28, 29, 32 et 33.

28. *Trouver l'équation d'une droite menée par un point (x', y') parallèlement à une droite donnée.*

La droite cherchée devant être parallèle à une droite donnée, la constante m de son équation $y = mx + b$ est déterminée (n° 21, Cor.); puisque en outre cette droite passe par le point (x', y'), son équation, qui doit être satisfaite par les coordonnées d'un quelconque de ses points, le sera par x', y'; on aura donc pour déterminer b, $y' = mx' + b$, et l'équation cherchée sera

$$y = mx + y' - mx' \quad \text{ou} \quad y - y' = m(x - x').$$

Si dans cette dernière équation nous considérons m comme indéterminée, nous aurons l'équation générale des droites passant par un point donné.

29. *Trouver l'équation de la droite passant par les deux points (x', y'), (x'', y'').*

L'équation générale (que nous venons de trouver) d'une droite passant par un point donné (x', y') peut s'écrire

$$\frac{y - y'}{x - x'} = m,$$

m étant une indéterminée. Si la droite doit passer en outre par le point (x'', y''), cette équation sera satisfaite lorsqu'on y remplacera x et y par x'' et y''. Donc

$$\frac{y'' - y'}{x'' - x'} = m,$$

et, par suite, l'équation cherchée est

$$\frac{y - y'}{x - x'} = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}.$$

Sous cette forme, elle se grave facilement dans la mémoire. En chassant les dénominateurs, on obtient l'équation suivante, qui est d'un usage assez fréquent,

$$(y' - y'')x - (x' - x'')y + x'y'' - y'x'' = 0.$$

On peut mettre aussi cette équation sous la forme

$$(x-x')(y-y'')=(x-x'')(y-y'),$$

qui représente une droite, puisque les termes en xy disparaissent; on voit immédiatement qu'elle est satisfaite par l'une ou l'autre des hypothèses $x=x'$, $y=y'$; $x=x''$, $y=y''$; et, en développant on retombe sur le résultat précédent.

Corollaire. — L'équation de la droite joignant l'*origine* au point (x', y') est

$$y'x=x'y.$$

EXERCICES.

I. Écrire les équations des côtés du triangle ayant pour sommets les points $(2, 1)$, $(3, -2)$, $(-4, -1)$.

RÉPONSE. $x+7y+11=0$, $3y-x=1$, $3x+y=7$.

II. Même problème; les sommets étant $(2, 3)$, $(4, -5)$, $(-3, -6)$.

RÉPONSE. $x-7y=39$, $9x-5y=3$, $4x+y=11$.

III. Trouver l'équation de la droite joignant les points

$$(x', y') \quad \text{et} \quad \left(\frac{mx'+nx''}{m+n}, \frac{my'+ny''}{m+n}\right).$$

RÉPONSE. $(y'-y'')x-(x'-x'')y+x'y''-x''y'=0$.

IV. Écrire l'équation de la droite joignant

$$(x', y') \quad \text{et} \quad \left(\frac{x''+x'''}{2}, \frac{y''+y'''}{2}\right).$$

RÉPONSE.

$$(y''+y'''-2y')x-(x''+x'''-2x')y+x''y'-y''x'+x'''y'-y'''x'=0.$$

V. Écrire les équations des médianes du triangle de l'Ex. II.

RÉPONSE. $17x-3y=25$, $7x+9y+17=0$, $5x-6y=21$.

VI. Écrire l'équation de la droite joignant

$$\left(\frac{lx'-mx''}{l-m}, \frac{ly'-my''}{l-m}\right) \quad \text{à} \quad \left(\frac{lx'-nx''}{l-n}, \frac{ly'-ny''}{l-n}\right).$$

RÉPONSE.

$$\begin{aligned} &x[l(m-n)y'+m(n-l)y''+n(l-m)y'''] \\ &\quad -y[l(m-n)x'+m(n-l)x''+n(l-m)x'''] \\ &= lm(y'x''-x'y'')+mn(y''x'''-x''y''')+nl(y'''x'-y'x'''). \end{aligned}$$

30. *Trouver la condition pour que trois points* (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) *soient en ligne droite.*

Il suffit, pour résoudre cette question, de voir si les coordonnées du troisième point satisfont à l'équation (n° 29) de la droite joignant les deux premiers. On obtient ainsi la relation

$$(y_1 - y_2)x_3 - (x_1 - x_2)y_3 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) = 0,$$

qui peut se mettre sous la forme plus symétrique

$$y_1(x_2 - x_3) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_1 - x_2) = 0 \quad (^*).$$

31. *Trouver les coordonnées du point d'intersection de deux droites données par leurs équations.*

Chacune de ces équations exprimant une condition à laquelle doivent satisfaire les coordonnées du point cherché, on trouvera ces coordonnées en résolvant les deux équations par rapport à x et y.

Nous avons dit (n° 14) qu'un point était déterminé lorsqu'on avait deux équations entre ses coordonnées; nous voyons maintenant que chaque équation représente un lieu sur lequel le point doit se trouver, et par suite que ce point est l'intersection des deux lieux représentés par ces équations. Ainsi, les équations les plus simples pour la détermination d'un point sont $x = a$, $y = b$; elles représentent deux parallèles aux axes de coordonnées, et le point se trouve à leur intersection. Lorsque les équations sont toutes deux du premier de-

(*) En employant cette formule, et d'autres semblables que nous rencontrerons plus loin, on doit bien faire attention de prendre les coordonnées dans un ordre fixe (*voir* la figure ci-après). Si, par exemple, pour avoir le deuxième



terme de la formule ci-dessus, nous remplaçons dans le premier y_1 par y_2, x_2 par x_3 et x_3 par x_1; pour obtenir le troisième nous devons marcher dans le même ordre, et remplacer y_2 par y_3, x_3 par x_1, et x_1 par x_2.

gré, elles ne représentent qu'un seul point, puisque chaque équation est celle d'une droite, et que deux droites ne peuvent se couper qu'en un seul point. Dans le cas, plus général, où les équations sont d'un degré supérieur, les lieux correspondants se coupent en plusieurs points.

EXERCICES.

I. Trouver les sommets du triangle dont les côtés ont pour équations

$$x + y = 2, \quad x - 3y = 4, \quad 3x + 5y + 7 = 0.$$

Réponse. $\left(-\frac{1}{14}, -\frac{19}{14}\right), \left(\frac{17}{2}, -\frac{13}{2}\right), \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right).$

II. Trouver les coordonnées des intersections des droites

$$3x + y - 2 = 0, \quad x + 2y = 5, \quad 2x - 3y + 7 = 0.$$

Réponse. $\left(\frac{1}{7}, \frac{17}{7}\right), \left(-\frac{1}{11}, \frac{25}{11}\right), \left(-\frac{1}{5}, \frac{13}{5}\right).$

III. Trouver les coordonnées des intersections des droites

$$2x + 3y = 13, \quad 5x - y = 7, \quad x - 4y + 10 = 0.$$

Réponse. — Ces droites se coupent au point $(2, 3)$.

IV. Trouver les coordonnées des sommets et les équations des diagonales du quadrilatère dont les côtés sont

$$2x - 3y = 10, \quad 2y + x = 6, \quad 16x - 10y = 33, \quad 12x + 14y + 29 = 0.$$

Réponse.

$$\left(-1, \frac{7}{2}\right), \left(3, \frac{3}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right), \left(-3, \frac{1}{2}\right);$$

$$6y - x = 6, \quad 8x + 2y + 1 = 0.$$

V. Trouver les intersections des côtés opposés du même quadrilatère et l'équation de la droite joignant ces points d'intersection.

Réponse. $\left(83, \frac{259}{2}\right), \left(-\frac{71}{5}, \frac{101}{10}\right); \quad 162y - 199x = 4462$

VI. Trouver les diagonales du parallélogramme formé par

$$x = a, \quad x = a', \quad y = b, \quad y = b'.$$

RÉPONSE.

$$(b - b')x - (a - a')y = a'b - ab', \quad (b - b')x + (a - a')y = ab - a'b'.$$

VII. On prend pour axes la base d'un triangle et la médiane correspondante; trouver les équations des autres médianes et les coordonnées de leur point d'intersection, les coordonnées du sommet opposé à la base étant o, y', celles des autres sommets, x', o et $-x'$, o.

RÉPONSE.

$$3x'y - y'x - x'y' = 0, \quad 3x'y + y'x - x'y' = 0; \quad \left(0, \frac{y'}{3}\right).$$

VIII. On prend pour axes les côtés opposés d'un quadrilatère, et les autres côtés ont pour équations

$$\frac{x}{2a} + \frac{y}{2b} = 1, \quad \frac{x}{2a'} + \frac{y}{2b'} = 1;$$

trouver les points milieux des diagonales.

RÉPONSE. (a, b'), (a', b).

IX. Mêmes données; trouver les coordonnées du point milieu de la droite joignant les points d'intersection des côtés opposés.

RÉPONSE. $\dfrac{a'b.a - ab'.a'}{a'b - ab'}, \quad \dfrac{a'b.b' - ab'.b}{a'b - ab'}.$

La forme de ces expressions indique (n° 7) que ce point divise extérieurement la droite joignant les deux premiers en deux segments qui sont dans le rapport $a'b : ab'$.

32. *Trouver, en coordonnées rectangulaires, l'équation de la perpendiculaire abaissée d'un point donné* (x', y') *sur la droite* $y = mx + b$.

Puisque $mm' = -1$ (n° 25) est la condition pour que deux droites soient perpendiculaires, on a pour l'équation cherchée

$$y - y' = -\frac{1}{m}(x - x').$$

On trouverait de même pour la perpendiculaire abaissée du point (x', y') sur la droite $Ax + By + C = 0$, l'équation

$$A(y - y') = B(x - x'),$$

qui peut se déduire de celle de la droite en *y permutant les coefficients de x et de y, et changeant le signe de l'un d'eux.*

EXERCICES.

I. Trouver les équations des hauteurs du triangle $(2, 1)$, $(3, -2)$, $(-4, -1)$.

Réponse. Les équations des côtés sont (29, Ex. I)

$$x + 7y + 11 = 0, \quad 3y - x = 1, \quad 3x + y = 7,$$

et celles des hauteurs

$$7x - y = 13, \quad 3x + y = 7, \quad 3y - x = 1.$$

Le triangle est rectangle.

II. Trouver les équations des perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés du même triangle.

Réponse. Les points-milieux étant

$$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right), \quad (-1, 0), \quad \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right),$$

les perpendiculaires ont pour équations

$$7x - y + 2 = 0, \quad 3x + y + 3 = 0, \quad 3y - x + 4 = 0.$$

et elles se coupent au point $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$.

III. Trouver les équations des hauteurs du triangle $(2, 3)$, $(4, -5)$, $(-3, -6)$ (29, Ex. II).

Réponse. $7x + y = 17$, $5x + 9y + 25 = 0$, $x - 4y = 21$;

ces droites se coupent au point $\left(\frac{89}{29}, -\frac{130}{29}\right)$.

IV. Trouver les équations des perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés du même triangle.

RÉPONSE. $7x + y + 2 = 0, \quad 5x + 9y + 16 = 0, \quad x - 4y = 21;$

ces droites se coupent au point $\left(-\frac{1}{29}, \; -\frac{51}{29}\right)$.

V. Trouver les équations des hauteurs d'un triangle ayant (x', y'), (x'', y''), (x''', y''') pour sommets.

RÉPONSE.

$$(x'' - x''')x + (y'' - y''')y + (x'x''' + y'y''') - (x'x'' + y'y'') = 0,$$
$$(x''' - x')x + (y''' - y')y + (x''x' + y''y') - (x''x''' + y''y''') = 0,$$
$$(x' - x'')x + (y' - y'')y + (x'''x'' + y'''y'') - (x'''x' + y'''y') = 0.$$

VI. Trouver les équations des perpendiculaires élevées sur le milieu des côtés de ce triangle.

RÉPONSE.

$$(x'' - x''')x + (y'' - y''')y = \frac{1}{2}(x''^2 - x'''^2) + \frac{1}{2}(y''^2 - y'''^2),$$
$$(x''' - x')x + (y''' - y')y = \frac{1}{2}(x'''^2 - x'^2) + \frac{1}{2}(y'''^2 - y'^2),$$
$$(x' - x'')x + (y' - y'')y = \frac{1}{2}(x'^2 - x''^2) + \frac{1}{2}(y'^2 - y''^2).$$

VII. On prend pour axes la base d'un triangle et la hauteur correspondante; trouver l'équation des deux autres hauteurs et les coordonnées de leur point d'intersection. Les coordonnées des extrémités de la base sont $(x'', 0)$, $(-x''', 0)$, et celle du sommet opposé $(0, y')$.

RÉPONSE.

$$x'''(x - x'') + y'y = 0, \quad x''(x + x''') - y'y = 0, \quad \left(0, \; \frac{x''x'''}{y'}\right).$$

VIII. Mêmes données; trouver les équations des perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés et les coordonnées de leur intersection.

RÉPONSE.

$$2(x''' + y'y) = y'^2 - x'''^2, \quad 2(x''x - y'y) = x''^2 - y'^2, \quad 2x = x'' - x''',$$
$$\left(\frac{x'' - x'''}{2}, \; \frac{y'^2 - x''x'''}{2y'}\right).$$

IX. Trouver l'équation de la perpendiculaire abaissée du point (x', y') sur

la droite $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$, et les coordonnées du pied de cette perpendiculaire.

RÉPONSE. $y - y' = \tang\alpha(x - x')$,

$x' + \cos\alpha(p - x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)$, $y' + \sin\alpha(p - x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)$.

X. Trouver la longueur de cette perpendiculaire.

RÉPONSE. $\pm(p - x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)$.

33. *Trouver en coordonnées rectangulaires l'équation d'une droite passant par un point donné (x', y'), et faisant un angle φ avec la droite $y = mx + b$.*

Soit

$$y - y' = m(x - x')$$

l'équation cherchée, nous aurons (n° 25)

$$\tang\varphi = \frac{m - m'}{1 + mm'},$$

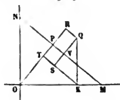
d'où

$$m' = \frac{m - \tang\varphi}{1 + m\tang\varphi}.$$

34. *Trouver la distance d'un point (x', y') à une droite $x\cos\alpha + y\cos\beta = p$.*

Nous avons déjà indiqué (n° 32, Ex. IX et X) un procédé pour résoudre cette question, mais on peut, à l'aide de la géométrie, arriver au même résultat. Soient MN (*fig.* 19) la

Fig. 19.



droite donnée, OR la perpendiculaire abaissée de l'origine sur cette droite, QK l'ordonnée du point donné Q.

Menons QR et KT parallèles, et QS perpendiculaire à la droite donnée. Alors

$$OK = x', \quad OT = x' \cos\alpha;$$

mais

$$SQK = \beta \quad \text{et} \quad QK = y',$$

donc

$$RT = QS = y' \cos\beta,$$

par suite

$$x' \cos\alpha + y' \cos\beta = OR.$$

Retranchant de chaque membre la distance OP de l'origine à la droite, on aura, pour la distance cherchée,

$$x' \cos\alpha + y' \cos\beta - p = PR = QV.$$

Si l'on avait pris dans la figure le point Q du même côté de la droite que l'origine, OR aurait été plus petit que OP, et on aurait trouvé $p - x' \cos\alpha - y' \cos\beta$ pour la valeur de la distance cherchée; cette distance change donc de signe suivant que le point se trouve situé d'un côté ou de l'autre de la droite. Lorsqu'il ne s'agit que d'une seule distance, on peut ne considérer que sa valeur absolue, abstraction faite du signe; mais quand on a à comparer les distances de deux points, tels que Q et S, il faut nécessairement (n° 6) tenir compte des signes de ces distances QV et SV, puisqu'elles se trouvent mesurées suivant des directions opposées. Le sens positif étant en soi arbitraire, on peut prendre, pour représenter la distance d'un point à une droite, l'expression $(p - x' \cos\alpha - y' \cos\beta)$, soit avec le signe +, soit avec le signe —. En la prenant avec le signe +, autrement dit en supposant le terme constant positif, on considère comme positives les distances des points situés du même côté de la droite que l'origine, et comme négatives les distances des points qui se trouvent de l'autre côté. Si l'on prenait l'expression avec le signe —, ce serait l'inverse qui arriverait.

Si l'équation de la droite est

$$Ax + By + C = 0,$$

en la ramenant à la forme

$$x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0,$$

on trouve pour la distance du point (x', y') à cette droite

$$\frac{Ax' + By' + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad \text{ou} \quad \frac{(Ax' + By' + C)\sin\omega}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\omega}},$$

suivant que les axes sont rectangulaires, ou obliques sous l'angle ω. En comparant les distances respectives du point (x', y') et de l'origine à la droite, on voit que le point (x', y') se trouve du même côté de la droite que l'origine lorsque $Ax' + By' + C$ a le même signe que C, et inversement.

La condition nécessaire pour qu'un point (x', y') se trouve sur une droite $Ax + By + C = 0$ s'obtient évidemment en exprimant que ses coordonnées x' et y' satisfont à cette équation, ce qui donne

$$Ax' + By' + C = 0.$$

Cette condition n'est donc, d'après ce qui précède, que la traduction algébrique de ce fait : que la distance du point à la droite est nulle.

EXERCICES.

I. Trouver la distance de l'origine à la droite $3x + 4y + 20 = 0$, les axes étant rectangulaires.

Réponse. 4.

II. Trouver la distance du point (2, 3) à la droite $2x + y - 4 = 0$.

Réponse. $\frac{3}{\sqrt{5}}$; le point est situé du côté opposé à celui de l'origine.

III. Trouver les hauteurs du triangle (2, 1), (3, − 2), (− 4, − 1).

Réponse. $2\sqrt{2}$, $\sqrt{10}$, $2\sqrt{10}$. L'origine est à l'intérieur du triangle.

IV. Trouver la distance de (3, − 4) à $4x + 2y - 7 = 0$, l'angle des axes étant de 60 degrés.

Réponse. $\frac{3}{4}$; le point est du même côté que l'origine.

V. Trouver la distance de l'origine à la droite

$$a(x-a)+b(y-b)=0.$$

RÉPONSE. $\sqrt{a^2+b^2}$.

35. *Trouver l'équation de la bissectrice de l'angle compris entre les deux droites*

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0,$$
$$x\cos\beta+y\sin\beta-p'=0.$$

Le moyen le plus simple pour trouver cette équation consiste à exprimer algébriquement cette propriété connue : « Les points de la bissectrice d'un angle sont à égale distance des côtés de cet angle. » Nous avons alors immédiatement l'équation

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=\pm(x\cos\beta+y\sin\beta-p'),$$

puisque chacun de ses membres exprime la distance d'un de ces points à une des droites (n° 34).

Si les équations des droites étaient données sous la forme $Ax+By+C=0$, $A'x+B'y+C'=0$, on trouverait pour l'équation de la bissectrice

$$\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}=\pm\frac{A'x+B'y+C'}{\sqrt{A'^2+B'^2}}.$$

Le double signe montre qu'il y a deux bissectrices. Les points de la première sont à égale distance d'une des droites, dans la région que nous considérons comme positive, et de l'autre droite dans sa région négative ; les points de la deuxième sont à égale distance des deux droites prises dans leurs régions positives ou dans leurs régions négatives.

En prenant le signe de telle façon que les deux termes constants soient de même signe, on a (n° 34) la bissectrice de l'angle dans lequel se trouve l'origine; en donnant aux deux termes constants des signes contraires, on obtient la bissectrice de l'angle supplémentaire.

EXERCICES.

I. Ramener les équations des bissectrices des angles formés par les deux droites de l'énoncé du n° 35 à la forme $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$.

Réponse.

$$x\cos\left[\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+90^\circ\right]+y\sin\left[\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+90^\circ\right]=\frac{p-p'}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)};$$

$$x\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+y\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=\frac{p+p'}{2\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}.$$

II. Trouver les équations des bissectrices des angles formés par les droites

$$3x+4y-9=0,\quad 12x+5y-3=0.$$

Réponse. $7x-9y+34=0,\quad 9x+7y=12.$

36. *Trouver l'aire du triangle formé par les trois points* (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3).

Le double de l'aire de ce triangle peut s'obtenir, en multipliant la longueur de la droite joignant deux de ces points (x_1, y_1), (x_2, y_2) par la distance du troisième point (x_3, y_3) à cette ligne. Cette distance lorsque les axes sont rectangulaires, est égale (nos 29, 34) à

$$\frac{(y_1-y_2)x_3-(x_1-x_2)y_3+x_1y_2-x_2y_1}{\sqrt{(y_1-y_2)^2+(x_1-x_2)^2}},$$

et comme le dénominateur de cette fraction exprime la longueur de la ligne joignant (x_1, y_1) à (x_2, y_2), la quantité

$$y_1(x_2-x_3)+y_2(x_3-x_1)+y_3(x_1-x_2)$$

représente le double de l'aire du triangle formé par les trois points.

Nous trouverions, en répétant le même raisonnement et en employant les formules relatives aux axes obliques, que, dans le cas de deux axes faisant entre eux un angle ω, il suffit de multiplier l'expression précédente par $\sin\omega$.

A la rigueur nous devrions faire précéder cette expression

du double signe, puisque nous l'obtenons en extrayant une racine carrée. Dans le cas où il n'y a qu'une seule aire à considérer, et où par suite il ne saurait être question que de grandeur absolue, c'est chose inutile. Mais il n'en est plus de même lorsqu'on a à évaluer deux triangles dont les sommets (x_3, y_3), (x_4, y_4) ne se trouvent pas du même côté de la droite joignant (x_1, y_1), (x_2, y_2), et qui sert de base commune aux deux triangles; il faut alors donner des signes différents aux aires de ces triangles, et la surface du quadrilatère formé par ces quatre points est la somme, et non la différence, de ces deux triangles.

Corollaire I. — Le double de l'aire du triangle formé par les points (x_1, y_1), (x_2, y_2) et l'origine s'obtient en faisant $x_3 = 0$, $y_3 = 0$ dans l'expression précédente et a pour valeur $y_1 x_2 - y_2 x_1$.

Corollaire II. — Considérée au point de vue géométrique, la condition (n° 30) pour que trois points soient en ligne droite exprime que l'aire du triangle formé par ces trois points est nulle.

37. *Exprimer l'aire d'un polygone en fonction des coordonnées de ses sommets.*

Joignons un point quelconque (x, y), pris dans l'intérieur du polygone à tous les sommets (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), ..., nous diviserons ainsi le polygone en un certain nombre de triangles, et la somme des aires de ces triangles sera évidemment égale à l'aire du polygone. Le double de l'aire de chaque triangle est (n° 36) respectivement

$$x(y_1 - y_2) - y(x_1 - x_2) + x_1 y_2 + x_2 y_1,$$
$$x(y_2 - y_3) - y(x_2 - x_3) + x_2 y_3 - x_3 y_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x(y_{n-1} - y_n) - y(x_{n-1} - x_n) + x_{n-1} y_n - x_n y_{n-1},$$
$$x(y_n - y_1) - y(x_n - x_1) + x_n y_1 - x_1 y_n.$$

Ajoutant toutes ces valeurs, et observant que la somme des facteurs de x ou de y est nulle (ainsi que cela doit être, puisque l'aire du polygone est indépendante de la manière dont

elle a été divisée en triangles), on trouve pour le double de l'aire du polygone

$$(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + \ldots$$
$$+ (x_{n-1}y_n - x_ny_{n-1}) + (x_ny_1 - x_1y_n),$$

expression qui peut s'écrire

$$x_1(y_2 - y_n) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_4 - y_2) + \ldots + x_n(y_1 - y_{n-1}),$$

ou bien encore

$$y_1(x_n - x_2) + y_2(x_1 - x_3) + y_3(x_2 - x_4) + \ldots + y_n(x_{n-1} - x_1).$$

EXERCICES.

I. Trouver l'aire du triangle (2, 1), (3, − 2), (− 4, − 1).

Réponse. 10.

II. Trouver l'aire du triangle (2, 3), (4, − 5), (− 3, − 6).

Réponse. 29.

III. Trouver l'aire du quadrilatère (1, 1), (2, 3), (3, 3), (4, 1).

Réponse. 4.

38. *Trouver la condition pour que trois droites concourent en un même point.*

Soient

$$Ax + By + C = 0, \quad A'x + B'y + C' = 0, \quad A''x + B''y + C'' = 0$$

les équations de ces droites.

Si elles se coupent en un même point, les coordonnées de l'intersection de deux d'entre elles doivent satisfaire à la troisième équation.

Les coordonnées de l'intersection des deux premières sont

$$\frac{BC' - B'C}{AB' - A'B}, \quad \frac{CA' - C'A}{AB' - A'B};$$

et en les substituant dans la troisième équation, on trouve

$$A''(BC' - B'C) + B''(CA' - C'A) + C''(AB' - A'B) = 0;$$

cette condition peut encore s'écrire des deux manières sui-

vantes

$$A(B'C''-B''C')+B(C'A''-C''A')+C(A'B''-A''B')=0,$$
$$A(B'C''-B''C')+A'(B''C-BC'')+A''(BC'-B'C)=0.$$

*39. *Trouver l'aire du triangle formé par les trois droites*

$$Ax+By+C=0,\quad A'x+B'y+C'=0,\quad A''x+B''y+C''=0.$$

Les coordonnées des sommets du triangle s'obtiendront en éliminant successivement x et y entre ces équations prises deux à deux. En substituant leurs valeurs dans la formule du n° 36, on trouve pour le double de l'aire

$$\frac{BC'-B'C}{AB'-BA'}\left(\frac{A'C''-C'A''}{B'A''-A'B''}-\frac{A''C-C''A}{B''A-A''B}\right)$$
$$+\frac{B'C''-B''C'}{A'B''-B'A''}\left(\frac{A''C-C''A}{B''A-A''B}-\frac{AC-CA'}{BA'-AB'}\right)$$
$$+\frac{B''C-BC''}{A''B-B''A}\left(\frac{AC'-C'A}{BA'-AB'}-\frac{A'C''-C'A''}{B'A''-A'B''}\right).$$

Si l'on réduit, dans chacune des parenthèses, les deux fractions qu'elles comprennent au même dénominateur, on obtient une série de fractions ayant pour numérateurs la quantité

$$A''(BC'-B'C)+A(B'C''-B''C')+A'(B''C-C''B),$$

multipliée respectivement par A'', A et A', et il vient pour le double de l'aire

$$\frac{[A(B'C''-B''C')+A'(B''C-BC'')+A''(BC'-B'C)]^2}{(AB'-BA')(A'B''-B'A'')(A''B-B''A)}.$$

Si les trois droites sont concourantes, cette expression s'annule (n° 38); si deux des droites sont parallèles, elle devient infinie (n° 25).

40. *Trouver l'équation d'une droite passant par l'intersection de deux droites données.*

On peut résoudre cette question en substituant à x' et y' dans l'équation $y - y' = m(x - x')$ du n° 28, les coordonnées de l'intersection des deux droites, déterminées d'après le n° 31. Mais on arrive plus facilement au résultat en s'appuyant sur le principe suivant, qui est d'une grande importance.

Si $S = 0$, $S' = 0$ *sont les équations de deux lieux, le lieu représenté par l'équation* $S + kS' = 0$ (*dans laquelle* k *est une constante*) *passe par les points communs aux deux premiers.*

Il est évident, en effet, que tout couple de coordonnées qui satisfera à la fois aux équations $S = 0$, $S' = 0$ satisfera aussi à l'équation $S + kS' = 0$.

Il résulte de là que l'équation

$$(Ax + By + C) + k(A'x + B'y + C') = 0,$$

qui est du premier degré, représente une droite passant par l'intersection des deux droites

$$Ax + By + C = 0, \quad A'x + B'y + C' = 0.$$

Les coordonnées du point d'intersection de ces deux droites satisfont évidemment à l'équation

$$(Ax + By + C) + k(A'x + B'y + C') = 0,$$

puisqu'elles annulent séparément chacune des deux parties de cette équation.

EXERCICES.

I. Trouver l'équation de la droite joignant à l'origine l'intersection de

$$Ax + By + C = 0, \quad A'x + B'y + C' = 0.$$

Réponse. Multipliant la première équation par C', la seconde par C, et soustrayant, on obtient l'équation cherchée

$$(AC' - A'C)x + (BC' - CB')y = 0.$$

La droite qu'elle représente passe en effet par l'origine (n° 18) et par l'intersection des deux droites (n° 40).

II. Trouver l'équation de la droite menée par l'intersection de ces deux mêmes droites parallèlement à l'axe des x.

Réponse. $(BA' - AB')y + CA' - AC' = 0.$

III. Trouver l'équation de la droite passant par le point d'intersection de ces deux mêmes droites et par le point (x', y').

RÉPONSE. Déterminant dans l'équation générale donnée ci-dessus la constante k, de manière que cette équation soit satisfaite par x', y', on trouve pour l'équation cherchée

$$(Ax + By + C)(A'x' + B'y' + C') = (A'x + B'y + C')(Ax' + By' + C).$$

IV. Trouver l'équation de la droite joignant le point $(2, 3)$ à l'intersection des deux droites $2x + 3y + 1 = 0$, $3x - 4y = 5$.

RÉPONSE.

$$11(2x + 3y + 1) + 14(3x - 4y - 5) = 0, \quad \text{ou} \quad 64x - 23y = 59.$$

41. Le principe établi au numéro précédent donne, pour reconnaître si trois droites se coupent en un même point, un criterium souvent plus commode dans la pratique que celui du n° 34 :

Trois droites $Ax + By + C = 0$, $A'x + B'y + C' = 0$, $A''x + B''y + C'' = 0$ *passent par un même point, lorsque la somme de leurs équations multipliées respectivement par une constante est identiquement nulle*, c'est-à-dire si la relation suivante, dans laquelle l, m, n représentent trois constantes, est vraie, quels que soient x et y,

$$l(Ax + By + C) + m(A'x + B'y + C') + n(A''x + B''y + C'') = 0.$$

Car alors les valeurs des coordonnées qui annulent séparément les deux premiers termes de l'équation annulent aussi le troisième.

EXERCICES.

I. Les trois médianes d'un triangle se coupent en un même point. Leurs équations sont (29, Ex. IV)

$$\begin{aligned}
&(y'' + y''' - 2y')x - (x'' + x''' - 2x')y \\
&\quad + (x''y' - y''x') + (x'''y' - y'''x') = 0, \\
&(y''' + y' - 2y'')x - (x''' + x' - 2x'')y \\
&\quad + (x'''y'' - y'''x'') + (x'y'' - y'x'') = 0, \\
&(y' + y'' - 2y''')x - (x' + x'' - 2x''')y \\
&\quad + (x'y''' - y'x''') + (x''y''' - y''x''') = 0.
\end{aligned}$$

La somme de ces équations est identiquement nulle, les droites qu'elles représentent se coupent donc en un seul point, dont les coordonnées sont

$$\frac{1}{3}(x'+x''+x'''),\quad \frac{1}{3}(y'+y''+y''').$$

II. Démontrer le même théorème en prenant pour axes les deux côtés du triangle dont les longueurs sont a et b.

Réponse. $\frac{2x}{a}+\frac{y}{b}-1=0,\quad \frac{x}{a}+\frac{2y}{b}-1=0,\quad \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0.$

III. Les hauteurs d'un triangle se coupent en un même point. Il en est de même des perpendiculaires élevées sur le milieu des côtés.

La somme des équations (n° 32, Ex. V, VI) est identiquement nulle.

IV. Les bissectrices des angles d'un triangle se coupent en un même point.

Elles ont, en effet, pour équations,

$$(x\cos\alpha+y\sin\alpha-p)-(x\cos\beta+y\sin\beta-p')=0,$$
$$(x\cos\beta+y\sin\beta-p')-(x\cos\gamma+y\sin\gamma-p'')=0,$$
$$(x\cos\gamma+y\sin\beta-p'')-(x\cos\alpha+y\sin\alpha-p)=0.$$

*42. *Trouver les coordonnées de l'intersection de la droite joignant les points* (x', y'), (x'', y'') *avec la droite* $Ax+By+C=0$.

Le but de ce problème est d'exposer une méthode (que nous aurons souvent occasion d'employer dans la suite) pour déterminer le point où un lieu donné rencontre la droite joignant deux points donnés. Nous savons (n° 7) que les coordonnées d'un point de la droite passant par ces points peuvent s'exprimer par les formules

$$x=\frac{mx''+nx'}{m+n},\quad y=\frac{my''+ny'}{m+n}.$$

Nous prendrons pour inconnue le rapport $\frac{m}{n}$ des segments déterminés par le lieu sur la droite joignant les deux points, et nous en chercherons la valeur en exprimant que les coordonnées ci-dessus satisfont à l'équation du lieu. Ainsi dans le

cas actuel nous aurons

$$A\frac{mx''+nx'}{m+n}+B\frac{my''+ny'}{m+n}+C=0,$$

d'où

$$\frac{m}{n}=-\frac{Ax'+By'+C}{Ax''+By''+C},$$

l'ordonnée du point cherché sera donc

$$x=\frac{(Ax'+By'+C)x''-(Ax''+By''+C)x'}{(Ax'+By'+C)-(Ax''+By''+C)},$$

et l'on aura une expression analogue pour l'abscisse. La valeur du rapport $\frac{m}{n}$ peut s'obtenir géométriquement, en remarquant que le rapport des segments de la ligne joignant (x', y'), (x'', y'') est égal à celui des distances de ces points à la droite donnée. Ces distances sont (n° 34)

$$\frac{Ax'+By'+C}{\sqrt{A^2+B^2}}, \quad \frac{Ax''+By''+C}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Le signe — qui se trouve dans l'expression de $\frac{m}{n}$ donnée plus haut tient à ce que, dans le cas de la section intérieure auquel correspond le signe + pour le rapport $\frac{m}{n}$ (n° 7), les points (x', y'), (x'', y'') ne se trouvent pas du même côté de la droite, et que par suite les distances de ces points à la droite doivent être de signes contraires (n° 34).

Nous pouvons dès lors démontrer facilement le théorème suivant :

Si une droite coupe les côtés d'un triangle BC, CA, AB (*fig.* 20) *aux points* L, M, N, *on aura la relation*

$$\frac{BL \cdot CM \cdot AN}{CL \cdot AM \cdot BN}=-1.$$

Désignons les coordonnées des sommets par (x', y'), (x'', y''),

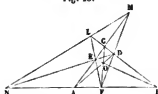
(x''', y'''); nous aurons

$$\frac{\mathrm{BL}}{\mathrm{CL}} = -\frac{\mathrm{A}x'' + \mathrm{B}y'' + \mathrm{C}}{\mathrm{A}x''' + \mathrm{B}y''' + \mathrm{C}},$$

$$\frac{\mathrm{CM}}{\mathrm{AN}} = -\frac{\mathrm{A}x''' + \mathrm{B}y''' + \mathrm{C}}{\mathrm{A}x' + \mathrm{B}y' + \mathrm{C}},$$

$$\frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{BN}} = -\frac{\mathrm{A}x' + \mathrm{B}y' + \mathrm{C}}{\mathrm{A}x'' + \mathrm{B}y'' + \mathrm{C}}.$$

Fig. 20.



Le théorème est dès lors évident.

*43. *Trouver le rapport dans lequel la droite joignant les deux points* (x_1, y_1), (x_2, y_2) *est coupée par la droite passant par les deux autres points* (x_3, y_3), (x_4, y_4).

L'équation de cette dernière ligne est (n° 29)

$$(y_3 - y_4)x - (x_3 - x_4)y + x_3 y_4 - x_4 y_3 = 0;$$

donc, d'après le numéro précédent,

$$\frac{m}{n} = -\frac{(y_3 - y_4)x_1 - (x_3 - x_4)y_1 + x_3 y_4 - x_4 y_3}{(y_3 - y_4)x_2 - (x_3 - x_4)y_2 + x_3 y_4 - x_4 y_3}.$$

Il est à remarquer (n° 36) que ce rapport est égal à celui des surfaces des triangles ayant pour sommets (x_1, y_1), (x_3, y_3), (x_4, y_4) et (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) : ce qui, d'ailleurs, est évident au point de vue géométrique.

Comme application nous pouvons établir le théorème suivant :

Si les droites joignant un point donné aux sommets A, B *et* C *d'un triangle coupent les côtés opposés à ces sommets* BC

CA, AB *aux points* D, E, F, *on aura la relation*

$$\frac{\mathrm{BD}\,.\,\mathrm{CE}\,.\,\mathrm{AF}}{\mathrm{DC}\,.\,\mathrm{EA}\,.\,\mathrm{FB}} = +1.$$

Soient en effet (x_4, y_4) le point donné, et (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) les sommets du triangle, on aura

$$\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}} = \frac{x_1(y_2-y_4)+x_2(y_4-y_1)+x_4(y_1-y_2)}{x_1(y_4-y_3)+x_4(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_4)},$$

$$\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}} = \frac{x_2(y_3-y_4)+x_3(y_4-y_2)+x_4(y_2-y_3)}{x_1(y_2-y_4)+x_2(y_4-y_1)+x_4(y_1-y_2)},$$

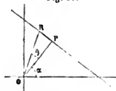
$$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}} = \frac{x_1(y_4-y_3)+x_4(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_4)}{x_2(y_3-y_4)+x_3(y_4-y_2)+x_4(y_2-y_3)};$$

ce qui démontre le théorème.

44. *Équation de la ligne droite en coordonnées polaires.*

Prenons pour axe fixe la perpendiculaire à la droite, et soit OR (*fig.* 21) un rayon vecteur quelconque mené du pôle O

Fig. 21.



à la droite donnée PR. Posons

$$\mathrm{OR} = \rho, \quad \widehat{\mathrm{ROP}} = \theta.$$

Mais

$$\mathrm{OR}\cos\theta = \mathrm{OP}.$$

L'équation de la droite est donc

$$\rho\cos\theta = p.$$

Dans le cas où l'axe fixe fait un angle α avec la perpendiculaire, elle devient

$$\rho\cos(\theta-\alpha) = p.$$

Cette équation peut aussi s'obtenir en transformant l'équa-

tion du n° 23

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p.$$

En y remplaçant x par $\rho\cos\theta$, et y par $\rho\sin\theta$ (n° 12), on obtient

$$\rho(\cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha) = p,$$

ce qui revient à

$$\rho\cos(\theta - \alpha) = p.$$

Une équation de la forme

$$\rho(A\cos\theta + B\sin\theta) = C$$

peut (n° 23) se ramener à la forme $\rho\cos(\theta - \alpha) = p$; car, en la divisant par $\sqrt{A^2 + B^2}$, on peut poser

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}, \quad p = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

EXERCICES.

I. Ramener à des coordonnées rectangulaires l'équation

$$\rho = 2a\,\text{séc}\left(\theta + \frac{\varpi}{6}\right).$$

RÉPONSE. $x\cos\frac{\varpi}{6} - y\sin\frac{\varpi}{6} = 2a.$

II. Trouver les coordonnées polaires de l'intersection des deux droites

$$\rho\cos\left(\theta - \frac{\varpi}{2}\right) = 2a, \quad \rho\cos\left(\theta - \frac{\varpi}{6}\right) = a,$$

et l'angle ω qu'elles forment entre elles.

RÉPONSE. $\rho = 2a,\quad \theta = \frac{\varpi}{2},\quad \omega = \frac{\varpi}{3}.$

III. Trouver l'équation polaire de la droite passant par les deux points dont les coordonnées polaires sont (ρ', θ'), (ρ'', θ'').

RÉPONSE. $\rho'\rho''\sin(\theta' - \theta'') + \rho''\rho\sin(\theta'' - \theta) + \rho\rho'\sin(\theta - \theta') = 0.$

CHAPITRE III.

PROBLÈMES SUR LA LIGNE DROITE.

45. Après avoir, dans le dernier Chapitre, exposé les principes qui permettent d'exprimer algébriquement la position d'un point ou d'une droite, nous allons donner quelques exemples de leur application à la solution des problèmes de géométrie. Nous recommanderons d'étudier avec soin ces questions, jusqu'à ce qu'on ait acquis habitude et facilité dans l'emploi de ces principes. Généralement les équations auxquelles nous serons conduit pourront être simplifiées par un choix judicieux des axes de coordonnées, puisque, en choisissant pour axes deux des lignes les plus remarquables de la figure, nous serons amené à des expressions plus simples. Cependant, il arrivera quelquefois que, en prenant des axes indépendants de la figure, les équations gagneront en symétrie plus qu'elles n'auront perdu en simplicité. Il suffit, pour s'en convaincre, de comparer les deux solutions que nous avons données de la même question (n° 41, Ex. I et II). La première est la plus longue, mais elle présente cet avantage que, l'équation d'une des médianes étant déterminée, on peut écrire immédiatement les autres sans faire de nouveaux calculs.

L'emploi des coordonnées obliques conduisant à des expressions assez compliquées dans les questions relatives aux angles, il sera presque toujours préférable de se servir dans ce cas de coordonnées rectangulaires.

46. *Lieux géométriques.* — La géométrie analytique se prête avec une facilité toute particulière à la recherche des lieux géométriques. Il suffit, en effet, de déterminer les conditions auxquelles les données de la question assujettissent les coordonnées du point dont on veut trouver le lieu géomé-

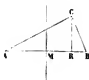
trique : la traduction algébrique de ces conditions donne immédiatement l'équation du lieu cherché.

EXERCICES.

I. On donne la base AB et la différence m^2 des carrés des côtés AC, CB d'un triangle ABC; trouver le lieu du sommet C.

Prenons la base du triangle pour axe des x, et la perpendiculaire élevée sur le milieu de cette base pour axe des y. Désignons par c (*fig.* 22) la moitié de la base, et par x, y les coordonnées du sommet.

Fig. 22.



Nous aurons alors

$$\overline{AC}^2 = y^2 + (c+x)^2 \ (*), \quad \overline{BC}^2 = y^2 + (c-x)^2,$$
$$\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = 4cx.$$

L'équation du lieu est donc $4cx = m^2$. Elle représente une perpendiculaire élevée à la base du triangle en un point distant du milieu de cette base de la quantité $x = \frac{m^2}{4c}$. Il est facile de voir que la différence des carrés des segments que ce point détermine sur la base est égale à la différence des carrés des côtés.

II. On donne la base AB et la quantité $\cot A + m \cot B = p$ (*fig.* 22); trouver le lieu du sommet.

(*) On fait quelquefois le raisonnement suivant : la ligne AR se compose de deux parties $AM = -c$ et $MR = x$, sa longueur est $-c + x$ et non pas $c + x$; donc $\overline{AC}^2 = y^2 + (x-c)^2$. Mais on doit observer que le signe d'une longueur ne dépend pas du côté de l'origine où elle se trouve, mais bien du sens suivant lequel elle est mesurée. Nous allons de A à R dans le sens positif, en prenant d'abord dans cette direction $AM = c$, puis ensuite $MR = x$; donc $AR = c + x$. Pour aller de R à B, nous suivons d'abord le sens négatif en prenant $RM = -x$; puis, revenant en sens contraire, nous prenons $MB = c$; donc $RB = c - x$.

Il est évident, d'après la figure, que

$$\cot A = \frac{AR}{CR} = \frac{c+x}{y}, \quad \cot B = \frac{c-x}{y}.$$

L'équation cherchée est donc

$$c + x + m(c - x) = py.$$

Elle représente une ligne droite.

III. On donne la base AB et la somme m des deux autres côtés du triangle (*fig.* 22); on prolonge la hauteur RC au delà du sommet C de telle sorte, qu'elle devienne égale à un des côtés : trouver le lieu des extrémités de la hauteur ainsi prolongée.

Prenons les mêmes axes et cherchons la relation qui existe entre les coordonnées du point dont on demande le lieu. L'ordonnée de ce point est évidemment MR, et son abscisse est, par hypothèse, égale à AC; on aura donc

$$BC = m - y;$$

mais

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB} + \overline{AC}^2 - 2AB.AR,$$

ou

$$(m - y)^2 = 4c^2 + y^2 - 4c(c + x),$$

et en réduisant,

$$2my - 4cx = m^2,$$

équation d'une ligne droite.

IV. Deux droites fixes OA, OB sont coupées par une parallèle à une troisième droite fixe OC; trouver le lieu des points P qui partagent les droites AB dans un rapport donné, c'est-à-dire tel que $PA = n AB$.

Prenons OA et OC pour axes (*fig.* 23); soit $y = mx$ l'équation de OB.

Fig. 23.



Puisque le point B se trouve sur cette droite, nous aurons

$$AB = m.OA,$$

donc

$$AP = m.n.OA.$$

Mais AP est l'ordonnée y du point P, OA en est l'abscisse x; le lieu du point P est donc une droite passant par l'origine et ayant pour équation

$$y = mnx.$$

V. La droite PA, parallèle à OC, comme ci-dessus, rencontre un certain nombre de droites fixes aux points B, B', B'',..., on prend PA proportionnel à la somme des ordonnées BA, B'A,...; trouver le lieu des points P.

Réponse. Les équations des droites fixes étant

$$y = mx,\quad y = m'x + n',\quad y = m''x + n'',\ldots,$$

celle du lieu sera

$$ky = mx + (m'x + n') + (m''x + n'') + \ldots.$$

VI. On donne les côtés a, b, c,... et la somme m^2 des aires d'un certain nombre de triangles ayant le sommet, opposé à ces côtés, commun; trouver le lieu de ce sommet.

Soient a, b, c les longueurs des côtés, et

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0,\quad x\cos\beta + y\sin\beta - p' = 0,\ldots;$$

leurs équations. Puisque (n° 34) $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p$ représente la distance du sommet (x, y) à la première droite, $a(x\cos\alpha + y\sin\alpha - p)$ sera le double de l'aire du premier triangle, etc. L'équation du lieu sera

$$a(x\cos\alpha + y\sin\alpha - p) + b(x\cos\beta + y\sin\beta - p') + \ldots = 2m^2;$$

et comme elle ne contient x et y qu'au premier degré, elle représente une droite.

VII. On donne un angle O d'un triangle (*fig.* 24) et la somme des côtés qui le comprennent; trouver le lieu du point P où le côté opposé à cet angle est partagé dans un rapport donné.

Prenons pour axes les côtés qui comprennent l'angle; soit $\frac{m}{n} = \frac{PL}{PK}$ le

Fig. 24.



rapport donné. Nous déduirons de la similitude des triangles

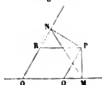
$$OK = \frac{(m+n)x}{m},\quad OL = \frac{(m+n)y}{n}.$$

Le lieu cherché est par suite une droite ayant pour équation

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = \frac{s}{m+n}.$$

VIII. D'un point P on abaisse des perpendiculaires PM, PN sur deux

Fig. 25.



droites fixes OM, ON (*fig.* 25); trouver le lieu du point P, tel que

$$OM + ON = \text{const.}$$

Prenant les droites fixes pour axes, on a évidemment

$$OM = x + y\cos\omega, \quad ON = y + x\cos\omega;$$

l'équation du lieu est donc

$$x + y = \text{const.}$$

IX. Trouver le lieu du point P dans le cas où MN est parallele à une droite fixe.

Réponse. $\qquad y + x\cos\omega = m(x + y\cos\omega).$

X. Trouver le lieu du point P dans le cas où MN est divisé en deux parties égales (ou dans un rapport donné) par la droite $y = mx + n$.

Les coordonnées du point milieu de la droite MN, exprimées en fonction des coordonnées x et y du point P, sont

$$\frac{1}{2}(x + y\cos\omega), \quad \frac{1}{2}(y + x\cos\omega),$$

et puisqu'elles satisfont à l'équation de la droite, les coordonnées du point P satisferont à l'équation

$$y + x\cos\omega = m(x + y\cos\omega) + 2n.$$

XI. Le point P glisse le long d'une droite $y = mx + n$, trouver le lieu du point milieu de MN. Si α et β sont les coordonnées du point P, x et y celles du point milieu, on a

$$2x = \alpha + \beta\cos\omega, \quad 2y = \beta + \alpha\cos\omega;$$

d'où

$$\alpha \sin^2\omega = 2x - 2y\cos\omega,\quad \beta\sin^2\omega = 2y - 2x\cos\omega.$$

Mais α et β sont liés par la relation

$$\beta = m\alpha + n,$$

donc

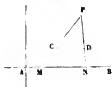
$$2y - 2x\cos\omega = m(2x - 2y\cos\omega) + n\sin^2\omega.$$

47. On représente habituellement par x et y les coordonnées du point dont on cherche le lieu, et par des lettres accentuées celles des points fixes, comme nous l'avons fait dans les problèmes précédents. Mais il arrive souvent que, dans la recherche d'un lieu, on est obligé d'écrire les équations de certaines lignes liées à cette recherche; de là une confusion possible entre les coordonnées courantes x et y d'une de ces lignes et celles x et y du point dont on demande le lieu. Il est alors plus commode de représenter les coordonnées de ce point par d'autres lettres, telles que α et β, jusqu'à ce qu'on soit arrivé à la relation qui doit exister entre elles. Une fois l'équation du lieu trouvée, rien n'empêche d'y remplacer α et β par x et y, de manière à la ramener à la forme habituelle où x et y représentent les coordonnées courantes.

EXERCICES.

I. On donne la base CD d'un triangle (*fig.* 26) et le rapport AM : NB des segments que les prolongements des côtés déterminent sur une parallèle AB à la base; trouver le lieu du sommet.

Fig. 26.



Prenons pour axes la droite AB et la perpendiculaire élevée au point A, et exprimons AM, NB, en fonction des coordonnées α, β, du point P. Soit x, x', y, y', les coordonnées de C, D. (Ces points ont même ordonnée, puisqu'ils sont sur une parallèle CD à AB.) L'équation de la droite PC, qui

joint les points (α, β), (x', y'), est (n° 29)

$$(\beta - y')x - (\alpha - x')y = \beta x' - \alpha y'.$$

Cette équation étant satisfaite par les coordonnées de tous les points de PC le sera par celles du point M ($y = 0$, $x = AM$); on aura donc, en faisant $y = 0$,

$$AM = \frac{\beta x' - \alpha y'}{\beta - y'}.$$

On trouverait de même

$$AN = \frac{\beta x'' - \alpha y'}{\beta - y'}.$$

Et si $AB = c$, la relation $AM = k.BN$ devient

$$\frac{\beta x' - \alpha y'}{\alpha - y'} = k\left(c - \frac{\beta x'' - \alpha y'}{\beta - y'}\right).$$

On a exprimé ainsi les conditions du problème en fonction des coordonnées du point P; toute confusion étant devenue impossible, on peut remplacer α et β par x et y, et on trouve, en chassant les dénominateurs, pour l'équation du lieu,

$$yx' - xy' = k[c(y - y') - (yx'' - xy')].$$

II. Deux sommets du triangle ABC (*fig.* 27) glissent sur deux droites

Fig. 27.



fixes LM et LN, tandis que les trois côtés passent par trois points fixes O, P, Q, situés en ligne droite; trouver le lieu du troisième sommet.

Prenons pour axe des x la droite OP contenant les trois points fixes, et pour axe des y la ligne OL joignant l'intersection des deux droites fixes au point O. Désignons par α, β les coordonnées du point C, et soit

$$OL = b, \quad OM = a, \quad ON = a', \quad OP = c, \quad OQ = c'.$$

Les équations de LM et LN sont évidemment

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad \frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} = 1.$$

L'équation de CP, qui passe par (α, β) et P ou $(y = 0, x = c)$, est

$$(\alpha - c)y - \beta x + \beta c = 0.$$

Les coordonnées de l'intersection A de cette droite avec

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

seront

$$x_1 = \frac{ab(\alpha - c) + ac\beta}{b(\alpha - c) + a\beta}, \quad y_1 = \frac{b(a - c)\beta}{b(\alpha - c) + a\beta}.$$

Celles de B s'obtiendront en accentuant les lettres des précédentes

$$x_2 = \frac{a'b(\alpha - c') + a'c'\beta}{b(\alpha - c') + a'\beta}, \quad y_2 = \frac{b(a' - c')\beta}{b(\alpha - c') + a'\beta}.$$

La condition pour que les deux points (x_1, y_1), (x_2, y_2) se trouvent sur une droite passant par l'origine est (n° 30) : $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$; on aura donc

$$\frac{b(a - c)\beta}{ab(\alpha - c) + ac\beta} = \frac{b(a' - c')\beta}{a'b(\alpha - c') + a'c'\beta}.$$

Nous avons ainsi déduit des conditions du problème une relation qui doit être satisfaite par les coordonnées α, β, du point C; en y remplaçant α, β, par x, y, nous aurons l'équation du lieu sous la forme ordinaire. Chassant les dénominateurs, on trouve

$$(a - c)[a'b(x - c') + a'c'y] = (a' - c')[ab(x - c) + acy],$$

ce qui revient à

$$\frac{(ac' - a'c)x}{cc'(a - a') - aa'(c - c')} + \frac{y}{b} = 1,$$

équation d'une droite passant par le point L.

III. Les points P et Q du problème précédent sont sur une droite passant, non plus par le point O, mais par le point L; trouver le lieu du sommet.

Nous traiterons d'abord le cas où les points P et Q ont une position quelconque. Prenons les droites fixes LM, LN pour axes, et désignons respectivement par x', y'; x'', y''; x''', y'''; α, β, les coordonnées des points P, Q, O, C. La condition que nous avons à exprimer revient à ceci : les droites CP, CQ, coupant les axes aux points A et B, la droite AB doit passer par le point O.

L'équation de CP est

$$(\beta - y')x - (\alpha - x')y = \beta x' - \alpha y'.$$

Le segment LA qu'elle détermine sur l'axe des x a pour valeur

$$LA = \frac{\beta x' - \alpha y'}{\beta - y'}.$$

On trouverait de même, pour le segment LB, fait par CQ sur l'axe des y,

$$LB = \frac{\alpha y'' - \beta x''}{\alpha - x''}.$$

La droite AB a pour équation

$$\frac{x}{LA} + \frac{y}{LB} = 1, \quad \text{ou} \quad \frac{x(\beta - y')}{\beta x' - \alpha y'} + \frac{y(\alpha - x'')}{\alpha x'' - \beta y''} = 1.$$

La condition du problème est que cette équation soit satisfaite par les coordonnées x''', y'''; elle sera donc remplie lorsqu'on aura entre α et β la relation

$$\frac{x'''(\beta - y')}{\beta x' - \alpha y'} + \frac{y'''(\alpha - x'')}{\alpha y'' - \beta x''} = 1.$$

En chassant les dénominateurs, on trouve que cette équation renferme en général les coordonnées α et β au deuxième degré. Mais si l'on suppose que les points (x', y'), (x'', y'') se trouvent sur une même droite $y = mx$ passant par l'origine, on pourra, en observant que $y'' = mx''$, écrire l'équation

$$\frac{x'''(\beta - y')}{x'(\beta - \alpha m)} + \frac{y'''(\alpha - x'')}{x''(\alpha m - \beta)} = 1;$$

chassant les dénominateurs, remplaçant α, β par x, y, on trouvera pour le lieu cherché une droite ayant pour équation

$$x'''x''(y - y') - y'''x'(x - x'') = x'x''(mx - y).$$

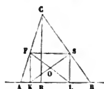
48. Il est souvent commode, au lieu d'exprimer les conditions du problème directement en fonction des coordonnées du point dont on cherche le lieu, de les exprimer d'abord au moyen des autres lignes de la figure; on peut alors obtenir autant de relations qu'il est nécessaire pour éliminer les indéterminées que l'on a introduites, et arriver en définitive à une relation entre les coordonnées de ce point. Les exemples suivants serviront d'éclaircissement.

EXERCICES.

1. Trouver le lieu des centres des rectangles inscrits dans un triangle.

Prenons CR et AB pour axes (*fig.* 28). Soit $CR = p$, $BR = s$, $AR = s'$;

Fig. 28.



les équations de AC et BC seront

$$\frac{y}{p} - \frac{x}{s'} = 1, \quad \frac{y}{p} + \frac{x}{s} = 1.$$

Menons une parallèle FS à la base, à une distance $FK = k$ de cette base; nous trouverons les abscisses des points F et S, où cette parallèle rencontre AC et BC, en faisant $y = k$ dans les équations de AC et de BC. Nous tirons ainsi de la première

$$\frac{k}{p} - \frac{x}{s'} = 1, \quad x = \mathrm{R}k = -s'\left(1 - \frac{k}{p}\right),$$

et de la seconde

$$\frac{k}{p} + \frac{x}{s} = 1, \quad x = \mathrm{RL} = s\left(1 - \frac{k}{p}\right).$$

Des abscisses de F et S, nous déduisons (n° 7) celle du point milieu de FS, $x = \frac{s - s'}{2}\left(1 - \frac{k}{p}\right)$, qui est évidemment l'abscisse du centre du rectangle; d'ailleurs l'ordonnée de ce centre est $y = \frac{1}{2}k$. Pour trouver la relation qui subsiste entre cette abscisse et cette ordonnée, quel que soit k, nous n'avons qu'à éliminer k entre leurs expressions. En portant, par exemple, la valeur $k = 2y$, tirée de la seconde, dans la première, nous obtenons

$$2x = (s - s')\left(1 - \frac{2y}{p}\right),$$

ou

$$\frac{2x}{s - s'} + \frac{2y}{p} = 1,$$

pour l'équation du lieu cherché. Elle représente une droite joignant le milieu de la hauteur au milieu de la base, ainsi qu'il est facile de le voir en examinant les segments qu'elle détermine sur les axes.

sales seront alors

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{\mu b} = 1, \quad \frac{x}{\mu a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Retranchant ces équations l'une de l'autre, et divisant le résultat par $\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)$, nous aurons, pour l'équation du lieu,

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0.$$

Cette équation, ainsi que nous l'avons vu (41, Ex. II), représente la médiane de la base du triangle.

IV. On donne deux points A et B, situés chacun sur un des axes; on prend sur ces axes les points A' et B', de telle sorte que

$$OA' + OB' = OA + OB;$$

trouver le lieu de l'intersection de AB', A'B.

Soient $OA = a$, $OB = b$, $OA' = a + k$; d'après les conditions mêmes du problème, on a $OB' = b - k$. Les équations de AB' et de A'B sont respectivement

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b-k} = 1, \quad \frac{x}{a+k} + \frac{y}{b} = 1,$$

ou

$$bx + ay - ab + k(a - x) = 0,$$
$$bx + ay - ab + k(y - b) = 0.$$

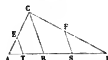
En éliminant k par soustraction, nous trouvons pour l'équation du lieu

$$x + y = a + b.$$

V. Sur la base AB d'un triangle ABC, et à chacune de ses extrémités, on prend des segments AT, BS, dont le rapport est constant; par les points T, S, on mène des parallèles TE, SF, à une droite fixe CR : trouver le lieu de l'intersection O des droites EB et FA.

Prenons AB et CR pour axes (*fig.* 29), et soient $AT = k$, $BR = s$, $AR = s'$, $CR = p$, $BS = m.AT = mk$. Les coordonnées du point S seront $(s - mk, 0)$,

Fig. 29.



et celles de $T(-(s' - k), 0)$; les ordonnées de E et F s'obtiendront en

substituant ces valeurs de x dans les équations de AC et de BC; nous trouverons ainsi, pour E et F,

$$x = -(s'-k), \quad y = \frac{pk}{s'},$$

$$x = s - mk, \quad y = \frac{mpk}{s}.$$

Les équations des transversales EB, AF seront alors

$$(s+s'-k)y + \frac{pk}{s'}x - \frac{pks}{s'} = 0,$$

$$(s+s'-mk)y - \frac{mpk}{s}x - \frac{mpks'}{s} = 0;$$

en les retranchant l'une de l'autre et divisant par k, nous trouvons pour l'équation du lieu

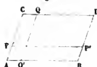
$$(m-1)y + \left(\frac{mp}{s} + \frac{p}{s'}\right)x + \left(\frac{mps'}{s} - \frac{ps}{s'}\right) = 0.$$

Elle représente une ligne droite.

VI. On mène aux deux côtés AB, AC d'un parallélogramme deux parallèles quelconques PP', QQ'; trouver le lieu de l'intersection des droites PQ et P'Q'.

Prenons ces deux côtés pour axes, et soient a, b leurs longueurs (*fig.* 30); posons $AQ' = m$, $AP = n$.

Fig. 30.



L'équation de PQ joignant P (o, n) à Q (m, b) est

$$(b-n)\ xmy + mn = 0.$$

Celle de P'Q' joignant P' (a, n) à Q' (m, o) est

$$nx - (a-m)y - mn = 0.$$

Il y a deux indéterminées m et n, et on ne saurait *à priori* affirmer la possibilité de les éliminer au moyen de deux équations. Cependant si l'on ajoute les deux équations ci-dessus, m et n disparaissent à la fois, et on trouve pour l'équation du lieu

$$bx - ay = 0.$$

Elle représente la diagonale du parallélogramme.

VII. On donne un point et deux droites fixes; par le point, on mène deux droites quelconques, et on joint transversalement les points où elles coupent les droites fixes : trouver le lieu du point d'intersection des transversales.

Prenons les droites fixes pour axes; soient

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1, \quad \frac{x}{m'} + \frac{y}{n'} = 1,$$

les équations des droites passant par le point fixe (x', y') : nous avons alors les conditions

$$\frac{x'}{m} + \frac{y'}{n} = 1, \quad \frac{x'}{m'} + \frac{y'}{n'} = 1,$$

par suite

$$x'\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m'}\right) + y'\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n'}\right) = 0.$$

Les équations des transversales sont

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n'} = 1, \quad \frac{x}{m'} + \frac{y}{n} = 1.$$

d'où

$$x\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m'}\right) - y\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n'}\right) = 0.$$

Éliminant $\frac{1}{m} - \frac{1}{m'}$ et $\frac{1}{n} - \frac{1}{n'}$ entre cette équation et celle obtenue plus haut, il vient

$$x'y + y'x = 0$$

pour l'équation du lieu. C'est celle d'une droite passant par l'origine.

VIII. Par un point de la base d'un triangle, on mène, parallèlement à une droite donnée, une droite de longueur fixe, de manière qu'elle soit coupée par la base dans un rapport donné; trouver le lieu de l'intersection des lignes joignant ses extrémités à celles de la base.

49. Toutes les fois qu'un point est assujetti à une condition géométrique déterminée, ses coordonnées doivent satisfaire à une équation correspondante : c'est là l'idée fondamentale de la géométrie analytique. Il est important, pour celui qui en entreprend l'étude, de se pénétrer de cette idée, et de faire tous ses efforts pour arriver à trouver facilement l'équation correspondant à une condition géométrique. Aussi ajouterons-nous ici, comme exercices, quelques problèmes touchant les

lieux géométriques, et conduisant à des équations d'un degré supérieur au premier. L'interprétation de ces équations sera l'objet d'autres Chapitres ; mais la méthode à employer, la seule chose que nous ayons actuellement en vue, est exactement la même que celle qu'on emploie lorsque le lieu est une ligne droite, et, en réalité, le degré de l'équation du lieu est inconnu jusqu'au moment où l'on arrive à cette équation.

Les exercices suivants ont été choisis de manière à ce que l'on puisse en calquer la solution sur celle des problèmes qui viennent d'être exposés, et en suivant un ordre analogue. Les axes et les notations sont les mêmes dans les exercices correspondants.

EXERCICES.

I. On donne la base d'un triangle et la somme des carrés des deux autres côtés; trouver le lieu du sommet.

RÉPONSE. $x^2 + y^2 = \frac{1}{2} m^2 - c^2.$

II. On donne la base, et m fois le carré d'un côté $\pm$ n fois le carré de l'autre.

RÉPONSE. $(m \pm n)(x^2 + y^2) + 2(m \mp n)cx + (m \pm n)c^2 = p^2.$

III. On donne la base et le rapport des côtés.

IV. On donne la base et le produit des tangentes des angles à la base, Dans ce problème et les quatre suivants, on se servira des valeurs des tangentes des angles à la base (n° 46, Ex. II).

RÉPONSE. $y^2 + m^2x^2 = m^2c^2.$

V. On donne la base et l'angle au sommet, ou, en d'autres termes, la somme des angles à la base.

RÉPONSE. $x^2 + y^2 - 2xy \cot C = c^2.$

VI. On donne la base et la différence des angles à la base.

RÉPONSE. $x^2 - y^2 + 2xy \cot D = c^2.$

VII. On donne la base : un des angles à la base est double de l'autre.

RÉPONSE. $3x^2 - y^2 + 2cx = c^2.$

VIII. On donne la base et tang C = m tang B.

Réponse. $m(x^2+y^2-c^2) = 2c(c-x)$.

IX. On mène PA parallèle à OC (n° 46, Ex. IV); cette parallèle rencontre deux droites fixes BB'; on prend $\overline{PA}^2 = PB.PB'$: trouver le lieu du point P.

Réponse. $mx(m'x+n) = y(mx+m'x+n')$.

X. On prend pour PA la moyenne harmonique entre AB et AB'.

Réponse. $2mx(m'x+n') = y(mx+m'x+n')$.

XI. On donne l'angle ω au sommet d'un triangle; trouver le lieu du point P où la base est coupée dans un rapport donné $m:n$, lorsque l'aire est constante.

Réponse. $xy = \text{const}$.

XII. Trouver le lieu du point P lorsque la base b est constante.

Réponse. $\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}-\frac{2xy\cos\omega}{mn} = \frac{b^2}{(m+n)^2}$.

XIII. Trouver le lieu de ce point P lorsque cette base passe par un point fixe (x', y').

Réponse. $\frac{mx'}{x}+\frac{ny'}{y} = m+n$.

XIV. Trouver le lieu du point P (46, Ex. VIII) lorsque MN est constant.

Réponse. $x^2+y^2+2xy\cos\omega = \text{const}$.

XV. Trouver le lieu de ce point P lorsque MN passe par un point fixe (x', y').

Réponse. $\frac{x'}{x+y\cos\omega}+\frac{y'}{y+x\cos\omega} = 1$.

XVI. Trouver le lieu de l'intersection des parallèles menées aux axes par les points M et N lorsque MN passe par un point fixe (x', y').

Réponse. $\frac{x'}{x}+\frac{y'}{y} = 1$.

XVII. Trouver le lieu du point P (47, Ex. I) dans le cas où CD n'est pas parallèle à AB.

XVIII. On donne la base CD d'un triangle PCD, et le segment AB dé-

terminé par ses côtés PC, PD sur une droite donnée; trouver le lieu du sommet P.

Réponse.

$$(x'y - y'x)(y - y'') - (x''y - y''x)(y - y') = c(y - y')(y - y'').$$

50. ***Problèmes où il faut démontrer qu'une droite mobile passe toujours par un point fixe.***

Nous avons vu (40) que la droite représentée par l'équation

$$Ax + By + C + k(A'x + B'p + C') = 0,$$

ou, par la suivante,

$$(Ax + kA')x + (B + kB')y + C + kC' = 0,$$

dans laquelle k est une indéterminée, passe par un point fixe, autrement dit, par l'intersection des droites

$$Ax + By + C = 0, \quad A'x + B'y + C' = 0.$$

Donc : *Si l'équation d'une droite contient une indéterminée au premier degré, cette droite passe toujours par un point fixe.*

EXERCICES.

I. On donne, dans un triangle, un angle et la somme $\frac{1}{m}$ des réciproques des côtés qui le comprennent; prouver que le côté opposé à l'angle donné passe par un point fixe.

Prenons pour axes les côtés qui comprennent l'angle, l'équation du coté opposé sera (en désignant par a et b la longueur des autres côtés),

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Mais on a

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{m} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{b} = \frac{1}{m} - \frac{1}{a}.$$

L'équation ci-dessus se réduit donc à

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{m} - \frac{y}{n} = 1,$$

ou bien encore à

$$\frac{1}{a}(x - y) + \frac{y}{m} - 1 = 0,$$

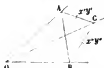
et renferme l'indéterminée $\frac{1}{a}$: la droite qu'elle représente passe donc toujours par un point fixe, qui est l'intersection des deux droites

$$x - y = 0, \quad y = m.$$

II. Les trois sommets d'un triangle ABC glissent sur trois droites fixes OA, OB, OC, issues du même point; deux de ses côtés AC, CB passent par deux points fixes (x', y'), (x'', y'') : démontrer que le troisième côté AB passe aussi par un point fixe.

Prenons OA et OB pour axes (*fig.* 31) : l'équation de OC sera $y = mx$.

Fig. 31.



Soit a l'abscisse du sommet C dans une position quelconque, l'ordonnée correspondante sera ma. L'équation de AC sera alors

$$(x' - a)y - (y' - am)x + a(y' - mx') = 0,$$

celle de BC sera de même

$$(x'' - a)y - (y'' - ma)x + a(y'' - mx'') = 0.$$

Si l'on fait $x = 0$ dans l'équation de AC, on trouve, pour la longueur de OA,

$$y = \text{OA} = -\frac{a(y' - mx')}{x' - a}.$$

On obtient de même pour la longueur de OB, en faisant $y = 0$ dans l'équation de BC,

$$x = \text{OB} = \frac{a(y'' - mx'')}{y'' - ma}.$$

L'équation de AB est donc

$$x\frac{y'' - ma}{y'' - mx''} + y\frac{x' - a}{y' - mx'} = a.$$

Puisque a est une indéterminée et n'entre qu'au premier degré dans cette équation, la droite AB passe toujours par un point fixe. En mettant l'équation sous la forme

$$\frac{y''}{y'' - mx''}x - \frac{x'}{y' - mx'}y - a\left(\frac{mx}{y'' - mx''} - \frac{y}{y' - mx'} + 1\right) = 0,$$

on voit que le point fixe se trouve à l'intersection des deux droites

$$\frac{y''}{y''-mx''}x-\frac{x'}{y'-mx'}y=0,\quad \frac{mx}{y''-mx''}-\frac{y}{y'-mx'}+1=0.$$

III. La droite sur laquelle glisse le sommet C (Ex. précédent) ne passe plus par le point O : à quelle condition doivent satisfaire les autres données du problème pour que le côté AB passe toujours par un point fixe.

Conservons les mêmes axes et les mêmes notations que ci-dessus : l'équation de la droite sur laquelle glisse le sommet C sera $y=mx+n$, et les coordonnées du point C dans une de ses positions seront a, $ma+n$. L'équation de AC sera

$$(x'-a)y-(y'-ma-n)x+a(y'-mx')-nx'=0,$$

et celle de BC

$$(x''-a)y-(y''-ma-n)x+a(y''-mx'')-nx''=0;$$

d'où

$$\mathrm{OA}=-\frac{a(y'-mx')-nx'}{x'-a},\quad \mathrm{OB}=\frac{a(y''-mx'')-nx''}{y''-ma-n}.$$

L'équation de AB est donc

$$x\frac{y''-ma-n}{a(y''-mx'')-nx''}-y\frac{x'-a}{a(y'-mx')-nx'}=1.$$

En chassant les dénominateurs, on obtient une équation dans laquelle a entre au second degré : en général, le côté AB ne passera donc pas par un point fixe. Mais si *les points* (x',y'), (x'',y'') *sont sur une droite* $(y=kx)$ *passant par le point* O, on peut remplacer, dans les dénominateurs y'', par kx'', et y' par kx' : l'équation devient alors

$$x\frac{y''-ma-n}{x''}-y\frac{x'-a}{x'}=a(k-m)-n,$$

et ne renferme plus l'indéterminée a qu'au premier degré : donc, dans ce cas particulier, le côté AB passe par un point fixe.

IV. Si la somme des distances d'un certain nombre de points fixes (x',y'), (x'',y'')... à une droite, multipliées chacune par un facteur constant m', m'', est nulle, la droite passe par un point fixe.

Soit $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ l'équation de la droite, la distance du point (x',y') à cette droite sera

$$x'\cos\alpha+y'\sin\alpha-p,$$

et l'équation suivante exprimera les conditions du problème

$$m'(x'\cos\alpha + y'\sin\alpha - p) + m''(x''\cos\alpha + y''\sin\alpha - p) + \ldots = 0.$$

En posant, pour abréger (*),

$$\Sigma(mx') = m'x' + m''x'' + m'''x''' + \ldots,$$
$$\Sigma(my') = m'y' + m''y'' + m'''x''' + \ldots,$$
$$\Sigma\ (m) = m' + m'' + m''' + \ldots,$$

on peut écrire l'équation précédente

$$\Sigma(mx')\cos\alpha + \Sigma(my')\sin\alpha - p\Sigma(m) = 0.$$

En portant la valeur de p qu'on en déduit, dans l'équation primitive de la droite mobile, on trouve

$$x\Sigma(m)\cos\alpha + y\Sigma(m)\sin\alpha - \Sigma(mx')\cos\alpha - \Sigma(my')\sin\alpha = 0,$$

ou bien

$$x\Sigma(m) - \Sigma(mx') + [(y\Sigma(m) - \Sigma(my')]\ \text{tang}\,\alpha = 0.$$

Cette équation renferme l'indéterminée tang α au premier degré; la droite qu'elle représente passe par un point fixe, qui est déterminée par l'intersection des droites

$$x\Sigma(m) - \Sigma(mx') = 0, \quad y\Sigma(m) - \Sigma(my') = 0,$$

et qui, par suite, a pour coordonnées

$$x = \frac{m'x' + m''y'' + m'''y''' + \ldots}{m' + m'' + m''' + \ldots}, \quad y = \frac{m'y' + m''y'' + m'''y''' + \ldots}{m' + m'' + m''' + \ldots}.$$

Ce point s'appelle quelquefois *centre des distances proportionnelles.*

51. Lorsqu'un point (x', y') glisse sur une droite, la droite, dont l'équation renferme les coordonnées du point (x', y') au premier degré, comme la suivante

$$(Ax' + By' + C)x + (A'x' + B'y' + C')y + A''x' + B''y' + C'' = 0,$$

passe par un point fixe. Car les coordonnées du point satisfont

(*) La somme indiquée par l'abréviation $\Sigma(m)$, par exemple, est une somme *algébrique;* car plusieurs des quantités m', m'',... peuvent être négatives.

à une équation de la forme

$$Lx' + My' + N = 0,$$

et en éliminant x' entre cette équation et la précédente, nous retombons sur une équation ne renfermant plus qu'une indéterminée y' au premier degré, et représentant par suite une droite passant par un point fixe.

Si donc *les coefficients de l'équation* $Ax + By + C = 0$ *sont liés entre eux par la relation* $aA + bB + cC = 0$ (*dans laquelle* a, b *et* c *sont des constantes*, *et* A, B *et* C *des variables*) *la droite qu'elle représente passe par un point fixe.*

Car la relation donnée nous permet d'éliminer C et de mettre l'équation sous la forme

$$(cx - a)A + (cy - b)B = 0,$$

on voit alors qu'elle représente une droite passant toujours par le point $\left(x = \frac{a}{c}, y = \frac{b}{c}\right)$.

52. *Coordonnées polaires.* — Les coordonnées polaires sont en général d'un usage commode, lorsqu'il s'agit de trouver le lieu des extrémités des droites menées par un point fixe suivant une loi déterminée.

EXERCICES.

1. A et B sont deux points fixes; par le point B, on mène une droite quelconque BP, sur laquelle on abaisse une perpendidulaire AP du point A; on prolonge AP jusqu'en Q, de manière que le rectangle PA.AQ soit constant et égal à k^2 : trouver le lieu du point Q.

Prenons AB pour axe fixe (*fig.* 32), et A pour pôle : $AQ = \rho$ sera le

Fig. 32.



rayon vecteur, et $\widehat{QAB} = \theta$, l'angle qu'il fait avec l'axe fixe. L'équation du lieu sera la relation qui lie ρ et θ.

Posons $AB = c$. Le triangle rectangle APB donne $AP = c\cos\theta$; mais, d'après les conditions du problème, $AP.AQ = k^2$: l'équation du lieu est donc

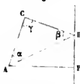
$$\rho c\cos\theta = k^2 \quad \text{ou} \quad \rho\cos\theta = \frac{k^2}{c};$$

nous avons vu (44) que cette équation représente une droite perpendiculaire à AB, et menée à une distance $\frac{k^2}{c}$ du point A.

II. On donne les angles α, β, γ d'un triangle ABC; le sommet A est fixe, tandis que le sommet B glisse le long d'une droite BP : trouver le lieu du troisième sommet C.

Prenons le sommet fixe A pour pôle (*fig.* 33), et la perpendiculaire AP

Fig. 33.



à la droite fixe BP pour axe, on a alors $AC = \rho$, et $\widehat{CAP} = \theta$.

Puisque les angles du triangle sont donnés, le rapport m de AB à AC sera constant; d'ailleurs, $\widehat{BAP} = \theta - \alpha$; mais

$$AP = AB\cos\widehat{BAP} = m.AC\cos\widehat{BAP};$$

en posant $AP = a$, nous aurons, pour l'équation du lieu,

$$m\rho\cos(\theta - \alpha) = a;$$

c'est une ligne droite (44), faisant un angle α avec les droites données, et passant à une distance $\frac{a}{m}$ du point A.

III. On donne la base $AB = c$ d'un triangle ABC, et la somme $AC + CB = m$ des deux autres côtés; à l'extrémité B de la base, on élève la perpendiculaire BP au côté adjacent BC : trouver le lieu du point P où cette perpendiculaire rencontre la bissectrice extérieure CP de l'angle ACB.

Prenons le point B pour pôle (*fig.* 34), et le prolongement BD de la base pour axe fixe; alors $BP = \rho$, $\widehat{PBD} = \theta$.

Désignons par a, b, c, les côtés du triangle opposés aux angles A, B, C, on a

$$\widehat{BCP} = 90° - \frac{1}{2}C, \quad BC = a = \rho\tan\frac{1}{2}C.$$

Mais, dans le triangle ABC, on a

$$b^2 = a^2 + c - 2ac\cos B.$$

Fig. 34.



et en raison des conditions du problème

$$b = m - a, \quad \cos B = \sin\theta,$$

donc

$$m^2 - 2am + a^2 = a^2 + c^2 - 2ac\sin\theta;$$

d'où

$$a = \frac{m^2 - c^2}{2(m - c\sin\theta)}.$$

Nous avons ainsi deux expressions de a : l'une en fonction de θ et des constantes du problème; l'autre en fonction de ρ et de $\tang\frac{1}{2}C$: si donc nous pouvons exprimer $\tang\frac{1}{2}C$ en fonction de θ et des constantes du problème, nous pourrons éliminer a et trouver l'équation du lieu. Mais

$$\tang\frac{1}{2}C = \frac{b\sin C}{b(1 + \cos C)},$$

et

$$b\sin C = c\sin B = c\cos\theta, \quad b\cos C = a - c\cos B = a - c\sin\theta;$$

donc

$$\tang\frac{1}{2}C = \frac{c\cos\theta}{m - c\sin\theta}.$$

L'équation du lieu sera ainsi

$$\frac{m^2 - c^2}{2(m - c\sin\theta)} = \frac{\rho c.\cos\theta}{m - c\sin\theta},$$

ou

$$\rho\cos\theta = \frac{m^2 - c^2}{2c}.$$

Elle représente une droite perpendiculaire à la base du triangle et passant à une distance $\frac{m^2 - c^2}{2c}$ du point B.

On trouverait, en suivant la même marche, le lieu du point P, dans le

cas où CP serait la bissectrice *intérieure*, et où on donnerait la différence au lieu de la somme des côtés.

IV. On donne n droites fixes et un point fixe O; par ce point, on mène un rayon vecteur qui coupe les droites en $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$, et on prend sur ce rayon vecteur un point R, tel que

$$\frac{n}{\mathrm{OR}} = \frac{1}{\mathrm{O}r_1} + \frac{1}{\mathrm{O}r_2} + \frac{1}{\mathrm{O}r_3} + \ldots + \frac{1}{\mathrm{O}r_n}:$$

trouver le lieu du point R.

Soient

$$\rho\cos(\theta - \alpha) = p_1, \quad \rho\cos(\theta - \beta) = p_2, \ldots$$

les équations des droites, il est facile de voir que l'équation du lieu est

$$\frac{n}{\rho} = \frac{\cos(\theta-\alpha)}{p_1} + \frac{\cos(\theta-\beta)}{p_2} + \ldots,$$

qui représente une ligne droite (44). Ce théorème n'est qu'un cas particulier d'un autre plus général que nous démontrerons par la suite.

Nous ajouterons ici, comme au n° 49, un petit nombre de problèmes conduisant à des équations de degré plus élevé.

V. Soit BP une droite fixe (*fig.* 32) ayant pour équation $\rho\cos\theta = m$; sur chaque rayon vecteur AQ, on prend une longueur constante PQ $= d$: trouver le lieu des points Q.

Par hypothèse $\mathrm{AP} = \dfrac{m}{\cos\theta}$; donc $\mathrm{AQ} = \rho = \dfrac{m}{\cos\theta} + d$.

Cette équation, rapportée à des coordonnées rectangulaires, devient

$$(x-m)^2(x^2+y^2) = d^2x^2.$$

VI. Trouver le lieu des points Q, lorsque le point P décrit, non plus une droite BP, mais un lieu ayant pour équation en coordonnées polaires $\rho = \varphi(\theta)$.

La longueur AP est égale au rayon vecteur ρ du lieu cherché, diminué de d; l'équation s'obtiendra donc en remplaçant, dans celle du lieu du point P, ρ par $\rho - d$: on trouvera ainsi

$$\rho - d = \varphi(\theta).$$

VII. Le point P décrit le lieu $\rho = \varphi(\theta)$; on prolonge AP jusqu'en AQ, de manière que AQ $= 2\,$AP : trouver le lieu du point Q.

Il suffit de remplacer, dans l'équation du lieu de P, ρ par $\frac{1}{2}\rho$ pour avoir l'équation cherchée.

VIII. On mène la bissectrice AP′ de l'angle PAB, et, sur cette bissectrice, on prend un point P′ tel que $\overline{AP'}^2 = m.AP$; trouver le lieu du point P′, lorsque P décrit la droite $\rho\cos\theta = m$.

L'angle PAB étant égal au double de la coordonnée angulaire θ du lieu, on a $AP = \frac{m}{\cos 2\theta}$, et, par suite, pour l'équation du lieu,

$$\rho^2 \cos 2\theta = m^2.$$

*CHAPITRE IV.

APPLICATION DE LA MÉTHODE DES NOTATIONS ABREGÉES A L'ÉQUATION DE LA LIGNE DROITE.

53. Nous avons vu (40) que l'équation

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p - k(x\cos\beta + y\sin\beta - p') = 0$$

est celle d'une droite passant par l'intersection des deux lignes

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0, \quad x\cos\beta + y\sin\beta - p' = 0.$$

Si, pour abréger, nous représentons

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p,$$
$$x\cos\beta + y\sin\beta - p',$$

par α, β, nous pourrons exprimer plus simplement le théorème que nous venons de rappeler, et considérer l'équation $\alpha - k\beta = 0$ comme celle d'une droite passant par l'intersection des deux lignes données par les équations $\alpha = 0$, $\beta = 0$. Nous appellerons α et β ces dernières lignes, et (α, β) leur point d'intersection.

Lorsqu'il y aura lieu d'employer des abréviations analogues pour les équations de la forme $Ax + By + C = 0$, nous nous servirons des lettres romaines, réservant les lettres grecques pour le cas exclusif où les équations sont de la forme

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0.$$

54. Cherchons maintenant la signification du coefficient k de l'équation $\alpha - k\beta = 0$. Nous avons vu (34) que α (c'est-à-dire $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p$) était la distance du point (x, y) à la ligne OA, que nous supposons représentée par α : de même β est la distance du point (x, y) à la droite OB représentée

par β. L'équation

$$\alpha - k\beta = 0$$

exprime donc que si, d'un point du lieu qu'elle représente, on abaisse des perpendiculaires PA, PB sur les droites OA, OB (*fig.* 35), le rapport de ces perpendiculaires PA : PB est con-

Fig. 35.



stant et égal à k. Ce lieu est une ligne droite passant par le point O, et on a

$$k = \frac{PA}{PB} = \frac{\sin POA}{\sin POB}.$$

En se reportant à la convention faite relativement aux signes (34), on voit que $\alpha + k\beta = 0$ représente une droite divisant *extérieurement* l'angle AOB en deux parties telles, que $\frac{\sin POA}{\sin POB} = k$: il est bien entendu, dans ce que nous venons de dire, que les perpendiculaires PA et PB sont celles que nous sommes convenu de regarder comme positives; celles qui tombent sur les directions opposées à α et β étant considérées comme négatives.

EXERCICES.

I. Démontrer, en employant ces notations, que les trois bissectrices des angles d'un triangle se coupent en un même point.

Les équations des trois bissectrices du triangle formé par les droites α, β et γ sont évidemment (35, 34) : $\alpha - \beta = 0$, $\beta - \gamma = 0$, $\gamma - \alpha = 0$, et leur somme est identiquement nulle.

II. Les bissectrices extérieures de deux des angles d'un triangle se rencontrent sur la bissectrice intérieure du troisième angle.

En se reportant à la convention relative aux signes, on voit que $\alpha + \beta = 0$, $\alpha + \gamma = 0$, sont les équations des bissectrices extérieures : si on les retranche l'une de l'autre, on trouve $\beta - \gamma = 0$, équation de la bissectrice intérieure du troisième angle.

III. Les trois hauteurs d'un triangle se coupent en un même point.

Désignons respectivement par A, B, C les angles opposés aux côtés α, β, γ. La hauteur passant par le sommet A divise l'angle correspondant en deux autres, qui sont respectivement complémentaires des angles B et C : son équation sera donc

$$\alpha \cos A - \beta \cos B = 0.$$

On trouverait de même pour les autres hauteurs :

$$\beta \cos B - \gamma \cos C = 0, \quad \gamma \cos C - \alpha \cos A = 0.$$

Ces trois droites se coupent évidemment en un même point.

IV. Les trois médianes d'un triangle se coupent en un même point.

Le rapport des distances du milieu du côté γ aux deux autres côtés α et β est $\sin A : \sin B$. Les équations des médianes seront donc

$$\alpha \sin A - \beta \sin B = 0, \quad \beta \sin B - \gamma \sin C = 0, \quad \gamma \sin C - \alpha \sin A = 0.$$

Leur somme est identiquement nulle.

V. Les longueurs des côtés α, β, γ, δ d'un quadrilatère sont a, b, c, d; trouver l'équation de la droite joignant les milieux des diagonales.

Cette équation est $a\alpha - b\beta + c\gamma - d\delta = 0$; en effet, la droite qu'elle représente passe par l'intersection des droites $a\alpha - b\beta$ et $c\gamma - d\delta$, qui, d'après l'Exercice précédent, sont les médianes de la base commune aux deux triangles formés par une diagonale dans le quadrilatère; elle passe aussi par l'intersection des droites $a\alpha - d\delta$ et $c\gamma - b\beta$, qui se coupent au milieu de l'autre diagonale.

VI. Trouver l'équation de la perpendiculaire élevée sur la base β d'un triangle, et à son extrémité C.

RÉPONSE. $$\alpha + \gamma \cos B = 0.$$

VII. Si l'on a deux triangles tels, que les perpendiculaires abaissées des sommets du premier sur les côtés du second se coupent en un même point; réciproquement, les perpendiculaires abaissées des sommets du second sur les côtés du premier se couperont en un même point.

Soient α, β, γ; α', β', γ' les côtés des triangles; désignons par $(\alpha\beta)$ l'angle compris entre α et β; nous aurons respectivement, pour les équations des perpendiculaires abaissées de (α, β) sur γ', de (β, γ) sur α', de (α, γ) sur β',

$$\alpha \cos(\beta\gamma') - \beta \cos(\alpha\gamma') = 0,$$
$$\beta \cos(\gamma\alpha') - \gamma \cos(\beta\alpha') = 0,$$
$$\gamma \cos(\alpha\beta') - \alpha \cos(\gamma\beta') = 0.$$

On trouvera la condition pour que ces trois droites se coupent en un même point, en éliminant β entre les deux premières équations et en exprimant que le résultat obtenu est identique à la troisième. On aura ainsi

$$\cos(\alpha\beta')\cos(\beta\gamma')\cos(\gamma\alpha') = \cos(\alpha'\beta)\cos(\beta'\gamma)\cos(\gamma'\alpha).$$

La symétrie de cette équation montre qu'elle exprime aussi la condition pour que les perpendiculaires abaissées des sommets du second triangle sur les côtés opposés du premier se rencontrent en un même point.

55. La droite $\alpha - k\beta = 0$ fait évidemment, avec la ligne α, le même angle que la droite $k\alpha - \beta = 0$ fait avec β : ces deux droites sont donc également inclinées sur la bissectrice $\alpha - \beta = 0$.

EXERCICE.

Si, par les sommets d'un triangle, on mène trois droites se coupant en un même point, les trois droites menées par ces sommets et faisant avec les bissectrices des angles correspondants, les mêmes angles que les premières se couperont aussi en un même point.

Les côtés du triangle étant α, β, γ, les équations des trois premières droites seront

$$l\alpha - m\beta = 0, \quad m\beta - n\gamma = 0, \quad n\gamma - l\alpha = 0;$$

car ces droites se coupent en un point (40) et passent respectivement par les points (α, β), (β, γ), (γ, α). Les équations des trois autres droites seront, d'après ce que nous venons de dire plus haut,

$$\frac{\alpha}{l} - \frac{\beta}{m} = 0, \quad \frac{\beta}{m} - \frac{\gamma}{n} = 0, \quad \frac{\gamma}{n} - \frac{\alpha}{l} = 0,$$

ce qui (40) démontre le théorème.

56. *Lorsqu'un faisceau de quatre droites* OA, OP, OP′, OB, *issues du même point est coupé par une transversale aux quatre points* A, P, P′, B, *le rapport* $\frac{AP.P'B}{AP'.PB}$ (que l'on appelle *rapport anharmonique* du faisceau) *est constant, quelle que soit la transversale.*

En effet, soit p la distance du point O à la transversale

(*fig.* 36), on aura les égalités

$$p.\mathrm{AP} = \mathrm{OA}.\mathrm{OP} \sin \mathrm{AOP}, \quad p.\mathrm{P'B} = \mathrm{OB}.\mathrm{OP'}.\sin \mathrm{BOP'},$$
$$p.\mathrm{AP'} = \mathrm{OA}.\mathrm{OP'} \sin \mathrm{AOP'}, \quad p.\mathrm{PB} = \mathrm{OB}.\mathrm{OP} .\sin \mathrm{BOP},$$

puisque, dans chacune d'elles, les deux termes expriment le

Fig. 36.



double de la même aire. On en déduit

$$p^2.\mathrm{AP} .\mathrm{P'B} = \mathrm{OA}.\mathrm{OP}.\mathrm{OB}.\mathrm{OP'} \sin \mathrm{AOP} . \sin \mathrm{BOP'},$$
$$p^2.\mathrm{AP'}.\mathrm{PB} = \mathrm{OA}.\mathrm{OP}.\mathrm{OB}.\mathrm{OP'} \sin \mathrm{AOP'}. \sin \mathrm{BOP},$$
$$\frac{\mathrm{AP}.\mathrm{P'B}}{\mathrm{AP'}.\mathrm{PB}} = \frac{\sin \mathrm{AOP}. \sin \mathrm{BOP'}}{\sin \mathrm{AOP'}. \sin \mathrm{BOP}}.$$

Ce dernier rapport est constant et indépendant de la position de la transversale.

57. Si $\alpha - k\beta = 0$, $\alpha - k'\beta = 0$ sont les équations de deux droites, $\frac{k}{k'}$ est le *rapport anharmonique* du faisceau formé par quatre droites α, β, $\alpha - k\beta$, $\alpha - k'\beta$: car OA, OB, OP, OP′ représentant ces quatre droites, on aura (54)

$$k = \frac{\sin \mathrm{AOP}}{\sin \mathrm{POB}}, \quad k' = \frac{\sin \mathrm{AOP'}}{\sin \mathrm{P'OB}},$$

et par suite

$$\frac{k}{k'} = \frac{\sin \mathrm{AOP}.\sin \mathrm{P'OB}}{\sin \mathrm{AOP'}.\sin \mathrm{POB}}.$$

Le faisceau est un *faisceau harmonique*, lorsque $\frac{k}{k'} = -1$, car alors l'angle AOB est divisé intérieurement et extérieurement en parties dont les sinus sont dans le même rapport; d'où l'on déduit ce théorème important :

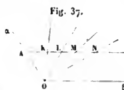
Les deux droites ayant pour équations $\alpha - k\beta = 0$, $\alpha + k\beta = 0$ *forment avec* α *et* β *un faisceau harmonique.*

58. En général, le rapport anharmonique des quatre droites $\alpha - k\beta$, $\alpha - l\beta$, $\alpha - m\beta$, $\alpha - n\beta$ (OK, OL, OM, ON) est égal à

$$\frac{(n-l)(m-k)}{(n-m)(l-k)}.$$

En effet, la parallèle KN à β (*fig.* 37) rencontrant ces droites

Fig. 37.



aux points K, L, M et N, le rapport anharmonique du faisceau aura pour valeur

$$\frac{\text{NL.MK}}{\text{NM.LK}}.$$

Mais ces quatre points ont même β, puisqu'ils se trouvent sur une parallèle à la droite β; leurs distances à α (en raison de l'équation des droites OK, OL...) sont donc proportionnelles à k, l, m, n : et il en est de même des longueurs AK, AL, AM, AN. Par suite, les longueurs NL, MK, NM et LK sont proportionnelles à $n - l$, $m - k$, $n - m$ et $l - k$.

59. Les théorèmes que nous venons de démontrer dans les deux numéros précédents subsistent encore lorsque les équations des droites sont $P - kP'$, $P - lP'$,..., en représentant par P et P' les expressions $ax + by + c$, $a'x + b'y + c'$. En effet, on peut ramener P à la forme $x \cos\alpha + y \sin\alpha - p$, en le divisant par une certaine quantité (23), et, par suite, transformer les équations $P - kP' = 0$, $P - lP' = 0$,... dans les suivantes $\alpha - k\rho\beta = 0$, $\alpha - l\rho\beta = 0$,..., ρ étant le rapport des quantités par lesquelles on doit diviser P et P' pour les ramener à la forme α, β; d'ailleurs la valeur du rapport anharmonique ne change pas lorsqu'on y remplace k, l, m et n par $k\rho$, $l\rho$, $m\rho$, $n\rho$.

Considérons les *deux systèmes* de droites

$$P - kP', \quad P - lP', \ldots,$$
$$Q - kQ', \quad Q - lQ', \ldots,$$

partant chacun d'un point différent, et appelons correspondantes les droites telles que $P - kP'$, $Q - kQ'$, nous aurons, en remarquant que le rapport anharmonique ne dépend que des coefficients k, l, m, n, le théorème suivant :

Le rapport anharmonique de quatre droites quelconques du premier système est égal à celui des quatre droites correspondantes du second.

Ces systèmes, que nous aurons souvent occasion de considérer par la suite, s'appellent *systèmes homographiques.*

60. *Les trois droites α, β, γ formant un triangle* (*), *on peut toujours ramener l'équation d'une droite $ax + by + c = 0$ à la forme*

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0.$$

L'équation $l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$ devient, en y remplaçant α, β et γ par leurs équivalents $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p, \ldots,$

$$(l \cos \alpha + m \cos \beta + n \cos \gamma)\, x$$
$$+ (l \sin \alpha + m \sin \beta + n \sin \gamma)\, y - (lp + mp' + np'') = 0;$$

elle sera identique à l'équation donnée lorsque l'on aura

$$l \cos \alpha + m \cos \beta + n \cos \gamma = a, \quad l \sin \alpha + m \sin \beta + n \sin \gamma = b,$$
$$lp + mp' + np'' = -c,$$

et l'on pourra toujours déterminer l, m et n, de manière à satisfaire à ces équations.

Les exercices suivants serviront d'éclaircissement.

(*) Nous disons : *formant un triangle*, car si les lignes α, β, γ se rencontrent en un point, $l\alpha + m\beta + n\gamma$ represente une droite passant par ce même point, puisque les valeurs des coordonnees qui annulent séparément α, β, γ annulent aussi $l\alpha + m\beta + n\gamma$.

EXERCICES.

I. Démontrer analytiquement les propriétés du quadrilatère complet. Soient

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad l\alpha - m\beta = 0, \quad m\beta - n\gamma = 0,$$

les équations des droites

AC, AB, BD, AD, BC,

en fonction desquelles nous allons chercher à exprimer toutes les autres lignes de la figure (*fig.* 38).

Fig. 38.



L'équation de CD sera

$$l\alpha - m\beta + n\gamma = 0,$$

puisque cette droite passe par l'intersection D des deux droites $l\alpha - m\beta$ et γ, et par l'intersection C de $m\beta - n\gamma$ et α. De même $l\alpha - n\gamma = 0$ est l'équation de OE, puisque OE passe par E ou (α, γ), et par O ou $(l\alpha - m\beta, m\beta - n\gamma)$.

La droite EF joint le point E ou (α, γ) au point F ou $(l\alpha - m\beta + n\gamma, \gamma)$; son équation sera donc

$$l\alpha + n\gamma = 0.$$

Les quatre lignes EA, EO, EB, EF forment un faisceau harmonique (55), puisqu'elles ont pour équations

$$\alpha = 0, \quad \gamma = 0, \quad l\alpha \pm n\gamma = 0.$$

La droite FO joint le point F, $(l\alpha + n\gamma, \beta)$, au point O,

$$(l\alpha - m\beta, \; m\beta - n\gamma);$$

son équation est donc

$$l\alpha - 2m\beta + n\gamma = 0.$$

Les quatre lignes FE, FC, FO et FA forment aussi un faisceau harmonique (57), puisqu'elles sont représentées par

$$l\alpha - m\beta + n\gamma = 0, \quad \beta = 0, \quad l\alpha - m\beta + n\gamma \pm m\beta = 0.$$

Les quatre droites OC, OE, OD, OE constituent aussi un faisceau harmo-

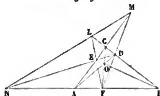
nique, puisqu'elles ont pour équations

$$l\alpha - m\beta = 0, \quad m\beta - n\gamma = 0, \quad l\alpha - m\beta \pm (m\beta - n\gamma) = 0.$$

II. Discuter les propriétés d'un système de droites formé en menant par les sommets d'un triangle ABC des droites AD, BE, CF, se coupant en un même point O.

Soient α, β, γ, les côtés BC, AC et AB du triangle (*fig.* 39); $m\beta - n\gamma$,

Fig. 39.



$n\gamma - l\alpha$, $l\alpha - m\beta$ les droites AO, BO, CO (*voir* n° 55).

Les équations des lignes EF, DF, DE qui joignent deux à deux les points ou les droites issues des sommets viennent rencontrer les côtés s'obtiendront facilement. Ainsi l'équation de EF, qui passe par les points E, ou $(\beta, n\gamma - l\alpha)$, et F, ou $(\gamma, m\beta - l\alpha)$, est

$$m\beta + n\gamma - l\alpha = 0.$$

On trouverait de même pour l'équation de DF

$$l\alpha - m\beta + n\gamma = 0,$$

et pour celle de DE

$$l\alpha + m\beta - n\gamma = 0.$$

Les points L, M, N, où les droites EF, DF, DE rencontrent les côtés CB, AC, AB du triangle qui leur sont respectivement opposés sont sur une droite qui a pour équation

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0;$$

car elle passe par les points N ou $(l\alpha + m\beta - n\gamma, \gamma)$, M ou $(l\alpha - m\beta + n\gamma, \beta)$, L ou $(m\beta + n\gamma - l\alpha, \alpha)$.

Le côté BN du triangle est divisé harmoniquement par les droites CN, CA, CF, CB, puisqu'elles ont pour équations

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad l\alpha - m\beta = 0, \quad l\alpha + m\beta = 0.$$

On rencontre assez souvent des cas où l'on peut se servir des équations précédentes. Ainsi (54, Ex. III), l'équation de la droite joignant

les pieds de deux hauteurs est $\alpha\cos A + \beta\cos B - \gamma\cos C = 0$; et la droite $\alpha\cos A + \beta\cos B + \gamma\cos C = 0$ passe par les points d'intersection des lignes joignant les pieds des hauteurs, avec les côtés opposés du triangle. De même (54, Ex. IV) la droite $\alpha\sin A + \beta\sin B - \gamma\sin C$ joint les milieux de deux côtés du triangle, etc.

III. Deux triangles sont *homologues* lorsque les intersections de leurs côtés correspondants se trouvent sur une droite qui est l'*axe d'homologie;* prouver que les droites joignant les sommets correspondants de deux triangles homologues se coupent en même point.

Soient α, β, γ les côtés du premier triangle, $l\alpha + m\beta + n\gamma$ l'axe d'homologie, l'équation du côté du deuxième triangle passant par l'intersection de α avec cet axe sera de la forme $l'\alpha + m\beta + n\gamma = 0$; de même celles des deux autres côtés seront

$$l\alpha + m'\beta + n\gamma = 0, \quad l\alpha + m\beta + n'\gamma = 0.$$

Dès lors les lignes joignant les sommets correspondants auront pour équations

$$(l - l')\alpha = (m - m')\beta, \; (m - m')\beta = (n - n')\gamma, \; (n - n')\gamma = (l - l')\alpha.$$

Elles passent par un même point, que l'on appelle *centre d'homologie*.

61. *Trouver la condition pour que les deux droites $l\alpha + m\beta + n\gamma$, $l'\alpha + m'\beta + n'\gamma$, soient perpendiculaires entre elles.*

En remplaçant, comme au n° 60, α, β et γ par leurs équivalents, et en ayant égard à la relation obtenue n° 25, corollaire II ($AA' + BB' = 0$), on trouve

$$ll' + mm' + nn' + (mn' + m'n)\cos(\beta - \gamma)$$
$$+ (nl' + n'l)\cos(\gamma - \alpha) + (lm' + l'm)\cos(\alpha - \beta) = 0,$$

d'ailleurs, β et γ étant les angles que font, avec l'axe des x, les perpendiculaires abaissées sur les droites β et γ, $\beta - \gamma$ représente l'angle compris entre ces perpendiculaires, et par suite est égal à l'angle compris entre les deux droites elles-mêmes ou à son supplément. Si l'on suppose que l'origine se trouve dans l'intérieur du triangle formé par les droites α, β, γ, et que A, B, C, soient les angles de ce triangle, $\beta - \gamma$ sera le supplément de A, et la condition pour que les droites soient per-

pendiculaires pourra s'écrire

$$ll' + mm' + nn' - (mn' + m'n)\cos A$$
$$- (nl' + n'l)\cos B - (lm' + ml')\cos C = 0.$$

Ainsi la droite $l\alpha + m\beta + n\gamma$ est perpendiculaire à γ, quand on a

$$n = m\cos A + l\cos B.$$

On trouverait de même que, en partant de la formule n° 34, la distance du point (x', y') à la droite $l\alpha + m\beta + n\gamma$ est donnée par l'expression

$$\frac{l\alpha' + m\beta' + n\gamma'}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2 - 2mn\cos A - 2nl\cos B - 2lm\cos C}},$$

où l'on a fait $\alpha' = x'\cos\alpha + y'\sin\alpha - p, \ldots$.

EXERCICES.

I. Trouver l'équation de la perpendicalaire élevée à la droite γ en son extrémité B, où elle est rencontrée par la droite α. Cette équation est de la forme $l\alpha + n\gamma = 0$; la condition de perpendicularité donne $n = l\cos B$, B étant l'angle des droites α et γ. (*Voir* n° 54, Ex. VI.)

II. Trouver l'équation de la perpendiculaire élevée sur le milieu de γ.
Le point milieu de γ est l'intersection de γ avec $\alpha\sin A - \beta\sin\beta$ (α, β, γ, A, B, C ayant la signification indiquée ci-dessus); par suite l'équation sera de la forme $\alpha\sin A - \beta\sin B + n\gamma = 0$, avec la condition

$$n = \sin(A - B).$$

III. Les trois perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés d'un triangle se coupent en un même point.
Les équations de deux de ces droites sont

$$\alpha\sin A - \beta\sin B + \gamma\sin(A - B) = 0, \quad \beta\sin B - \gamma\sin C + \alpha\sin(B - C) = 0.$$

En éliminant successivement α, β, γ entre ces deux équations, on trouve, pour les lignes qui joignent l'intersection de ces deux droites aux trois sommets, $\frac{\alpha}{\cos A} = \frac{\beta}{\cos B} = \frac{\gamma}{\cos C}$: la symétrie de ces équations montre que les trois perpendiculaires se coupent en un même point.

IV. Trouver, d'après le n° 25, le sinus, le cosinus et la tangente de l'angle compris entre les deux droites $l\alpha + m\beta + n\gamma$, $l'\alpha + m'\beta + n'\gamma$.

V. Prouver que $\alpha\cos A + \beta\cos B + \gamma\cos C$ est perpendiculaire à

$$\alpha\sin A\cos A\sin(B-C)+\beta\sin B\cos B\sin(C-A)+\gamma\sin C\cos C\sin(A-B).$$

VI. Trouver l'équation de la droite menée par le point $(\alpha', \beta', \gamma')$ perpendiculairement à la droite γ.

Réponse. $\alpha(\beta'+\gamma'\cos A)-\beta(\alpha'+\gamma'\cos B)+\gamma(\beta'\cos B-\alpha'\cos A)=0.$

62. Nous avons vu qu'en prenant trois droites quelconques, α, β et γ, nous pourrions toujours mettre l'équation d'une quatrième droite sous la forme

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0,$$

et résoudre des problèmes, par une série d'équations en α, β, γ, sans faire aucune mention directe de x et de y. Nous pouvons maintenant envisager à un autre point de vue le principe exposé au n° 60, et au lieu de considérer α simplement comme abréviation de la quantité $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p$, le regarder comme exprimant la distance d'un point à une droite α. Nous nous trouvons ainsi conduits à imaginer un système de *coordonnées trilinéaires* dans lequel la position d'un point est définie par ses distances à trois droites fixes (qu'on appelle *lignes de référence*), et la position d'une droite par une équation homogène entre les distances de ses points aux lignes de référence, équation de la forme

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0.$$

Dans les coordonnées cartésiennes (coordonnées ordinaires en x et y), la plus grande simplification à laquelle on puisse arriver consiste à choisir pour axes deux des lignes les plus remarquables de la figure : dans les coordonnées trilinéaires, et c'est là leur avantage, on peut espérer une simplification plus grande, puisqu'on peut prendre trois des lignes de la question pour lignes de référence α, β, γ. Pour se convaincre de ce qui précède, il suffit de comparer les expressions données au n° 54 à celles qui leur correspondent dans le Chapitre II.

63. Les distances d'un point O aux droites de référence α, β, γ sont liées entre elles par la relation

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = M,$$

dans laquelle a, b, c, sont les longueurs des côtés, et M le double de l'aire du triangle ABC de référence. Cela est évident, puisque $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ expriment respectivement le double de l'aire des triangles OBC, OCA, OAB. Cette relation subsiste toujours, que le point O soit ou non dans l'intérieur du triangle ABC : rappelons-nous, en effet, que, lorsque le point ne se trouve pas d'un même côté d'une des lignes (α) de référence que des autres, sa distance à cette ligne doit recevoir le signe $-$: la quantité $a\alpha + b\beta + c\gamma$ devient alors le double de OCA + OAB − OBC, c'est-à-dire reste encore le double de l'aire du triangle.

Puisque $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$ sont proportionnels à a, b, c, la quantité

$$\alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C$$

est aussi constante : ce que d'ailleurs on peut démontrer autrement. En effet, cette quantité est égale à

$$\alpha \sin(\beta - \gamma) + \beta \sin(\gamma - \alpha) + \gamma \sin(\alpha - \beta),$$

et en remplaçant dans cette expression α, β, γ par leurs équivalents en x et y, on voit que les termes en x et y s'évanouissent.

Le théorème que nous venons de démontrer permet d'employer toujours des équations *homogènes* en α, β et γ : ainsi par exemple l'équation $\alpha = 3$ peut se mettre sous la forme homogène

$$M\alpha = 3(a\alpha + b\beta + c\gamma).$$

64. *Trouver en coordonnées trilinéaires l'équation d'une parallèle à la droite $l\alpha + m\beta + n\gamma$.*

En coordonnées cartésiennes, deux droites, $Ax + By + C$, $Ax + By + C'$, sont parallèles lorsque leurs équations ne diffèrent que par une constante. L'équation

$$l\alpha + m\beta + n\gamma + k(\alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C) = 0$$

représente donc une parallèle à la droite $l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$,

puisqu'elle ne diffère de l'équation de cette droite que par une quantité que nous venons de démontrer constante.

La droite $Ax + By + C + (Ax + By + C') = 0$ est aussi parallèle aux deux droites $Ax + By + C = 0$, $Ax + By + C' = 0$; elle est de plus à égale distance de chacune d'elles. Si donc deux équations $P = 0$, $P' = 0$, sont telles que $P - P' =$ const., l'équation $P + P' = 0$ représente une parallèle à P et P', passant à égale distance de ces droites.

EXERCICES.

I. Trouver l'équation de la parallèle menée à la base γ d'un triangle par le sommet C.

Réponse. $\alpha \sin A + \beta \sin B = 0$.

Cette droite passe en effet par α, β, et son équation, qui peut s'écrire

$$\gamma \sin C - (\alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C) = 0,$$

ne diffère de $\gamma = 0$ que par une constante.

Nous voyons ainsi que cette parallèle $\alpha \sin A + \beta \sin B$ et la médiane de la base $\alpha \sin A - \beta \sin B$ forment, avec α et β, un faisceau harmonique (57).

II. La droite joignant les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté. En effet, son équation est (60, Ex. II),

$$\alpha \sin A + \beta \sin C - \gamma \sin C = 0, \quad \text{ou} \quad 2\gamma \sin C = \alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C.$$

III. La droite $a\alpha - b\beta + c\gamma - d\delta$ (54, Ex. V) passe par le milieu de la ligne joignant (α, γ), (β, δ). En effet, la quantité $(a\alpha + c\gamma) + (b\beta + d\delta)$ est constante comme étant le double de l'aire du quadrilatère : donc les droites $a\alpha + c\gamma$ et $b\beta + d\delta$ sont parallèles; il en est de même de $(a\alpha + c\gamma) + (b\beta + d\delta)$ qui passe à égale distance des deux premieres. Cette dernière droite divise donc en deux parties égales la droite joignant les points (α, γ) et (β, δ) pris respectivement sur la première et sur la seconde droite.

65. *Écrire sous la forme $l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$ l'équation de la droite joignant les deux points (x', y'), (x'', y'').*

Désignons toujours par α', β', ..., les quantités

$$x' \cos \alpha + y' \sin \alpha' - p, \ldots.$$

La condition pour que les coordonnées x', y' satisfassent à l'équation

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$$

pourra s'écrire

$$l\alpha' + m\beta' + n\gamma' = 0,$$

et on aura de même

$$l\alpha'' + m\beta'' + n\gamma'' = 0.$$

Tirant de ces deux équations les valeurs du rapport $\frac{l}{n}$, $\frac{m}{n}$, et les portant dans l'équation primitive, on obtient pour l'équation de la droite joignant les deux points

$$\alpha(\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'') + \beta(\gamma'\alpha'' - \gamma''\alpha') + \gamma(\alpha'\beta'' - \alpha''\beta') = 0.$$

On doit observer que les équations en coordonnées trilinéaires étant homogènes, il n'y a pas lieu de considérer les distances absolues d'un point aux lignes de référence, mais seulement leurs rapports. Ainsi l'équation précédente ne sera pas altérée si l'on y remplace α', β', γ', par $\rho\alpha'$, $\rho\beta'$, $\rho\gamma'$. Si donc un point est donné comme intersection des droites $\frac{\alpha}{l} = \frac{\beta}{m} = \frac{\gamma}{n}$, on peut prendre l, m et n comme ses coordonnées trilinéaires. Car si nous désignons par ρ la valeur de ces fractions, les distances du point aux lignes de référence seront $l\rho$, $m\rho$, $n\rho$, ρ étant donné par l'équation $al\rho + bm\rho + cn\rho = M$; mais, ainsi que nous l'avons fait voir, nous n'avons pas besoin de déterminer ρ. Partant de là, nous pouvons prendre pour les coordonnées de l'intersection des médianes du triangle ABC : $\sin B \sin C$, $\sin C \sin A$, $\sin A \sin B$; pour celles des hauteurs : $\cos B \cos C$, $\cos C \cos A$, $\cos A \cos B$; pour celles du centre du cercle inscrit : 1, 1, 1; pour celles du cercle circonscrit : $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$, etc.

EXERCICES.

1. Trouver l'équation de la droite joignant l'intersection des hauteurs à celle des médianes.

Réponse.

$$\alpha \sin A \cos A \sin(B - C) + \beta \sin B \cos B \sin(C - A)$$
$$+ \gamma \sin C \cos C \sin(A - B) = 0.$$

II. Trouver l'équation de la ligne joignant les centres des cercles inscrits et circonscrits.

Réponse.

$$\alpha(\cos B - \cos C) + \beta(\cos C - \cos A) + \gamma(\cos A - \cos B) = 0.$$

66. On peut démontrer, comme au n° 7, que si une droite joignant deux points se trouve divisée par un troisième point dans le rapport $l : m$, la distance de ce point de division à une droite α sera $\frac{l\alpha' + m\alpha''}{l+m}$, α' et α'' étant les distances des deux premiers à cette même droite. Les coordonnées trilinéaires du point divisant, dans le rapport $l : m$, la droite joignant les points $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$, seront donc : $l\alpha' + m\alpha''$, $l\beta' + m\beta''$, $l\gamma' + m\gamma''$. Il est du reste évident que le point dont nous venons de donner les coordonnées se trouve sur la droite joignant les points donnés, puisque si α', β', γ', α'', β'', γ'', satisfont à la fois à l'équation $A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$, il en sera de même de $l\alpha' + m''\alpha$....

Les propositions suivantes se démontrent sans difficulté (*) :

Le point $l\alpha' - m\alpha''$ est quatrième harmonique aux trois points $l\alpha' + m\alpha'$, α', α''. Le rapport anharmonique des points $\alpha' - k\alpha''$, $\alpha' - l\alpha''$, $\alpha' - m\alpha''$, $\alpha' - n\alpha''$, a pour valeur

$$\frac{(n-l)(m-k)}{(n-m)(l-k)}.$$

Lorsque les deux systèmes de points $\alpha' - k\alpha''$, $\alpha' - l\alpha''$, ..., $\alpha_3 - k\alpha_4$, $\alpha_3 - l\alpha_4$, ..., sont situés chacun en ligne droite, ils sont *homographiques*, puisque le rapport anharmonique de quatre points quelconques de la première droite est égal au rapport anharmonique des quatre points correspondants de la seconde.

67. *Quelle est la ligne représentée par*

$$\alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C = 0.$$

(*) Le point $(l\alpha' + m\alpha'', l\beta' + m\beta'', l\gamma' + l\gamma'')$ est désigné, pour abréger, par point $l\alpha' + m\alpha''$.

Cette équation, par sa forme, rappelle celle de la ligne droite; mais nous avons vu (63) que la quantité $\alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C$ était constante et jamais nulle. En nous reportant à l'équation générale de la ligne droite $Ax + By + C = o$, nous voyons que les segments interceptés sur les axes par cette droite sont $-\frac{C}{A}$, $-\frac{C}{B}$; par conséquent, plus A et B sont petits, plus ces segments sont grands, et par suite plus grande est la distance à laquelle cette droite se trouve de l'origine. Si donc A et B sont nuls à la fois, les segments deviennent infinis, et la droite est à une distance infinie de l'origine. L'équation revient alors à celle-ci : $o.x + o.y + C = o$, et on voit que si elle ne peut être satisfaite par des valeurs finies de x et de y, elle peut l'être par des valeurs infinies, puisque le produit d'une quantité nulle par une quantité infinie est indéterminé et peut être fini. Donc *l'équation* $\alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C = o$ *représente une droite située tout entière à une distance infinie de l'origine.* En coordonnées cartésiennes, l'équation d'une pareille droite est $o.x + o.y + C = o$: nous la représenterons, pour abréger, par $C = o$.

68. Nous avons vu (64) que l'équation $\alpha + C = o$ représentait une parallèle à $\alpha = o$; ce que nous venons de dire montre que ce n'est là qu'une extension du principe exposé au n° 40. Une parallèle à α peut en effet être considérée comme rencontrant α à l'infini, et l'équation $\alpha + C = o$ représente (40) une droite passant par l'intersection de $\alpha = o$ et de $C = o$, autrement dit par l'intersection de α avec une droite à l'infini (67).

69. Les coordonnées cartésiennes ne sont qu'un cas particulier des coordonnées trilinéaires. Cependant il paraît exister au premier abord une différence essentielle entre les deux systèmes : les équations trilinéaires sont toutes homogènes, tandis que les équations cartésiennes que nous avons rencontrées jusqu'ici renferment un terme absolu, des termes du premier degré, du deuxième, etc. Mais un peu de réflexion montre que cette différence n'est qu'apparente, et que les équations

cartésiennes sont homogènes en réalité, bien qu'elles ne le soient pas dans la forme. L'équation $x = 3$, par exemple, signifie que la ligne x est égale à 3 mètres, 3 décimètres, ou à trois fois une unité linéaire quelconque; l'équation $xy = 9$ exprime que le rectangle xy est égal à 9 mètres carrés, 9 décimètres carrés, ou à neuf fois le carré fait sur une certaine unité linéaire, et ainsi des autres.

Pour que nos équations deviennent homogènes dans la forme, comme elles le sont au fond, nous n'avons qu'à représenter par z l'unité linéaire, et écrire l'équation de la droite

$$Ax + By + Cz = 0.$$

En la comparant avec l'autre équation

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0,$$

et nous rappelant (67) que, lorsqu'une ligne est à l'infini, son équation prend la forme $z = 0$, nous voyons que *les équations en coordonnées cartésiennes ne sont que la forme particulière prise par les équations en coordonnées trilinéaires, lorsque deux des lignes de référence devenant axes de coordonnées, la troisième ligne de référence s'éloigne à l'infini.*

70. Nous terminerons ce Chapitre par quelques indications sur les systèmes de *coordonnées tangentielles.* Dans un pareil système, la position d'une droite est définie par des coordonnées, et celle d'un point par une équation; toutefois, dans cet ouvrage, nous le considérerons moins comme un nouveau système de coordonnées, que comme une nouvelle manière d'interpréter les équations. L'équation d'une droite (en coordonnées trilinéaires ou cartésiennes) étant

$$\lambda x + \mu y + \nu z = 0,$$

la position de cette droite sera déterminée lorsque l'on connaîtra les quantités λ, μ, ν : nous pouvons dès lors appeler ces trois quantités (ou plutôt leurs rapports qui sont seuls à considérer) les *coordonnées tangentielles* de la ligne droite. Lorsque cette droite passe par un point fixe (x', y', z'), on a

la relation $\lambda x' + \mu y' + \nu z' = 0$; si donc on se donne une équation de la forme $a\lambda + b\mu + c\nu = 0$, entre les coordonnées λ, μ et ν d'une droite, elle exprime que cette droite passe par le point fixe (a, b, c) (51), et peut s'appeler l'équation de ce point.

Nous pouvons employer des abréviations pour les équations de points, et représenter par α, β, les quantités $x'\lambda + y'\mu + z'\nu$, $x''\lambda + y''\mu + z''\nu$; alors $l\alpha + m\beta = 0$ est l'équation du point divisant dans un rapport donné la droite qui joint les points (α, β); $l\alpha = m\beta$, $m\beta = n\gamma$, $n\gamma = l\alpha$ sont les équations de trois points en ligne droite; $\alpha + k\beta$, $\alpha - k\beta$, représentent deux points qui forment avec (α, β) un système harmonique.

Au reste, nous développerons ces analogies plus loin, et nous aurons alors occasion de montrer que les théorèmes respectivement relatifs aux points et aux droites ont une corrélation telle, que, les uns étant donnés, on peut en déduire les autres, et que souvent on peut les démontrer les uns et les autres, en interprétant diversement les mêmes équations. Les théorèmes auxquels nous venons de faire allusion s'appellent *théorèmes réciproques.*

EXERCICE.

Interpréter en coordonnées tangentielles les équations employées (60, Ex. II).

Soient α, β, γ les équations des points A, B, C; $m\beta - n\gamma$, $n\gamma - l\alpha$, $l\alpha - m\beta$, celles des points L, M, N; on voit que $m\beta + n\gamma - l\alpha$, $n\gamma + l\alpha - m\beta$, $l\alpha + m\beta - n\gamma$ représentent les sommets du triangle formé par LA, MB, NC : $l\alpha + m\beta + n\gamma$ définit le point O où concourent les droites joignant les sommets de ce triangle aux sommets du triangle primitif : $m\beta + n\gamma$, $n\gamma + l\alpha$, $l\alpha + m\beta$ représentent D, E, F.

Il est dès lors facile de voir les points de la figure qui forment des divisions harmoniques.

CHAPITRE V.

DES ÉQUATIONS D'UN DEGRÉ SUPÉRIEUR AU PREMIER REPRÉSENTANT DES LIGNES DROITES.

71. Avant de nous occuper des courbes représentées par des équations d'un degré supérieur au premier, nous allons examiner quelques cas où ces équations représentent des lignes droites.

Si l'on fait le produit d'un nombre quelconque d'équations $L=0$, $M=0$, $N=0$, on obtient une équation composée $LMN\ldots=0$, qui représente l'ensemble de toutes les lignes correspondantes à chacun de ses facteurs, puisqu'elle est satisfaite par les valeurs des coordonnées qui annulent séparément chacun d'eux. Réciproquement : *Si une équation d'un degré quelconque peut se décomposer en plusieurs équations de degré moindre, elle représente l'ensemble de tous les lieux correspondant à ces dernières équations.*

Ainsi lorsqu'une équation du $n^{ième}$ degré peut se décomposer en n facteurs du premier degré, elle représente n droites.

72. *Une équation homogène du $n^{ième}$ degré entre les variables représente n droites passant par l'origine.*

Soit l'équation

$$x^n - px^{n-1}y + qx^{n-2}y^2 - \ldots + ty^n = 0;$$

en la divisant par y^n, il vient

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n - p\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1} - q\left(\frac{x}{y}\right)^{n-2} - \ldots = 0.$$

Si $a, b, c, \ldots$, sont les n racines de cette équation, on peut l'écrire

$$\left(\frac{x}{y}-a\right)\left(\frac{x}{y}-b\right)\left(\frac{x}{y}-c\right)\ldots = 0,$$

et l'équation primitive se met sous la forme

$$(x - ay)(x - by)(x - cy)\ldots = 0.$$

On voit ainsi qu'elle représente n droites, $x - ay = 0, \ldots$, passant toutes par l'origine. En particulier, l'équation homogène

$$x^2 - pxy + qy^2 = 0$$

représente les deux droites $x - ay = 0$: a et b étant les racines de l'équation du deuxième degré

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - p\left(\frac{x}{y}\right) + q = 0.$$

On prouverait de la même manière que l'équation

$$(x-a)^n - p(x-a)^{n-1}(y-b) + q(x-a)^{n-2}(y-b)^2 + \ldots + t(y-b)^n = 0$$

représente n droites passant par le point (a, b).

EXERCICES.

I. Que représente l'équation $xy = 0$?

Réponse. Les deux axes; puisqu'elle est satisfaite par l'une ou l'autre des suppositions $x = 0$, $y = 0$.

II. Que représente l'équation $x^2 - y^2 = 0$?

Réponse. Les bissectrices $x \pm y = 0$ des angles formés par les axes (35).

III. Que représente l'équation $x^2 - 5xy + 6y^2 = 0$?

Réponse. $x - 2y = 0$, $x - 3y = 0$.

IV. Que représente l'équation $x^2 - 2xy\,\text{séc}\,\theta + y^2 = 0$?

Réponse. $x = y\,\text{tang}\left(45 \pm \frac{1}{2}\theta\right)$.

V. Quelles sont les lignes représentées par $x^2 - 2xy\,\text{tang}\,\theta - y^2 = 0$?

VI. Quelles sont les lignes représentées par $x^3 - 6x^2y + 11xy^2 - 6y^3 = 0$?

73. Examinons plus en détail les trois cas qui peuvent se présenter dans la résolution de l'équation $x^2 - pxy + qxy^2 = 0$,

ou plutôt de $\left(\frac{x}{y}\right)^2 - p\frac{x}{y} + q = 0$, suivant que les racines a et b de cette dernière sont réelles et inégales, ou bien imaginaires.

Le premier cas ne présente aucune difficulté : a et b sont les tangentes des angles que les droites font avec l'axe des y (les axes étant supposés rectangulaires) ; p est la somme de ces tangentes, et q est leur produit.

Dans le second cas, $a = b$: on dit habituellement que l'équation ne représente plus qu'une droite ($x - ay = 0$) ; mais alors le fait géométrique ne correspond pas à l'expression algébrique, et il y a avantage à faire disparaître ce désaccord. Nous regarderons donc, dans ce cas, l'équation comme représentant *deux droites qui coïncident*, et non pas une *seule droite*, de même que nous disons que l'équation a *deux racines égales*, et non pas qu'elle n'a qu'*une seule racine*.

Dans le troisième cas, les racines sont toutes les deux imaginaires, et on ne peut satisfaire à l'équation par aucunes coordonnées réelles autres que celles de l'origine $x = 0$, $y = 0$: aussi dit-on habituellement que l'équation ne représente plus un système de lignes droites, mais bien l'origine. Cette manière de s'exprimer soulève plusieurs objections, elle suppose, en effet, que, dans certains cas, une seule équation peut représenter un point; et cependant nous avons vu (n° 14) qu'il faut *deux* équations pour déterminer un point. Elle suppose, en outre, qu'une quantité innombrable d'équations peuvent être regardées comme celles d'un *même point;* car du moment où p^2 est inférieur à $4q$, les racines sont imaginaires, indépendamment des valeurs particulières de p et de q : et nous avons toujours considéré les équations différentes comme n'ayant pas la même signification géométrique. Nous trouverons donc préférable de calquer le langage de la géométrie sur celui de l'algèbre, en disant que l'équation représente deux droites imaginaires, et non pas qu'elle ne représente aucune droite, de même que, dans ce cas, où p^2 est inférieur à $4q$, nous disons que l'équation a deux racines imaginaires, et non pas qu'elle n'a point de racines.

En résumé, l'équation $x^2 - pxy + qy^2 = 0$ pouvant, dans

tous les cas, se mettre sous la forme $(x-ay)(x-by)=0$, représente toujours, quels que soient a et b, deux droites passant par l'origine. Si a et b sont réels, les deux droites sont réelles; lorsque a est égal à b, les deux droites coïncident, enfin quand a et b sont imaginaires, les deux droites sont imaginaires. Il peut paraître, de prime abord, indifférent d'adopter telle ou telle manière de s'exprimer; mais nous verrons par la suite à combien d'analogies importantes peuvent conduire les principes que nous venons d'indiquer.

De semblables remarques s'appliquent à l'équation

$$Ax^2+Bxy+Cy^2=0,$$

puisqu'on peut la ramener à la forme $x^2-pxy+qy^2=0$, en divisant tous ses termes par le coefficient de x^2. Elle représente donc toujours deux droites passant par l'origine; ces droites sont réelles lorsque B^2-4AC est positif, coïncident lorsque B^2-4AC est nul, enfin deviennent imaginaires lorsque B^2-4AC est négatif.

Nous interpréterons, de la même manière que ci-dessus, les racines égales ou imaginaires qui pourront se rencontrer dans l'équation homogène du $n^{ième}$ degré.

74. *Trouver l'angle compris entre les droites représentées par l'équation* $x^2-pxy+qy^2=0$.

L'équation équivalente étant $(x-ay)(x-by)=0$, la tangente de l'angle φ, compris entre les deux droites, aura pour expression (**25**)

$$\tang\varphi=\frac{a-b}{1+ab};$$

mais, d'après la théorie des équations,

$$ab=q,\quad a-b=\sqrt{p^2-4q},$$

donc

$$\tang\varphi=\frac{\sqrt{p^2-4q}}{1+q}.$$

Si l'équation avait été donnée sous la forme

$$Ax^2+Bxy+Cy^2=0,$$

on aurait trouvé,

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{A + C}.$$

Corollaire.—Les droites sont perpendiculaires lorsque tang φ devient infini, c'est-à-dire lorsque $q = -1$, ou $A + C = 0$, suivant que l'on considère la première ou la deuxième forme d'équation.

Quand les axes sont obliques, l'angle des deux droites est défini par la relation

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{\sin \omega \sqrt{B^2 - 4AC}}{A + C - B \cos \omega}.$$

EXERCICE.

Trouver l'angle compris entre les droites

$$x^2 + xy - 6y^2 = 0, \quad x^2 - 2xy \operatorname{séc} \theta + y^2 = 0.$$

RÉPONSE. $\varphi = 45^\circ$, $y = \theta$.

75. *Trouver l'équation des bissectrices des angles que forment les droites représentées par l'équation*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0.$$

Soient $x - ay = 0$, $x - by = 0$, les deux droites; $x - \mu y = 0$, l'équation d'une bissectrice. Pour déterminer μ, remarquons (18) que μ est la tangente de l'angle fait par la bissectrice avec l'axe des y, et que cet angle est égal à la demi-somme des angles faits par les droites avec cet axe : nous avons donc

$$\frac{2\mu}{1 - \mu^2} = \frac{a + b}{1 - ab};$$

mais, d'après la théorie des équations,

$$a + b = -\frac{B}{A}, \quad ab = \frac{C}{A},$$

par suite

$$\frac{2\mu}{1 - \mu^2} = -\frac{B}{A - C},$$

ou

$$\mu^2 - 2\frac{A - C}{B}\mu - 1 = 0.$$

Nous avons ainsi, pour déterminer μ, une équation du deuxième degré : une des racines sera la tangente de l'angle fait avec l'axe des y par la bissectrice *intérieure* des deux droites; l'autre, la tangente de l'angle fait par la bissectrice *extérieure* avec ce même axe. En remplaçant dans la dernière équation μ par sa valeur $\frac{x}{y}$, nous trouverons, pour l'équation composée des deux bissectrices,

$$x^2 - 2\frac{A - C}{B}xy - x^2 = 0 \ (*).$$

Elle montre (74) que ces bissectrices se coupent à angle droit.

On pourrait arriver au même résultat en posant (35) les équations des bissectrices intérieure et extérieure de l'angle formé par les droites $x - ay = 0$, $x - by = 0$, les multipliant l'une par l'autre, chassant les dénominateurs et remplaçant $a + b$, ab par leurs valeurs en fonction des coefficients A, B et C.

76. Nous avons vu que l'équation du second degré *peut* représenter deux droites, autrement dit, se décomposer en deux facteurs du premier degré; pour qu'il en soit ainsi, il faut que ses coefficients satisfassent à une condition que nous allons déterminer.

(*) Les racines de cette équation sont toujours réelles, même lorsque celles de l'équation primitive $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0$ sont imaginaires. Ainsi : « Les bissectrices des angles formés par un système de deux droites imaginaires sont réelles. » C'est dans l'existence de pareilles relations, entre des lignes réelles et des lignes imaginaires, que l'emploi de ces dernières puise quelque utilité.

L'équation générale du second degré

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0\ (^*),$$

peut s'écrire

$$ax^2 + 2(hy + g)x + by^2 + 2fy + c = 0,$$

et en la résolvant par rapport à x, on trouve

$$ax = -(hy + g) \pm \sqrt{(h^2 - ab)y^2 + 2(hg - af)y + (g^2 - ac)}.$$

Pour que cette expression puisse se ramener à la forme $x = my + n$, il faut que la quantité sous le radical soit un carré parfait, ce qui donne pour la condition cherchée

$$(h^2 - ab)(g^2 - ac) = (hg - af)^2,$$

ou, en développant et divisant par a,

$$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0.$$

Lorsque cette condition est remplie, les équations des deux droites s'obtiennent en prenant le radical successivement avec le signe + et avec le signe −.

EXERCICES.

1. Vérifier que l'équation

$$x^2 - 5xy + 4y^2 + x + 2y - 2 = 0$$

représente deux droites, et trouver ces droites.

(*) Il pourrait paraître plus naturel d'écrire cette équation :

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0;$$

mais, pour conserver une notation uniforme dans tout le cours de cet Ouvrage, nous avons cru devoir adopter, dès le commencement, l'autre forme, dont nous aurons lieu, plus tard, d'apprécier la commodité et la symétrie. Nous verrons, en effet, que cette équation est liée intimement avec l'équation homogène à trois variables, à laquelle on a donné la forme symétrique :

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0,$$

dont elle se déduit en y faisant $z = 1$. Le coefficient 2 qui se trouve dans plusieurs termes rend plus simples et plus faciles à retenir un certain nombre de formules auxquelles conduit l'emploi de cette équation.

Réponse. En résolvant cette équation par rapport à x, comme il vient d'être dit, on trouve, pour les deux droites,

$$x - y - 1 = 0, \quad x - 4y + 2 = 0.$$

II. Vérifier que l'expression suivante représente deux droites

$$(\alpha x + \beta y - r^2)^2 = (\alpha^2 + \beta^2 - r^2)(x^2 + y^2 - r^2).$$

III. Quelles sont les lignes représentées par l'équation

$$x^2 - xy + y^2 - x - y + 1 = 0?$$

Réponse. Les droites imaginaires $x + \theta y + \theta^2 = 0$, $x + \theta^2 y + \theta = 0$, θ étant une des racines cubiques imaginaires de l'unité.

IV. Déterminer h, de telle façon que l'équation

$$x^2 + 2hxy + y^2 - 5x - 7y + 6 = 0$$

représente deux droites.

Réponse. Remplaçant les coefficients de l'équation générale par les valeurs qui leur correspondent dans l'équation donnée, on trouve, pour déterminer h, l'équation du second degré $12h^2 - 35h + 25 = 0$, dont les racines sont $\frac{5}{3}$ et $\frac{5}{4}$.

* 77. La méthode exposée au numéro précédent, très-simple lorsqu'il s'agit d'une équation du second degré, n'est pas applicable aux équations du degré supérieur : aussi donnerons-nous une autre solution du problème, en cherchant dans quelles conditions on peut identifier une équation du second degré avec le produit des équations de deux droites

$$(\alpha x + \beta y - 1)(\alpha' x + \beta' y - 1) = 0.$$

Pour cela, il suffit d'effectuer le produit indiqué et d'égaler le coefficient de chaque terme à celui du terme correspondant de l'équation générale du deuxième degré, après avoir préalablement divisé cette dernière par c, de manière à rendre le terme absolu égal à l'unité. On obtient ainsi cinq équations : quatre d'entre elles servent à déterminer les valeurs des inconnues α, α', β, β', en fonction des coefficients de l'équation générale; la condition cherchée se trouve alors en exprimant que ces valeurs satisfont à la cinquième.

Ces cinq équations sont

$$\alpha\alpha' = \frac{a}{c}, \quad \alpha + \alpha' = -\frac{2g}{c}, \quad \beta\beta' = \frac{b}{c},$$

$$\beta + \beta' = -\frac{2f}{c}, \quad \alpha\beta' + \alpha'\beta = \frac{2h}{c}.$$

Des quatre premières, on déduit sans peine, pour déterminer α, α', β, β', deux équations du deuxième degré qu'on peut aussi trouver en observant que les valeurs de α, α', β, β' sont les réciproques des segments déterminés par les droites sur les axes. Ces segments s'obtiennent en faisant alternativement $x = 0$, $y = 0$ dans l'équation générale, et sont ainsi donnés par

$$ax^2 + 2gx + c = 0, \quad by^2 + 2fy + c = 0.$$

Si le lieu rencontre les axes aux points L, L', M, M', et s'il se compose de lignes droites, son équation peut aussi bien représenter les deux droites LM, L'M' que les deux droites LM', L'M, et doit par conséquent s'identifier avec l'une ou l'autre des équations

$$(\alpha x + \beta y - 1)(\alpha' x + \beta' y - 1) = 0,$$
$$(\alpha x + \beta' y - 1)(\alpha' x + \beta y - 1) = 0.$$

Si l'on effectue les multiplications, on voit que $\frac{2h}{c}$ doit avoir, non-seulement la valeur $\alpha\beta' + \beta\alpha'$ donnée plus haut, mais bien encore celle-ci $\alpha\beta + \alpha'\beta'$. On a ainsi, pour la somme de ces deux quantités,

$$\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha\beta' + \beta\alpha' = (\alpha + \alpha')(\beta + \beta') = \frac{4fg}{c^2},$$

et pour leur produit

$$(\alpha\beta + \alpha'\beta')(\alpha'\beta + \alpha\beta') = \alpha\alpha'(\beta^2 + \beta'^2) + \beta\beta'(\alpha^2 + \alpha'^2)$$
$$= \frac{a}{c}\,\frac{4f^2 - 2bc}{c^2} + \frac{b}{c}\,\frac{4g^2 - 2ac}{c^2}.$$

Les valeurs de $\frac{h}{c}$ sont donc données par l'équation du deuxième

degré

$$\frac{h^2}{c^2} - \frac{fg}{c^2}\frac{2h}{c} + \frac{af^2 + bg^2 - abc}{c^3} = 0,$$

qui se ramène facilement à la condition donnée précédemment.

EXERCICE.

Déterminer h, de manière que $x^2 + 2hxy + y^2 - 5x - 7y + 6 = 0$ représente deux droites (76, Ex. IV).

Les segments déterminés sur les axes sont donnés par les équations

$$x^2 - 5x + 6 = 0, \quad y^2 - 7y + 6 = 0,$$

dont les racines sont

$$x = 2, \quad x = 3, \quad y = 1, \quad y = 6.$$

En formant les équations des droites joignant les points ainsi obtenus, on voit que si l'équation donnée représente des droites, elle doit être de l'une ou de l'autre des formes

$$(x + 2y - 2)(2x + y - 6) = 0, \quad (x + 3y - 3)(3x + y - 6) = 0.$$

Effectuant les multiplications, on trouve facilement les valeurs de h.

* 78. *Trouver le nombre des conditions auxquelles doivent satisfaire les coefficients de l'équation générale du $n^{ième}$ degré, pour qu'elle représente un système de n droites.*

Nous procéderons, comme au numéro précédent, en comparant l'équation générale, dans laquelle nous aurons rendu le terme absolu égal à l'unité par une division préalable, avec le produit des équations des n droites

$$(\alpha x + \beta y - 1)(\alpha' x + \beta' y - 1)(\alpha'' x + \beta'' y - 1)\ldots = 0.$$

Nous trouverons ainsi (N étant le nombre des termes de l'équation générale) $N - 1$ équations, puisque les termes absolus sont identiques : $2n$ d'entre elles suffisant à déterminer les $2n$ inconnues $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$, il faudra $N - 1 - 2n$ conditions qui s'obtiendront en éliminant $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ entre les $N - 1$ équations.

En écrivant l'équation générale sous la forme

$$\begin{array}{c} A \\ + Bx + Cy \\ + Dx^2 + Exy + Fy^2 \\ + Gx^3 + Hx^2y + Kxy^2 + Ly^3 \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

on voit immédiatement que le nombre des termes est égal à la somme des termes d'une progression arithmétique, et que

$$N = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{1.2},$$

formule d'où l'on déduit successivement

$$N - 1 = \frac{n(n+3)}{1.2}, \quad N - 1 - 2n = \frac{n(n-1)}{1.2}.$$

CHAPITRE VI.

DU CERCLE.

79. Nous croyons utile, avant de discuter l'équation générale du second degré, d'étudier d'abord le cercle, pour faire voir, par ce cas assez simple, comment on peut déduire de l'équation d'une courbe toutes ses propriétés, sans en avoir fait une étude préalable par les procédés géométriques.

L'équation en coordonnées rectangulaires du cercle qui a pour centre le point (α, β) et pour rayon r est (17)

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2.$$

Si le centre est à l'origine des coordonnées, on a $\alpha=0$, $\beta=0$, et l'équation devient

$$x^2+y^2=r^2.$$

Lorsqu'on prend pour axe des x un diamètre, et pour axe des y une perpendiculaire à l'extrémité de ce diamètre, $\alpha=r$, $\beta=0$, l'équation devient

$$x^2+y^2=2rx.$$

Ces deux derniers cas se rencontrent assez souvent dans les applications.

80. Dans l'équation du cercle en coordonnées rectangulaires, les coefficients de x^2 et de y^2 sont égaux, et le terme en xy manque.

L'équation générale

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

ne peut donc représenter un cercle que si $a=b$, $h=0$, et alors on peut la ramener à la forme $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$,

en suivant un procédé analogue à celui qui est usité dans la résolution de l'équation du deuxième degré. Après avoir, par une division préalable, ramené les coefficients de x^2 et de y^2 à l'unité, il suffit de faire passer dans le second membre le terme absolu, et de compléter les carrés en ajoutant aux deux membres la somme des carrés de la moitié des coefficients de x et de y.

En appliquant ce procédé à l'équation

$$a(x^2+y^2)+2gx+2fy+c=0,$$

on trouve

$$\left(x+\frac{g}{a}\right)^2+\left(y+\frac{f}{a}\right)^2=\frac{g^2+f^2-ac}{a^2}.$$

Les coordonnées du centre sont $-\frac{g}{a}$, $-\frac{f}{a}$, et le rayon a pour valeur

$$\frac{1}{a}\sqrt{g^2+f^2-ac}.$$

Si g^2+f^2 est plus petit que ac, le rayon du cercle est imaginaire, et l'équation, étant équivalente à

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+r^2=0,$$

ne peut être satisfaite par aucune valeur réelle de x et de y.

Lorsque g^2+f^2 est égal à ac, le rayon est nul, et l'équation, étant équivalente à

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=0.$$

ne peut être satisfaite par aucune coordonnée autre que celles du point (α, β). On dit alors que cette équation est celle du point (α, β); mais pour des raisons déjà énoncées (73), nous préférons la considérer comme l'équation d'*un cercle infiniment petit*. Nous avons vu aussi (73) qu'on pouvait la regarder comme l'équation de deux droites imaginaires $(x-\alpha)\pm(y-\beta)\sqrt{-1}=0$, passant par le point (α, β). De même l'équation $x^2+y^2=0$ peut être regardée comme celle

d'un cercle infiniment petit ayant l'origine pour centre, ou bien comme celle des deux droites imaginaires $x \pm y\sqrt{-1} = 0$.

EXERCICE.

Ramener à la forme $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2$ les équations

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y = 20, \quad 3x^2 + 3y^2 - 5x - 7y + 1 = 0.$$

Réponse.

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25, \quad \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{6}\right)^2 = \frac{62}{36};$$

les coordonnées du centre et le rayon sont, dans le premier cas, $(1, 2)$ et 5; et dans le second, $\left(\frac{5}{6}, \frac{7}{6}\right)$ et $\frac{1}{6}\sqrt{62}$.

81. L'équation du cercle en coordonnées obliques est peu usitée; on l'obtient en exprimant (n° 5) que la distance d'un point au centre est égale au rayon; on trouve ainsi

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + 2(x-\alpha)(y-\beta)\cos\omega = r^2.$$

En la comparant à l'équation générale, on voit qu'elle ne peut représenter un cercle que si $a = b$, $h = a\cos\omega$, et alors, en égalant les coefficients des termes correspondants, on trouve, pour déterminer les coordonnées du centre et le rayon, les équations

$$\alpha + \beta\cos\omega = -\frac{g}{a}, \quad \beta + \alpha\cos\omega = -\frac{f}{a},$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta\cos\omega - r^2 = \frac{c}{a}.$$

Les deux premières équations qui servent à déterminer α et β ne renferment pas c, par suite: *deux cercles sont concentriques lorsque leurs équations ne diffèrent que par une constante.*

Lorsque $c = 0$, l'origine est sur la courbe, puisque son équation est satisfaite par les coordonnées $x = 0$, $y = 0$ de l'origine. Cette remarque est générale, et *lorsqu'une équation n'a pas de terme absolu, la courbe qu'elle représente passe par l'origine.*

82. *Trouver les coordonnées des points où une droite $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ rencontre un cercle $x^2 + y^2 = r^2$.*

En égalant l'une à l'autre les valeurs de y tirées de chacune des équations, on trouve, pour déterminer x,

$$\frac{p - x\cos\alpha}{\sin\alpha} = \sqrt{r^2 - x^2},$$

ou, en réduisant,

$$x^2 - 2px\cos\alpha + p^2 - r^2\sin^2\alpha = 0;$$

d'où

$$x = p\cos\alpha \pm \sin\alpha\sqrt{r^2 - p^2};$$

on trouverait de même

$$y = p\cos\alpha \mp \cos\alpha\sqrt{r^2 - p^2}.$$

Il est facile de s'assurer, en substituant ces valeurs dans les équations données, que le signe — dans les valeurs de y, correspond au signe + dans la valeur de x, et *vice versâ.*

Puisque nous sommes conduit à une équation du deuxième degré, c'est-à-dire ayant deux racines réelles ou imaginaires pour déterminer x, nous devons en conclure, pour faire correspondre le fait géométrique à l'expression algébrique, qu'une droite *quelconque* rencontre un cercle en deux points réels ou imaginaires.

Lorsque p est plus grand que r, c'est-à-dire lorsque la distance de la droite au centre est plus grande que le rayon, cette droite, considérée géométriquement, ne rencontre pas le cercle, et cependant l'analyse donne des valeurs imaginaires définies pour les coordonnées des points d'intersection. Aussi ne dirons-nous pas que la droite ne rencontre pas le cercle, mais bien qu'elle le rencontre en deux points imaginaires, et cela parce que nous n'admettons pas que l'équation du deuxième degré n'a pas de racines, mais bien qu'elle a deux racines imaginaires. Par point imaginaire, nous n'entendons pas autre chose qu'un point ayant une de ses coordonnées imaginaires, ou toutes les deux. C'est là une pure conception analytique que nous ne chercherons pas à représenter géométriquement,

pas plus que nous n'attachons de signification arithmétique aux valeurs des racines imaginaires d'une équation. La considération des points imaginaires est nécessaire pour conserver à nos raisonnements toute leur généralité; nous trouverons en effet bientôt plusieurs cas dans lesquels la droite joignant deux points imaginaires est réelle et jouit de toutes les propriétés géométriques de la droite qui lui correspond quand ces points sont réels.

83. Lorsque $p = r$, la géométrie nous apprend que la droite est tangente au cercle, et l'analyse nous conduit au même résultat, puisque les deux valeurs de x sont égales entre elles, ainsi que celles de y : ce qui signifie que les points correspondant à ces valeurs coïncident. Nous ne considérerons donc pas la tangente comme n'ayant avec le cercle qu'un seul point commun, mais bien comme le rencontrant en deux points qui coïncident; attendu que l'on ne dit pas que l'équation du deuxième degré qui les détermine n'a qu'une seule racine, mais bien qu'elle a deux racines égales. Aussi définirons-nous en général *la tangente à une courbe comme la droite joignant deux points infiniment voisins de la courbe.*

On trouve de même une équation du deuxième degré, pour déterminer les points d'intersection de la droite $Ax + By + C$ avec le cercle donné par l'équation générale, et cette droite est tangente au cercle, lorsque cette équation du deuxième degré a ses racines égales.

EXERCICES.

I. Trouver les coordonnées de l'intersection de $x^2 + y^2 = 65$, $3x + y = 25$.

Réponse. $(7, 4)$ et $(8, 1)$.

II. Trouver l'intersection de $(x - c)^2 + (y - 2c)^2 = 25c^2$, $4x + 3y = 35c$.

Réponse. La droite tangente au point $(5c, 5c)$.

III. Dans quel cas $y = mx + b$ est-il tangent à $x^2 + y^2 = r^2$?

Réponse. Lorsque $b^2 = r^2(1 + m^2)$.

IV. Dans quel cas la droite $y = mx$ menée par l'origine touche-t-elle $a(x^2 + 2xy\cos\omega + y^2) + 2gx + 2fy + c = 0$?

Réponse. Les points d'intersection sont donnés par l'équation

$$a(1 + 2m\cos\omega + m^2)x^2 + 2(g + fm)x + c = 0,$$

qui a ses racines égales lorsque

$$(g + fm)^2 = ac(1 + 2m\cos\omega + m^2);$$

on en déduit une équation du deuxième degré pour déterminer m.

V. Trouver les tangentes menées par l'origine à

$$x^2 + y^2 - 6x - 2y + 8 = 0.$$

Réponse. $x - y = 0, \quad x + 7y = 0.$

84. Il est souvent préférable, pour fixer la position d'un cercle donné par son équation, de chercher les segments qu'il détermine sur les axes plutôt que son centre et son rayon, d'autant plus que trois points étant suffisants pour le déterminer les quatre points qu'on obtiendra ainsi pourront servir à mieux le faire connaître. En faisant alternativement $y = 0$, $x = 0$, dans l'équation générale du cercle, nous trouvons, pour déterminer ces points, les deux équations du deuxième degré

$$ax^2 + 2gx + c = 0, \quad ay^2 + 2fy + c = 0.$$

L'axe des x sera tangent au cercle lorsque les racines de la première équation seront égales, c'est-à-dire lorsque $g^2 = ac$; l'axe des y sera pareillement tangent lorsque $f^2 = ac$.

Réciproquement, si l'on veut trouver l'équation d'un cercle déterminant des segments λ, λ', sur l'axe des x, on aura, en faisant $a = 1$, pour obtenir les coefficients de l'équation,

$$2g = -(\lambda + \lambda'), \quad c = \lambda\lambda'.$$

Si le cercle doit intercepter des segments μ et μ' sur l'axe des y, il vient

$$2f = -(\mu + \mu'), \quad c = \mu\mu'.$$

On peut déduire de là le théorème connu $\mu\mu' = \lambda\lambda'$.

EXERCICES.

I. Trouver les points où les axes sont coupés par

$$x^2 + y^2 - 5x - 7y + 6 = 0.$$

RÉPONSE. $x = 3$, $x = 2$; $y = 6$, $y = 1$.

II. Quelle est l'équation du cercle tangent aux axes à une distance a de l'origine?

RÉPONSE. $x^2 + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 = 0$.

III. Trouver l'équation d'un cercle en prenant pour axes une tangente et une droite passant par le point de contact.

RÉPONSE. Dans ce cas, λ, λ' et μ sont nuls; il est d'ailleurs facile de voir sur une figure que $\mu' = 2r\sin\omega$.

L'équation cherchée est donc $x^2 + 2xy\cos\omega + y^2 - 2ry\sin\omega = 0$.

85. *Trouver l'équation de la tangente en un point (x', y'), d'un cercle donné.*

Puisque la tangente à une courbe (83) peut être considérée comme une droite joignant deux points infiniment voisins de cette courbe, nous pourrons déduire son équation de celle de la corde passant par deux points quelconques (x', y'), (x'', y''), de la courbe, en y faisant $x' = x''$, $y' = y''$.

Supposons d'abord que le cercle ait son centre à l'origine, son équation sera

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

L'équation de la droite passant par les deux points (x', y'), (x'', y''), est (29)

$$\frac{y - y'}{x - x'} = \frac{y' - y''}{x' - x''}.$$

Si on y fait $x' = x''$, $y' = y''$, le second membre de l'équation devient indéterminé; cela tient à ce que nous n'avons pas encore exprimé que les points (x', y'), (x'', y'') se trouvent sur le cercle : en introduisant cette condition, on fait disparaître l'indétermination, car on a

$$r^2 = x'^2 + y'^2 = x''^2 + y''^2,$$

et

$$x'^2 - x''^2 = y''^2 - y'^2,$$

par suite

$$\frac{y' - y''}{x' - x''} = -\frac{x' + x''}{y' + y''}.$$

L'équation de la corde est alors

$$\frac{y - y'}{x - x'} = -\frac{x' + x''}{y' + y''}.$$

et en y faisant $x' = x''$, $y' = y''$, on aura pour l'équation de la tangente

$$\frac{y - y'}{x - x'} = -\frac{x'}{y'}.$$

qui devient, toutes réductions faites,

$$xx' + yy' = r^2.$$

On peut encore arriver à cette équation de la manière suivante (*) :

L'équation

$$(x - x')(x - x'') + (y - y')(y - y'') = x^2 + y^2 - r^2$$

représente la corde joignant les deux points (x', y'), (x'', y'') d'un cercle. En effet, elle représente une ligne droite, puisque les termes en x^2 et y^2 disparaissent après le développement : d'ailleurs, si on y fait $x = x'$, $y = y'$, le premier membre s'évanouit, et il en est de même du second, attendu que (x', y') est un point du cercle : cette droite passe donc par un point (x', y') du cercle ; on verrait de même qu'elle passe par un autre point (x'', y''). En faisant $x' = x''$, $y' = y''$ dans cette équation, on obtient pour celle de la tangente

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 = x^2 + y^2 - r^2,$$

qui se ramène, comme plus haut, à la forme

$$xx' + yy' = r^2.$$

(*) Cette méthode est due à M. Burnside

Si l'on veut rapporter les équations ci-dessus à une autre origine, de telle sorte que α et β deviennent les coordonnées du centre, il suffit d'y remplacer (n° 8) x, x', y, y', respectivement par $x-\alpha$, $x'-\alpha$, $y-\beta$, $y'-\beta$: on trouve ainsi, pour l'équation du cercle,

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2,$$

et pour celle de la tangente,

$$(x-\alpha)(x'-\alpha)+(y-\beta)(y'-\beta)=r^2,$$

équation qu'il est facile de se rappeler en raison de son analogie avec celle du cercle.

Corollaire. — La tangente $xx'+yy'=r^2$ est perpendiculaire au rayon $x'y-y'x=0$ aboutissant au point de contact (32).

86. La méthode que nous avons indiquée en dernier lieu peut s'appliquer à l'équation générale (*)

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0,$$

et l'équation

$$a(x-x')(x-x'')+2h(x-x')(y-y'')+b(y-y')(y-y'')$$
$$=ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c$$

représente la corde passant par les deux points (x', y'), (x'', y'') de la courbe, puisqu'elle est du premier degré, et qu'elle est satisfaite par les coordonnées x', y', x'', y'' de ces deux points. En y faisant $x''=x'$, $y''=y'$, on trouve pour l'équation de

(*) Lorsque cette équation représente un cercle, il est bien entendu que $b=a$, $h=a\cos\omega$; mais, puisque la méthode est générale et indépendante des valeurs particulières de b ou de h, nous aimons mieux obtenir immédiatement les formules générales dont nous aurons besoin plus tard dans la discussion de l'équation générale du deuxième degré.

la tangente

$$a(x-x')^2+2h(x-x')(y-y')+b(y-y')^2$$
$$=ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c,$$

ou

$$2ax'x+2h(x'y+y'x)+2by'y+2gx+2fy+c$$
$$=ax'^2+2hx'y'+by'^2;$$

si l'on ajoute de part et d'autre $2gx'+2fy'+c$, en observant que (x', y') est un point de la courbe, on trouve

$$ax'x+h(x'y+y'x)+by'y+g(x+x')$$
$$+f(y+y')+c=0.$$

On se rappellera facilement cette équation de la tangente, si l'on observe qu'elle se déduit de celle de la courbe en y remplaçant respectivement x^2 et y^2 par $x'x$, $y'y$; $2xy$, $2x$, $2y$ par $x'y+y'x$, $x'+x$, $y'+y$.

EXERCICES.

I. Trouver les équations des tangentes aux courbes $xy=c^2$ et $y^2=px$.

Réponse. $x'y+y'x=2c^2$, $2yy'=p(x+x')$.

II. Trouver la tangente au point $(5, 4)$ de $(x-2)^2+(y-3)^2=10$.

Réponse. $3x+y=19$.

III. Que représente l'équation $(x'+x'')x+(y'+y'')y=r^2+x'x''+y'y''$ par rapport au cercle $x^2+y^2=r^2$?

Réponse. La corde joignant (x', y'), (x'', y'').

IV. Trouver la condition pour que $Ax+By+C=0$ touche.

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2.$$

Réponse. $\dfrac{A\alpha+B\beta+C}{\sqrt{A^2+B^2}}=r$, puisque la distance de (α, β) à cette ligne doit être égale au rayon.

87. *Mener une tangente au cercle $x^2+y^2=r^2$ par un point (x', y').*

Soient x'', y'' les coordonnées du point de contact; puisque, par hypothèse, les coordonnées x', y' satisfont à l'équation de la tangente en (x'', y''), nous aurons la condition

$$x'x'' + y'y'' = r^2,$$

et comme (x'', y'') se trouve sur le cercle, nous aurons aussi

$$x''^2 + y''^2 = r^2.$$

Ces deux équations suffisent pour déterminer (x'', y'') : et en les résolvant, on trouve

$$x'' = \frac{r^2x' \pm ry'\sqrt{x'^2 + y'^2 - r^2}}{x'^2 + y'^2}, \quad y'' = \frac{r^2y' \mp rx'\sqrt{x'^2 + y'^2 - r^2}}{x'^2 + y'^2}.$$

Par un point quelconque, on peut donc mener *deux* tangentes à un cercle : ces tangentes sont réelles si $x'^2 + y'^2 > r^2$, c'est-à-dire quand le point est en dehors du cercle; elles sont imaginaires si $x'^2 + y'^2 < r^2$, c'est-à-dire lorsque le point est à l'intérieur du cercle; et enfin elles coïncident lorsque $x'^2 + y'^2 = r^2$, autrement dit quand le point est sur le cercle.

88. Puisque les coordonnées des points de contact s'obtiennent en résolvant par rapport à x et y les deux équations

$$xx' + yy' = r^2, \quad x^2 + y^2 = r^2,$$

nous pouvons dire que, géométriquement, ces points se trouvent à l'intersection du cercle $x^2 + y^2 = r^2$, et de la droite $xx' + yy' = r^2$. Cette droite passe par les points de contact des tangentes menées par (x', y'), comme on peut du reste le vérifier, en formant l'équation de la droite joignant les deux points dont nous avons trouvé les coordonnées au numéro précédent (*).

(*) En général, l'équation de la tangente à une courbe exprime une relation entre les coordonnées d'un point quelconque de la tangente et celles du point de contact. Si nous voulons, étant donné un point de la tangente, trouver le point de contact, nous n'avons qu'à considerer comme coordonnées courantes celles de ce dernier point (en supprimant l'accent qui s'y trouve dans l'équation de la tangente, et accentuant au contraire les coordonnees du point donne),

Nous voyons donc que, quelles que soient les tangentes menées par (x', y'), réelles ou imaginaires, la droite qui joint leurs points de contact sera la droite réelle $xx' + yy' = r^2$, que nous appellerons la *polaire* de (x', y') par rapport au cercle. Cette polaire est évidemment perpendiculaire à la droite $x'y - y'x = 0$ joignant le point (x', y') au centre, et passe à une distance $\frac{r^2}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$ de ce centre (23). On peut donc construire la polaire d'un point P, en joignant ce point au centre C, prenant sur PC un point M tel que CM.CP $= r^2$, et élevant à PC une perpendiculaire en M.

L'équation de la polaire est de même forme que celle de la tangente; elle n'en diffère que parce que le point (x', y'), dont elle renferme les coordonnées, n'est pas nécessairement sur le cercle; dans le cas où ce point s'y trouverait, elle serait alors identique à l'équation de la tangente : la polaire d'un point du cercle est donc la tangente menée au cercle en ce point.

Le point (x', y') s'appelle le *pôle* de la droite

$$xx' + yy' = r^2.$$

89. *Trouver l'équation de la polaire de (x', y') par rapport à la courbe*

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0.$$

Nous avons vu (86) que l'équation de la tangente est

$$ax'x + h(x'y + y'x) + by'y + g(x' + x) + f(y' + y) + c = 0,$$

et elle exprime une relation entre les coordonnées x, y d'un point de la tangente et les coordonnées x', y' du point de

et nous aurons l'equation d'un lieu dont l'intersection, avec la courbe donnée, nous fournira les points de contact. Si, par exemple, l'equation $xx'^2 + yy'^2 = r^3$ représente la tangente à une courbe au point (x', y'), les points de contact des tangentes menées par un point (x', y') se trouveront sur la courbe $x'x^2 + y'y^2 = r^3$. Ce n'est que dans le cas des courbes du deuxième degre que l'equation qui determine les points de contact est de même forme que celle de la tangente.

contact. Pour montrer que les coordonnées du premier point sont connues, nous leur donnerons un accent, et nous supprimerons l'accent des coordonnées du dernier pour indiquer que ce sont celles qu'il faut trouver, ce qui ne change rien à l'équation, puisqu'elle est symétrique par rapport à x, y, x', y'. Cette équation, qui, lorsque (x', y') est sur la courbe, est celle de la tangente en ce point, représente, quand le point (x', y') n'est plus sur la courbe, la droite sur laquelle doivent se trouver les points de contact des tangentes réelles ou imaginaires menées par (x', y') : elle est alors l'équation de la polaire. Si l'on y remplace x, y par x', y', on obtient le même résultat qu'en substituant x', y' à x, y dans l'équation de la courbe : ce résultat ne peut donc être nul que si (x', y') se trouve sur la courbe. Donc la polaire d'un point ne passe par ce point que s'il est situé sur la courbe, à laquelle elle est alors tangente.

Corollaire. — La polaire de l'*origine* est $gx + fy + c = 0$.

EXERCICES.

I. Trouver la polaire de $(4, 4)$ par rapport à $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 13$.

RÉPONSE. $3x + 2y = 20$.

II. Trouver la polaire de $(4, 5)$ par rapport à $x^2 + y^2 - 3x - 4y = 8$.

RÉPONSE. $5x + 6y = 48$.

III. Trouver le pôle de $Ax + By + C = 0$ par rapport à $x^2 + y^2 = r^2$.

RÉPONSE. Le point se trouve facilement en comparant l'équation donnée avec $xx' + yy' = r^2$, ce qui donne $\left(-\frac{Ar^2}{C}, -\frac{Br^2}{C}\right)$.

IV. Trouver le pôle de $3x + 4y = 7$ par rapport à $x^2 + y^2 = 14$.

RÉPONSE. $(6, 8)$.

V. Trouver le pôle de $2x + 3y = 6$ par raport à $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 12$.

RÉPONSE. $(-11, -16)$.

90. *Trouver la longueur de la tangente menée par un point au cercle* $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - r^2 = 0$.

Le carré de la distance d'un point (x, y) au centre est

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2,$$

il est égal au carré de la longueur cherchée augmenté du carré du rayon. On trouvera donc le carré de la longueur de la tangente en substituant, dans le premier membre de l'équation du cercle

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-r^2=0,$$

les coordonnées du point par où elle est menée aux coordonnées courantes.

Puisque l'équation générale, en coordonnées rectangulaires,

$$a(x^2+y^2)+2gx+2fy+c=0,$$

peut, en étant divisée par a (80), se ramener à la forme

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-r^2=0,$$

on aura le carré de la tangente menée par un point au cercle dont l'équation est donnée sous la forme la plus générale, en divisant cette équation par a et en y remplaçant les coordonnées courantes par celles du point.

Le carré de la tangente menée par l'origine s'obtient en faisant dans l'expression précédente $x=0$, $y=0$; il est donc égal au terme constant c divisé par le coefficient a de x^2.

Le même raisonnement s'appliquerait au cas des coordonnées obliques.

*91. *Trouver le rapport dans lequel la ligne joignant deux points (x', y'), (x'', y'') est coupée par un cercle donné.*

Nous suivrons la marche indiquée au n° 42. Les coordonnées d'un point quelconque de la droite peuvent (n° 7) être mises sous la forme

$$\frac{lx''+mx'}{l+m}, \quad \frac{ly''+my'}{l+m}.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation du cercle

$$x^2+y^2-r^2=0,$$

on trouve, après réduction faite, pour déterminer le rapport $\frac{l}{m}$, l'équation du deuxième degré

$$l^2(x''^2+y''^2-r^2)+2lm(x'x''+y'y''-r^2) \\ +m^2(x'^2+y'^2-r^2)=0,$$

la connaissance du rapport $l:m$ entraîne celle des coordonnées des points où la droite rencontre le cercle. La symétrie de cette équation rend quelquefois cette méthode plus commode que celle indiquée au n° 82.

Lorsque le point (x'', y'') se trouve sur la polaire de (x', y'), on a (88)

$$x'x''+y'y''-r^2=0,$$

l'équation précédente se décompose alors en deux facteurs $l+\mu m$, $l-\mu m$, et la droite passant par (x', y') et (x'', y'') est coupée intérieurement et extérieurement dans le même rapport, d'où ce théorème connu : *une droite menée par un point est divisée harmoniquement par ce point, le cercle et la polaire du point.*

*92. *Trouver l'équation des tangentes menées par un point à un cercle donné.*

Nous avons déjà (87) obtenu les coordonnées des points de contact; en substituant leurs valeurs dans l'équation $xx''+yy''=r^2$, nous trouverons pour l'équation d'une tangente

$$r(xx'+yy'-x'^2-y'^2)+(xy'-yx')\sqrt{x'^2+y'^2-r^2}=0,$$

et pour celle de l'autre

$$r(xx'-yy'-x'^2-y'^2)-(xy'-yx')\sqrt{x'^2+y'^2-r^2}=0.$$

En multipliant ces équations l'une par l'autre, nous aurons l'équation des tangentes qui ne contient pas de radical. Mais les résultats obtenus au numéro précédent nous permettent d'arriver plus simplement au résultat; en effet, l'équation qui

détermine le rapport $\frac{l}{m}$ aura des racines égales lorsque la droite passant par (x', y'), (x'', y'') sera tangente au cercle : si donc (x'', y'') est l'un ou l'autre des points de contact des tangentes menées par (x', y'), ses coordonnées devront satisfaire à la relation

$$(x'^2 + y'^2 - r^2)(x^2 + y^2 - r^2) = (xx' + yy' - r^2)^2,$$

qui est ainsi l'équation des tangentes menées par (x', y'), et il n'est pas difficile de prouver qu'elle est identique à celle qu'on obtient par la première méthode.

Les méthodes indiquées dans ce numéro et le précédent s'appliquent également à l'équation générale, et l'on a alors, pour déterminer le rapport $l : m$, l'équation du deuxième degré

$$\begin{aligned} &l^2(ax''^2 + 2hx''y'' + by''^2 + 2gx'' + 2fy'' c) \\ &\quad + 2lm[ax'x'' + h(x'y'' + y'x'') \\ &\qquad + by'y'' + g(x' + x'') + f(y' + y'') + c] \\ &\quad + m^2(ax'^2 + 2hx'y' + by'^2 + 2gx' + 2fy' + c) = 0, \end{aligned}$$

et de cette équation résulte, comme ci-dessus, que, lorsque (x'', y'') se trouve sur la polaire de (x', y'), la droite joignant ces points est divisée harmoniquement, et que l'équation des tangentes menées par (x', y') est

$$\begin{aligned} &(ax'^2 + 2hx'y' + by'^2 + 2gx' + 2fy' + c) \\ &\quad \times (ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c) \\ &= [ax'x + h(x'y + y'x) + byy' + g(x + x') + f(y + y') + c]^2. \end{aligned}$$

93. *Trouver l'équation du cercle passant par trois points donnés.*

Il suffit de substituer successivement, dans l'équation générale

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0,$$

les coordonnées de chacun des trois points, pour trouver trois équations qui déterminent les inconnues g, f, c. On peut

aussi obtenir l'équation cherchée en déterminant les coordonnées du centre et le rayon, comme au n° **5**, **Ex. V.**

EXERCICES.

I. Trouver l'équation du cercle passant par les points (2, 3), (4, 5), (6, 1).

Réponse. $\left(x - \frac{13}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{8}{3}\right)^2 = \frac{50}{9}$. (*Voir* n° 5, Ex. V.)

II. Trouver l'équation du cercle passant par l'origine, (2, 3) et (3, 4). On a

$$c = 0, \quad 13 + 4g + 6f = 0, \quad 2f + 6g + 8f = 0,$$

d'où l'on tire

$$2g = -23, \quad 2f = 11.$$

III. Prenant les mêmes axes qu'au n° 48, Ex. I, trouver l'équation du cercle passant par l'origine et les milieux des côtés CA et CB, et montrer qu'il passe aussi par le milieu de la base AB.

Réponse. $2p(x^2 + y^2) - p(s - s')x - (p^2 + ss')y = 0.$

94.** ***Exprimer l'équation du cercle passant par les trois points (x', y'), (x'', y''), (x''', y'''), en fonction des coordonnées de ces points.

On n'a qu'à substituer dans

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0,$$

les valeurs de g, f, c, déduites des équations

$$(x'^2 + y'^2) + 2gx' + 2fy' + c = 0,$$
$$(x''^2 + y''^2) + 2gx'' + 2fy'' + c = 0,$$
$$(x'''^2 + y'''^2) + 2gx''' + 2fy''' + c = 0.$$

On trouve ainsi pour l'équation cherchée

$$\begin{aligned}
&(x^2 + y^2)[x'(y'' - y''') + x''(y''' - y') + x'''(y' - y'')] \\
&-(x'^2 + y'^2)[x''(y''' - y) + x'''(y - y'') + x(y'' - y''')] \\
&+(x''^2 + y''^2)[x'''(y - y') + x(y' - y''') + x'(y''' - y)] \\
&-(x'''^2 + y'''^2)[x(y' - y'') + x'(y'' - y) + x''(y - y')] = 0,
\end{aligned}$$

comme on peut le voir en multipliant respectivement chacune des quatre équations primitives par les facteurs de $(x^2+y^2),\ldots$, dans les dernières équations, et ajoutant ensemble les résulats obtenus; car alors les quantités g, f, c, s'évanouissent.

Si l'on veut trouver la condition pour que quatre points soient sur un même cercle, il suffit de remplacer, dans la dernière équation, x, y, par les coordonnées x_4, y_4, du quatrième point. On arrive ainsi à une condition qu'on peut interpréter géométriquement de la manière suivante : si A, B, C et D sont quatre points situés sur un même cercle, O étant un cinquième point quelconque, on aura

$$\overline{OA}^2 . BCD + \overline{OC}^2 . ABD = \overline{OB}^2 . ACD + \overline{OD}^2 . ABC,$$

BCD représentant l'aire du triangle BCD....

95. *Équation polaire du cercle.*

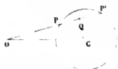
On peut trouver l'équation polaire du cercle, en remplaçant x et y par $\rho \cos\theta$, $\rho \sin\theta$ (n° **12**), dans l'une ou l'autre des équations connues

$$a(x^2+y^2)+2gx+2fy+c=0, \quad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2;$$

mais on peut aussi l'obtenir directement en partant de la définition même du cercle.

Soient en effet O le pôle (*fig.* 40), C le centre du cercle, OC l'axe fixe,

Fig. 40.



r le rayon et d la distance OC. Menons un rayon vecteur OP, joignons PC, on a

$$\overline{PC}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OC}^2 - 2\,OP.OC \cos POC,$$

ou, en faisant $OP = \rho$, angle $POC = \theta$;

$$r^2 = \rho^2 + d^2 - 2\rho d \cos\theta;$$

par suite, l'équation polaire du cercle est

$$\rho^2 - 2\rho d \cos\theta + d^2 - r^2 = 0.$$

Lorsque le pôle est sur le cercle, on a $r^2 = d^2$, et l'équation se réduit à la forme la plus simple

$$\rho = 2r\cos\theta.$$

On aurait pu arriver immédiatement à ce résultat, en observant que l'angle inscrit dans une demi-circonférence est droit, ou bien en substituant à x et y leurs valeurs en coordonnées polaires, dans l'équation (79)

$$x^2 + y^2 = 2rx.$$

Lorsque l'axe fixe ne coïncide pas avec OC, mais fait avec cette droite un angle α, on trouve (44) pour l'équation du cercle

$$\rho^2 - 2\rho d \cos(\theta - \alpha) + d^2 - r^2 = 0.$$



CHAPITRE VII.

THÉORÈMES ET PROBLÈMES SUR LE CERCLE.

96. Dans le Chapitre précédent, nous avons fait voir comment on pouvait former les équations du cercle et celles des lignes les plus remarquables qui s'y rapportent : dans celui-ci, nous chercherons à faire ressortir par des exemples la signification de ces équations, en les appliquant à la démonstration de quelques-unes des propriétés les plus importantes du cercle. Les exercices que nous avons donnés au n° 49 peuvent nous servir ici d'introduction ; après avoir reconnu, parmi ces lieux géométriques, ceux qui sont des cercles, on en déterminera la position soit en cherchant leurs centres et leurs rayons (80), soit en déterminant les points où ils rencontrent les axes (84).

Les exercices suivants se rapportent au même genre de question.

EXERCICES.

I. Dans un triangle ABC, on donne la base AB et l'angle ACB qui lui est opposé : trouver le lieu du sommet C.

Soient x', y'; x'', y'' les coordonnées des extrémités de la base, et C l'angle donné. L'équation d'un des côtés étant

$$y - y' = m(x - x'),$$

celle de l'autre côté, qui fait avec lui un angle C, sera (33)

$$(1 + m \operatorname{tang} C)(y - y'') = (m - \operatorname{tang} C)(x - x'');$$

éliminant m, on trouve pour l'équation du lieu

$$\begin{aligned} &\operatorname{tang} C[(y - y')(y - y'') + (x - x')(x - x'')] \\ &\quad + x(y' - y'') - y(x' - x'') + x'y'' - y'x'' = 0. \end{aligned}$$

Si l'angle C est droit, les équations des côtés seront

$$y - y' = m(x - x'), \quad m(y - y'') + (x - x'') = 0,$$

et celle du lieu

$$(y-y')(y-y'')+(x-x')(x-x'')=0.$$

II. On donne la base d'un triangle et l'angle qui lui est opposé : trouver le lieu des intersections des hauteurs du triangle.

Conservons les mêmes notations; les équations des hauteurs sont

$$m(y-y'')+(x-x'')=0,$$
$$(m-\operatorname{tang}C)(y-y')+(1+m\operatorname{tang}C)(x-x')=0,$$

et en éliminant m, on trouve pour l'équation du lieu :

$$\operatorname{tang}C[(y-y')(y-y'')+(x-x')(x-x'')]$$
$$=x(y-y'')+y(x'-x'')+x'y''-y'x''.$$

Cette équation, ne différant de celle de l'Exercice précédent que par le signe de tangC, est celle que nous trouverions dans ce dernier cas si, la base restant la même, nous cherchions le lieu du sommet correspondant à un angle ACB supplémentaire du premier.

III. On donne un certain nombre de points : trouver le lieu du point tel, que la somme de m' fois le carré de sa distance r' au premier point, m'' fois le carré de sa distance r'' au deuxième point, etc., soit égale à une constante; autrement dit, en adoptant la notation du n° 50, Ex. IV, que $\Sigma(mr^2)$ soit une constante C.

Le carré de la distance d'un point (x, y) au point (x', y') est

$$(x-x')^2+(y-y'^2).$$

Multipliant ce carré par m', et ajoutant ce produit aux produits correspondants obtenus pour la distance de (x, y) aux autres points (x'', y''), (x''', y'''),..., nous trouverons pour l'équation du lieu

$$\Sigma(m)x^2+\Sigma(m)y^2-2\Sigma(mx')x-2\Sigma(my')y+\Sigma(mx'^2)+\Sigma(my'^2)=C.$$

Ce lieu est un cercle dont le centre a pour coordonnées

$$x=\frac{\Sigma(mx')}{\Sigma(m)},\quad y=\frac{\Sigma(my')}{\Sigma(m)},$$

et se confond avec le point que nous avons appelé centre des distances proportionnelles (50, Ex. IV).

Nous aurons, pour déterminer la valeur du rayon R de ce cercle, la relation

$$R^2\Sigma(m)=\Sigma(mr^2)-\Sigma(m\rho^2),$$

dans laquelle ρ représente la distance d'un point quelconque du système au centre ; par suite, $\Sigma(m\rho^2)$ est la somme de m' fois le carré de la distance au premier point, etc.

IV. Par un point O, on mène successivement, à chacun des côtés a, b, c d'un triangle, des parallèles qui coupent les autres côtés en B, C ; C', A' ; A'', B'' : trouver le lieu du point O tel, que la somme des rectangles

$$BO.OC + C'O.OA' + A''O.OB''$$

soit constante et égale à m^2.

Si l'on prend deux des côtés a et b du triangle pour axes, l'équation du lieu est

$$x\left(a - x - \frac{a}{b}y\right) + y\left(b - y - \frac{b}{a}x\right) + \frac{c^2xy}{ab} = m^2,$$

ou, en désignant par C l'angle compris entre a et b,

$$x^2 + y^2 + 2xy\cos C - ax - by + m^2 = 0.$$

Ce lieu est un cercle concentrique au cercle circonscrit : les coordonnées α et β du centre sont données par les équations

$$2(\alpha + \beta\cos c) = a, \quad 2(\beta + \alpha\cos c) = b,$$

qui permettent de trouver le lieu des centres du cercle circonscrit, lorsque deux des côtés du triangle étant donnés de position ont leurs longueurs liées par une relation donnée.

V. La droite qui joint le point O à un point fixe A détermine, sur l'axe des x, le même segment que détermine sur l'axe des y la perpendiculaire menée par le point O à la droite OA : trouver le lieu du point O.

VI. On joint un point O aux sommets A, B, C d'un triangle ; puis on mène par les sommets A, B, C des perpendiculaires aux droites OA, OB, OC : trouver le lieu du point O tel, que ces perpendiculaires se coupent en un seul point.

97. Les exercices suivants se rapportent au problème du n° 82 : trouver les coordonnées des points où une droite rencontre un cercle.

EXERCICES.

I. Trouver le lieu des points milieux des cordes menées dans un cercle parallèlement à une droite donnée.

Soit $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ l'équation d'une de ces cordes : α est donné par hypothèse, et p est indéterminé. Les abscisses des points où cette droite rencontre le cercle se déduisent de l'équation (n° 82)

$$x^2 - 2px\cos\alpha + p^2 - r^2\sin^2\alpha = 0.$$

Si les racines de cette équation sont x' et x'', l'abscisse du milieu de la corde sera (n° 7) $\frac{1}{2}(x' + x'')$ ou, d'après la théorie des équations, $p\cos\alpha$. On trouverait de même $y = p\sin\alpha$ pour l'ordonnée du milieu de la corde. L'équation du lieu est donc $y = x\tang\alpha$: c'est celle de la perpendiculaire abaissée du centre sur la direction donnée.

II. Trouver la condition pour que le segment déterminé par le cercle $x^2 + y^2 = r^2$ sur la droite $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ soit vu du point (x', y') sous un angle droit.

Nous avons trouvé (96, Ex. II), pour que les droites joignant (x'', y''), (x''', y''') à (x', y') soient perpendiculaires, la condition

$$(x' - x'')(x' - x''') + (y' - y'')(y' - y''') = 0.$$

Soient (x'', y''), (x''', y''') les points où la droite rencontre le cercle, on aura, d'après l'Exercice précédent,

$$x'' + x''' = 2p\cos\alpha, \quad x''x''' = p^2 - r^2\sin^2\alpha,$$
$$y'' + y''' = 2p\sin\alpha, \quad y''y''' = p^2 - r^2\cos^2\alpha,$$

et en portant ces valeurs dans l'équation précédente, on trouvera, pour la condition cherchée,

$$x'^2 + y'^2 - 2px'\cos\alpha - 2py'\sin\alpha + 2p^2 - r^2 = 0.$$

III. Trouver le lieu des points milieux des cordes vues sous un angle droit d'un point donné (x', y').

Si x et y sont les coordonnées du point milieu, nous avons (Ex. I)

$$p\cos\alpha = x, \quad p\sin\alpha = y, \quad p^2 = x^2 + y^2.$$

Substituant ces valeurs dans la condition trouvée plus haut, il vient

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + x^2 + y^2 = r^2.$$

IV. On donne une droite MN et un cercle : trouver un point O tel, qu'en menant par ce point une corde AB, le produit des distances AM, BN des extrémités A, B de la corde à MN soit constant.

Prenons MN pour axe des x et pour axe des y une perpendiculaire passant par le centre du cercle, l'équation du cercle sera

$$x^2 + (y - \beta)^2 = r^2.$$

Si x', y' sont les coordonnées du point cherché O, l'équation d'une corde quelconque sera $y - y' = m(x - x')$; en éliminant x entre cette équation et celle du cercle, nous trouverons, pour déterminer y, une équation du deuxième degré dont le produit des racines,

$$\frac{(y' - mx')^2 + m^2(\beta^2 - r^2)}{1 + m^2},$$

devra être constant, c'est-à-dire indépendant de m; ce qui ne peut arriver que si le numérateur est divisible par $1 + m^2$, et alors $x' = 0$, $y'^2 = \beta^2 - r^2$.

V. Trouver la condition pour que le segment déterminé sur la corde $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ par le cercle

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

soit vu de l'origine sous un angle droit.

L'équation des deux droites joignant l'origine aux extrémités de la corde peut s'obtenir en multipliant les termes du deuxième degré de l'équation du cercle par p^2, ceux du premier degré par $p(x\cos\alpha + y\sin\alpha)$, et le terme constant par $(x\cos\alpha + y\sin\alpha)^2$; en effet, l'équation à laquelle on arrive est homogène, et elle est satisfaite par les points du cercle qui se trouvent sur la corde $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$. Cette équation, développée et ordonnée, devient

$$\begin{aligned}(p^2 + 2gp\cos\alpha + c\cos^2\alpha)\,x^2 \\ + 2(g\sin\alpha + f\cos\alpha + c\sin\alpha\cos\alpha)\,xy + (p^2 + 2fp\sin\alpha + c\sin^2\alpha)\,y^2 = 0,\end{aligned}$$

et les deux droites sont perpendiculaires lorsque (74)

$$2p^2 + 2p(g\cos\alpha + f\sin\alpha) + c = 0.$$

VI. Trouver le lieu du pied de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur la corde vue de l'origine sous un angle droit.

Les coordonnées polaires du lieu sont p et α dans l'équation que nous venons de trouver : l'équation de ce lieu est donc

$$2(x^2 + y^2) + 2gx + 2fy + c = 0,$$

et représente le même cercle que celle de l'Exercice III.

VII. Par un point fixe P d'un diamètre AB, on mène une corde MN, les droites AM, AN déterminent sur la tangente au cercle en B des segments dont le rectangle est constant.

Prenons pour axes le diamètre AB et la tangente en A, l'équation du cercle sera $x^2 + y^2 - 2rx = 0$; soient x', o les coordonnées du point P, l'équation de MN sera $y = m(x - x')$; en formant alors, comme à l'Exercice V, l'équation des droites AM, AN et en y faisant $x = 2r$, nous trouverons les valeurs des segments dont le produit $4r^2\frac{x'-2r}{x'}$ est indépendant de m.

98. Nous allons déduire des équations du n° 88 un certain nombre de propriétés des pôles et polaires.

Lorsqu'un point A, (x', y'), *est situé sur la polaire de* B, *le point* B, (x'', y''), *se trouve sur la polaire de* A.

La condition pour que (x', y') appartienne à la polaire de (x'', y'') est $x'x'' + y'y'' = r^2$, et c'est aussi celle pour que le point (x'', y'') se trouve sur la polaire de (x', y'). Le même raisonnement peut s'appliquer à l'équation générale (89), et on voit facilement qu'en remplaçant, dans l'équation de la polaire de (x', y'), les coordonnées courantes par x'' et y'', on obtient le même résultat qu'en substituant dans l'équation de la polaire de (x'', y''), x' et y' aux coordonnées courantes. On énonce quelquefois ce théorème ainsi qu'il suit : *Lorsque la polaire de* B *passe par un point fixe* A, *le point* B *glisse sur la polaire du point* A.

Ce théorème et les suivants sont vrais pour toutes les courbes du deuxième degré.

99. Étant donnés un cercle et un triangle ABC, si l'on prend par rapport au cercle les polaires de A, B, C, on forme un nouveau triangle A'B'C', qu'on appelle *triangle polaire*, et dans lequel A', B' et C' sont respectivement les pôles de BC, CA et AB. Dans le cas particulier où les polaires de A, B, C sont respectivement BC, CA, AB, le second triangle se confond avec le premier, auquel on donne alors le nom de *triangle autopolaire* (*).

(*) On appelle quelquefois ce triangle, *triangle conjugué* : c'est à la fois pour éviter une confusion et pour conserver l'heureuse symétrie de l'expression anglaise (*conjugate, self-conjugate*), que nous l'avons appelé triangle *autopolaire*.

Les droites AA', BB', CC', qui joignent les sommets d'un triangle à ceux de son triangle polaire, se coupent en un même point.

Soient (x', y'), (x'', y''), (x''', y''') les sommets A, B, C du premier triangle; les sommets du second seront donnés par les intersections successives des polaires de ces points. L'équation de la droite AA' joignant (x', y') à l'intersection de $xx'' + yy'' - r^2 = o$, et $xx''' + yy''' - r^2 = o$, sera (40)

$$(x'x''' + y'y''' - r^2)(xx'' + yy'' - r^2) \\ - (x'x'' + y'y'' - r^2)(xx''' + yy''' - r^2) = o.$$

On trouverait de même, pour les équations de BB' et CC',

$$(x'x'' + y'y'' - r^2)(xx''' + yy''' - r^2) \\ - (x''x''' + y''y''' - r^2)(xx' + yy' - r^2) = o,$$

$$(x''x''' + y''y''' - r^2)(xx' + yy' - r^2) \\ - (x'x''' + y'y''' - r^2)(xx'' + yy'' - r^2) = o,$$

et l'on voit que ces trois droites (40) se coupent en un même point.

Nous aurions pu démontrer ce théorème en partant de l'équation générale. Désignons, pour abréger, par $P_1 = o$ la polaire $axx' + h(xy' + yx') + \ldots = o$ (89) de (x', y'), par P_2, P_3 celles de (x'', y''), (x''', y'''); représentons par le symbole (1.2) le résultat $[ax'x'' + h(x''y' + y''x') + \ldots]$ de la substitution de x'' et y'' aux coordonnées courantes dans l'équation de la polaire de (x', y').

Les équations des droites AA', BB', CC', seront

$$(1.3)\,P_2 = (1.2)\,P_3,$$
$$(1.2)\,P_3 = (2.3)\,P_1,$$
$$(2.3)\,P_1 = (1.3)\,P_2;$$

et l'on voit qu'elles se coupent en un seul point. Il s'ensuit (60, Ex. III) que les intersections des côtés correspondants du triangle et de son triangle polaire se trouvent en ligne droite.

Le théorème suivant n'est qu'un cas particulier de celui que nous venons de démontrer :

Si un cercle est inscrit dans un triangle, et qu'on joigne chaque sommet du triangle au point de contact du côté opposé, on obtiendra trois droites qui se couperont en un même point.

100. *On joint deux à deux, directement et transversalement, les points où deux droites fixes issues d'un point* O *rencontrent un cercle : si* P *est l'intersection des droites directes, et* Q *celle des droites transverses, la droite* PQ *est la polaire du point* O.

Prenons les deux droites fixes pour axes; et soient λ, λ', μ et μ', les segments que détermine le cercle sur leurs directions. Les équations des lignes directes seront alors

$$\frac{x}{\lambda}+\frac{y}{\mu}-1=0,\quad \frac{x}{\lambda'}+\frac{y}{\mu'}-1=0;$$

et celles des droites transverses

$$\frac{x}{\lambda'}+\frac{y}{\mu}-1=0,\quad \frac{x}{\lambda}+\frac{y}{\mu'}-1=0.$$

L'équation de la ligne PQ sera

$$\frac{x}{\lambda}+\frac{x}{\lambda'}+\frac{y}{\mu}+\frac{y}{\mu'}-2=0,$$

puisque (40) elle passe par l'intersection P des droites directes

$$\frac{x}{\lambda}+\frac{y}{\mu}-1=0,\quad \frac{x}{\lambda'}+\frac{y}{\mu'}-1=0$$

et celle Q des transversales

$$\frac{x}{\lambda}+\frac{y}{\mu'}-1=0,\quad \frac{x}{\lambda'}+\frac{y}{\mu}-1=0.$$

D'ailleurs l'équation du cercle étant

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0,$$

λ et λ' seront les racines de $ax^2+2gx+c=0$ (84), et l'on

aura

$$\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'} = -\frac{2g}{c};$$

on trouverait de même

$$\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu'} = -\frac{2f}{c}.$$

L'équation de PQ devient alors

$$gx + fy + c = 0:$$

cette droite est par suite la polaire de l'origine O (89). Si le point O est fixe et les deux droites mobiles, le lieu des points P et Q sera la polaire du point O.

101. *On donne deux points quelconques* A *et* B, *et leurs polaires par rapport à un cercle dont le centre est* O; AP *et* BQ *étant les distances des points* A *et* B *aux polaires de* B *et de* A; *démontrer que l'on a la relation*

$$\frac{OA}{AP} = \frac{OB}{BQ}.$$

L'équation de la polaire de A, (x', y'), est $xx' + yy' - r^2 = 0$; et la distance BQ du point B, (x'', y''), à cette polaire (34)

$$\frac{x'x'' + y'y'' - r^2}{\sqrt{(x'^2 + y'^2)}}.$$

Mais puisque $OA = \sqrt{(x'^2 + y'^2)}$, on a

$$OA . BQ = x'x'' + y'y'' - r^2.$$

On trouverait de même

$$OB . AP = x'x'' + y'y'' - r^2.$$

Donc

$$\frac{OA}{AP} = \frac{OB}{BQ}.$$

102. Il est souvent commode, pour étudier certaines questions relatives au cercle, d'en représenter les points, non plus par deux coordonnées, mais au moyen d'une seule variable indépendante. Si nous désignons par θ' l'angle que le rayon aboutissant au point (x', y') fait avec l'axe des x, nous

aurons (le centre du cercle étant pris pour origine),

$$x' = r\cos\theta', \quad y' = r\sin\theta',$$

et nous pourrons, au moyen de ces valeurs, simplifier certaines de nos formules.

L'équation de la tangente en un point (x', y') prend alors la forme

$$x\cos\theta' + y\sin\theta' = r,$$

et celle de la corde joignant les points (x', y'), (x'', y''), qui est (86)

$$x(x' + x'') + y(y' + y'') = r^2 + x'x'' + y'y'',$$

devient

$$x\cos\frac{1}{2}(\theta' + \theta'') + y\sin\frac{1}{2}(\theta' + \theta'') = r\cos\frac{1}{2}(\theta' - \theta''),$$

θ' et θ'' étant les angles que font avec l'axe des x les rayons menés aux extrémités de la corde.

Cette équation aurait pu se déduire directement de l'équation générale de la ligne droite (23) $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$, en observant que l'angle compris entre l'axe des x et la perpendiculaire à la corde est égal à la demi-somme des angles formés avec le même axe, par les rayons menés aux extrémités de la corde, et que la longueur de cette perpendiculaire est égale à

$$r\cos\frac{1}{2}(\theta' - \theta'').$$

EXERCICES.

I. Trouver les coordonnées de l'intersection de deux tangentes au cercle.

Réponse. Les tangentes étant

$$x\cos\theta' + y\sin\theta' = r, \quad x\cos\theta'' + y\sin\theta'' = r,$$

les coordonnées de leur intersection seront

$$x = r\frac{\cos\frac{1}{2}(\theta' + \theta'')}{\cos\frac{1}{2}(\theta' - \theta'')}, \quad y = r\frac{\sin\frac{1}{2}(\theta' + \theta'')}{\sin\frac{1}{2}(\theta' - \theta'')}.$$

II. Trouver le lieu de l'intersection des tangentes menées aux extrémités d'une corde de longueur constante.

Réponse. En effectuant la substitution indiquée plus haut dans

$$(x'-x'')^2+(y'-y'')^2 = \text{const.},$$

on trouve

$$\cos(\theta'-\theta'') = \text{const.}, \quad \text{ou} \quad \theta'-\theta'' = \text{const.}$$

Lorsqu'on donne la longueur de la corde $2r\sin\delta$, on a $\theta'-\theta''=2\delta$, et les coordonnées trouvées à l'Exercice précédent satisfont à la relation

$$(x^2+y^2)\cos^2\delta = r^2.$$

III. Quel est le lieu du point où une corde de longueur constante est coupée dans un rapport donné?

Réponse. En écrivant (n° 7) les valeurs des coordonnées de ce point, on voit qu'elles satisfont à la relation

$$x^2+y^2 = \text{const.}$$

103. Nous avons vu que la tangente au cercle $x^2+y^2=r^2$ a pour équation

$$x\cos\theta+y\sin\theta=r;$$

on verrait de même que celle de la tangente au cercle

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$$

est

$$(x-\alpha)\cos\theta+(y-\beta)\sin\theta=r.$$

Réciproquement, si l'équation d'une droite renferme une indéterminée θ sous la forme

$$(x-\alpha)\cos\theta+(y-\beta)\sin\theta=r,$$

cette droite est tangente au cercle $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$.

EXERCICES.

I. Si une corde de longueur constante est inscrite dans un cercle, elle est constamment tangente à un autre cercle.

En effet, dans l'équation de cette corde

$$x\cos\frac{1}{2}(\theta'+\theta'')+y\sin\frac{1}{2}(\theta'+\theta'')=r\cos\frac{1}{2}(\theta'-\theta''),$$

l'angle $\theta'-\theta''=2\delta$ est connu, et $\theta'+\theta''$ est indéterminé : la corde touche donc toujours le cercle $x^2+y^2=r^2\cos^2\delta$.

II. Si la somme des distances d'un certain nombre de points fixes (x', y'), (x'', y''),... à une droite, multipliées chacune par un facteur constant m', m'',..., est constante, cette droite est constamment tangente à un cercle.

Cet énoncé ne diffère de celui du n° 50, Ex. IV, qu'en ce que la somme est constante au lieu d'être nulle; en employant les mêmes notations, on trouve, pour l'équation de la droite,

$$[x\Sigma(m)-\Sigma(mx')]\cos\alpha+[y\Sigma(m)-\Sigma(my')]\sin\alpha=\text{const.}$$

Elle est constamment tangente au cercle

$$\left[x-\frac{\Sigma(mx')}{\Sigma(m)}\right]^2+\left[y-\frac{\Sigma(my')}{\Sigma(m)}\right]^2=\text{const.},$$

qui a pour centre le centre des distances proportionnelles du système des points donnés.

104. Nous terminerons ce Chapitre par quelques problèmes relatifs à l'emploi des coordonnées polaires.

EXERCICES.

I. Le rectangle construit sur les segments OP.OP', déterminés par un cercle de centre O sur une sécante quelconque issue d'un point fixe O, est constant.

Prenons le point fixe O pour pôle, l'équation du cercle sera (95)

$$\rho^2-2\rho^2 d\cos\theta+d^2-r^2=0.$$

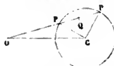
Les racines de cette équation sont évidemment les valeurs OP, OP' des rayons vecteurs correspondant à une valeur donnée de θ.

D'après la théorie des équations on a $OP.OP'=d^2-r^2$; ce rectangle est indépendant de θ et, par suite, constant, quelle que soit la direction suivant laquelle soit menée la sécante. Si le point O est en dehors du cercle, le rectangle devient égal au carré de la tangente (d^2-r^2).

II. Par un point fixe O (*fig.* 41), on mène à un cercle une sécante sur laquelle on prend une longueur OQ égale à une moyenne arithmétique des segments OP, OP' : trouver le lieu du point Q.

En nous reportant à l'équation du deuxième degré de l'exemple précé-

Fig. 41.



dent, nous avons $OP + OP' = 2d\cos\theta$; d'ailleurs d'après l'énoncé,

$$OP + OP' = 2OQ = \rho.$$

L'équation polaire du lieu sera donc $\rho = d\cos\theta$, et représente un cercle décrit sur OC comme diamètre.

Le problème que nous venons de résoudre aurait pu s'énoncer ainsi : trouver le lieu du milieu des cordes qui passent par un point fixe.

III. On prend OQ (*fig.* 41) moyenne harmonique entre OP, OP' : trouver le lieu du point Q.

On a alors par hypothèse $OQ = \frac{2.OP.OP'}{OP + OP'}$; mais $OP + OP' = 2d\cos\theta$, $OP.OP' = d^2 - r^2$; l'équation polaire du lieu est donc

$$\rho = \frac{d^2 - r^2}{d\cos\theta} \quad \text{ou} \quad \rho\cos\theta = \frac{d^2 - r^2}{d}:$$

elle représente une droite (44) perpendiculaire à OC, passant à une distance $d - \frac{r^2}{d}$ du point O, et, par suite, à une distance $\frac{r^2}{c}$ du centre C du cercle. Donc (88) le lieu est la *polaire* du point O.

Nous pouvons aussi résoudre cette question et d'autres semblables, lorsque l'équation du cercle est donnée sous la forme

$$a(x^2 + y^2) + 2gx + 2fy + c = 0.$$

Transformée en coordonnées polaires, cette équation devient

$$\rho^2 + 2\left(\frac{g}{a}\cos\theta + \frac{f}{a}\sin\theta\right)\rho + \frac{c}{a} = 0,$$

et en opérant comme ci-dessus, on trouve, pour l'équation polaire du lieu,

$$\rho = -\frac{r}{g\cos\theta + f\sin\theta}.$$

En revenant aux coordonnées primitives, cette équation devient

$$gx + fy + c = 0:$$

c'est celle que nous avons obtenue précédemment (89) pour la polaire.

IV. Étant donné un point O et une droite PM, on prend sur le rayon vecteur OP de la droite une longueur OQ inverse de celle du rayon vecteur : trouver le lieu du point Q.

V. Dans un triangle, on donne un sommet, l'angle C à ce sommet et le rectangle k^2 des côtés qui le comprennent ; le deuxième sommet glisse sur une droite ou un cercle : trouver le lieu du troisième sommet.

Prenons le sommet fixe pour pôle, et désignons par ρ, ρ' les côtés de l'angle donné ; par θ et θ' les angles que ces côtés font avec l'axe fixe : on a

$$\rho\rho' = k^2, \quad \theta - \theta' = C.$$

En écrivant l'équation polaire du lieu que décrit le deuxième sommet, on aura une relation entre ρ et θ ; et en y remplaçant ρ et θ par $\frac{k^2}{\rho'}$ et $\theta' - C$, aura entre ρ' et θ' une relation qui sera l'équation du lieu décrit par le troisième sommet.

On résoudrait le problème de la même manière, si on donnait le rapport des côtés au lieu de leur rectangle.

VI. Par l'intersection de deux cercles, on mène une droite : trouver le lieu du point milieu du segment que les cercles déterminent sur cette droite.

Les équations des cercles seront de la forme

$$\rho = 2r\cos(\theta - \alpha), \quad \rho = 2r'\cos(\theta - \alpha'),$$

et celle du lieu sera alors

$$\rho = r\cos(\theta - \alpha) + r'\cos(\theta - \alpha'),$$

qui représente aussi un cercle.

VII. Par un point O pris sur un cercle, on mène trois cordes quelconques ; sur chacune d'elles, comme diamètre, on décrit un cercle. Les trois cercles ainsi obtenus (qui passent évidemment en O) se coupent en

trois autres points qui sont en ligne droite (*Cambridge Mathematical Journal*, vol. I, p. 169).

Prenons le point fixe pour pôle, et un diamètre pour axe : l'équation du cercle sera, d étant le diamètre,

$$\rho = d\cos\theta.$$

Le diamètre du cercle construit sur la corde faisant avec l'axe un angle α sera $d\cos\alpha$, et l'équation du cercle correspondant

$$\rho = d\cos\alpha.\cos(\theta - \alpha).$$

L'équation du deuxième cercle, dont le diamètre fait un angle β avec l'axe, sera

$$\rho = d\cos\beta.\cos(\theta - \beta).$$

Nous trouverons les coordonnées polaires de l'intersection de ces deux cercles, en cherchant quelle est la valeur de θ, qui satisfait à la relation

$$\cos\alpha\cos(\theta - \alpha) = \cos\beta\cos(\theta - \beta),$$

et qui est évidemment $\theta = \alpha + \beta$: la valeur correspondante de ρ sera

$$\rho = d\cos\alpha.\cos\beta.$$

De même, les coordonnées polaires de l'intersection du premier et du troisième cercle dont le diamètre fait un angle γ avec l'axe) seront

$$\theta = \alpha + \gamma,\quad \rho = d.\cos\alpha.\cos\gamma.$$

L'équation polaire de la droite joignant ces deux points s'obtiendra en substituant successivement ces valeurs de ρ et de θ dans l'équation générale $\rho\cos(k - \theta) = p$ (44). On trouvera ainsi, pour déterminer p et k, les deux équations

$$p = d\cos\alpha\cos\beta\cos[k - (\alpha + \beta)] = d\cos\alpha\cos\gamma\cos[k - (\alpha + \gamma)];$$

d'où

$$k = \alpha + \beta + \gamma,\quad p = d\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

La symétrie de ces valeurs montre que cette droite passe aussi par le point d'intersection du deuxième et du troisième cercle.

CHAPITRE VIII.

PROPRIÉTÉS D'UN SYSTÈME DE DEUX OU D'UN PLUS GRAND NOMBRE DE CERCLES.

105. *Trouver l'équation de la corde d'intersection de deux cercles.*

Soient

$$S = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - r^2 = 0,$$
$$S' = (x-\alpha')^2 + (y-\beta')^2 - r'^2 = 0$$

les équations des deux cercles. L'équation $S - kS' = 0$ représente un lieu passant par les points d'intersection des deux cercles S et S' (40); elle est du deuxième degré, ne renferme pas de terme en xy, ses termes en x^2 et y^2 ont même coefficient; elle représente donc en général un cercle.

Dans le cas particulier où $k = 1$, les termes du deuxième degré disparaissent, et l'équation prend la forme

$$S - S' = 2(\alpha' - \alpha)x + 2(\beta' - \beta)y + r'^2 - r^2 + \alpha^2 - \alpha'^2 + \beta^2 - \beta'^2 = 0;$$

elle représente alors une droite passant par les points d'intersection des deux cercles.

106. Ces points d'intersection s'obtiendront en déterminant (82) les points où la droite $S - S'$ rencontre l'un ou l'autre des cercles donnés. Ils pourront coïncider, être réels ou imaginaires, suivant la nature des racines de l'équation servant à les déterminer; mais l'équation de la corde d'intersection $S - S' = 0$ représentera toujours une droite réelle, dont les propriétés subsistent lors même que les deux points qui la définissent deviennent imaginaires (82).

Cette droite porte le nom d'*axe radical* des deux cercles (*). Nous allons étudier quelques-unes de ses propriétés les plus importantes.

107. Le carré de la tangente menée à un cercle $S = 0$ par un point (x, y) s'obtient en substituant ses coordonnées x et y aux coordonnées courantes dans l'équation de ce cercle (90); l'équation de la droite $S - S' = 0$, axe radical des deux cercles $S = 0$ et $S' = 0$, exprime donc que :

Les tangentes menées à deux cercles par un point de leur axe radical sont égales.

Cette propriété de la droite $S - S'$, indépendante de la nature des points d'intersection des deux cercles, permet de la construire géométriquement lorsque ces points sont imaginaires; car on en conclut facilement que cette droite est perpendiculaire à la ligne des centres, qu'elle divise en deux segments tels, que la différence de leurs carrés est égale à la différence des carrés des rayons des cercles.

Le lieu des points tels que les tangentes menées de ce point à deux cercles $S = 0$, $S' = 0$ soient dans un *rapport donné* k a pour équation $S - k^2 S' = 0$ (90); c'est celle d'un cercle (105) passant par les points d'intersection, réels ou imaginaires, de S et S', ayant, par suite, même axe radical que les deux premiers.

108. *Les axes radicaux de trois cercles* S, S' *et* S'', *considérés deux à deux, concourent en un même point qu'on appelle « centre radical des trois cercles ».*

Ces axes radicaux ont respectivement pour équation

$$S - S' = 0, \quad S - S'' = 0, \quad S'' - S' = 0;$$

ils se coupent donc en un même point (40).

(*) Cette dénomination, introduite par M. Gaultier de Tours (*Journal de l'École Polytechnique*, cahier XVI, 1813), est préférable à celle de « corde d'intersection », qui peut paraître singulière lorsque, géométriquement, les cercles ne se coupent pas.

Ce théorème conduit au suivant :

Les cordes d'intersection d'un cercle fixe C, *avec une série de cercles* O, O_1, O_2,... *passant par deux points donnés* AB, *passent par un point fixe.*

Considérons en particulier les cercles O, O_1 et C; les cercles O et O_1 ayant AB pour axe radical, la corde d'intersection de O avec C et celle de O_1 avec C doivent, d'après le théorème précédent, se rencontrer en un point de AB; les cordes d'intersection du cercle C avec les cercles O, O_1, O_2,... passent donc toutes par un point fixe situé sur AB.

EXERCICES.

I. Trouver l'axe radical de

$$x^2+y^2-4x-5y+7=0,\quad x^2+y^2+6x+8y-9=0.$$

RÉPONSE. $\qquad 10x+13y=16.$

II. Trouver le centre radical de

$$(x-1)^2+(y-2)^2=7,\quad (x-3)^2+y^2=5,\quad (x+4)^2+(y+1)^2=9.$$

RÉPONSE. $\qquad \left(-\frac{1}{16},\ -\frac{25}{16}\right).$

*109. Les systèmes formés par des cercles ayant un axe radical commun, c'est-à-dire passant par deux points fixes, jouissent de plusieurs propriétés remarquables qu'il est facile de trouver en choisissant convenablement les axes coordonnés. En prenant pour axe des y l'axe radical commun et pour axe des x la ligne des centres, l'équation de l'un quelconque des cercles du système pourra s'écrire

$$x^2+y^2-2kx\pm\delta^2=0,$$

δ^2 étant constant pour tous les cercles du système, k variant avec chacun d'eux et servant à le définir. En effet, le cercle représenté par cette équation a son centre sur l'axe des x, à une distance variable k de l'origine, et coupe l'axe des y en deux points fixes donnés par la relation $y^2\pm\delta^2=0$, qui est

indépendante de k. Ces points seront réels lorsque δ^2 aura le signe —, et imaginaires dans le cas contraire.

*110. *Les polaires d'un point donné (x', y'), prises par rapport à un système de cercles ayant un axe radical commun, passent par un point fixe.*

L'équation de la polaire de (x', y') par rapport au cercle

$$x^2 + y^2 - 2kx + \delta^2 = 0$$

est (89)

$$xx' + yy' - k(x + x') + \delta^2 = 0;$$

elle renferme l'indéterminée k au premier degré : la polaire passe donc toujours par un point fixe que détermine l'intersection des droites $xx' + yy' + \delta^2 = 0$ et $x + x' = 0$.

*111. *On peut toujours trouver deux points tels, que leurs polaires, par rapport à un système de cercles ayant un axe radical commun, soient fixes.*

La polaire du point (x', y') sera fixe, c'est-à-dire indépendante de k, si les équations $xx' + yy' + \delta^2 = 0$ et $x + x' = 0$, représentent la même droite, et, par suite, la polaire. Mais alors les coordonnées x' et y' de ce point satisfont aux relations

$$y' = 0, \quad x'^2 = \delta^2 \quad \text{ou} \quad x' = \pm\delta.$$

Les deux points cherchés se trouvent donc sur l'axe des x, à droite et à gauche, et à une même distance de l'origine; ils sont réels lorsque les deux points communs à tous les cercles sont imaginaires, et imaginaires dans le cas contraire.

Ces points jouissent de plusieurs propriétés importantes dans la théorie de ces systèmes de cercles; ainsi la polaire de l'un d'eux, prise par rapport à un quelconque de ces cercles, passe par l'autre point et se trouve perpendiculaire à la ligne des centres.

L'équation générale des cercles étant de la forme

$$y^2 + (x - k)^2 = k^2 - \delta^2$$

ne peut représenter un cercle réel que dans le cas où k^2 est

plus petit que δ^2; lorsque h^2 devient égal à δ^2, le rayon du cercle est infiniment petit (80), et son centre a pour coordonnées $y = 0$, $x = \pm\delta$.

Les points que nous venons de trouver peuvent donc être eux-mêmes considérés comme des cercles faisant partie du système; pour cette raison, M. Poncelet (*) leur a donné le nom de *points limites* du système de cercles.

*112. Les tangentes, menées à tous ces cercles par un point de l'axe radical commun, étant égales (107), le lieu de leurs points de contact est un cercle; et ce cercle coupe orthogonalement tous ceux du système, puisque ses rayons leur sont tangents. Son équation peut se trouver de la manière suivante :

Le carré de la tangente menée par un point ($x = 0, y = h$) au cercle $x^2 + y^2 - 2kx + \delta^2 = 0$, s'obtenant (90) par la substitution des coordonnées du point aux coordonnées courantes du cercle, sera $h^2 + \delta^2$. Le cercle cherché ayant pour centre ($x = 0, y = h$) et pour carré du rayon $h^2 + \delta^2$, aura pour équation

$$x^2 + (y - h)^2 = h^2 + \delta^2,$$

ou

$$x^2 + y^2 - 2hy = \delta^2.$$

Quelle que soit, sur l'axe radical, la position du centre, autrement dit quelle que soit la valeur de h, ce cercle coupe toujours la ligne des centres aux points fixes $y = 0$, $x = \pm\delta$ que nous avons trouvés précédemment. Donc, ***tous les cercles coupant orthogonalement les cercles d'un système à axe radical commun passent par les points limites du système.***

EXERCICES.

I. Trouver la condition pour que les deux cercles

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0,$$
$$x^2 + y^2 + 2g'x + 2f'y + c' = 0$$

se coupent à angle droit.

(*) *Traité des Propriétés projectives*, p. 41.

En exprimant que le carré de la distance de leurs centres est égal à la somme des carrés de leurs rayons, on trouve

$$(g-g')^2+(f-f')^2=g^2+f^2-c+g'^2+f'^2-c',$$

ou, en réduisant,

$$2gg'+2ff'=c+c'.$$

II. Construire le cercle coupant orthogonalement trois cercles donnés.

La condition trouvée dans l'Exercice précédent fournit trois équations du premier degré qui permettent de déterminer les trois inconnues g, f et c; on achèvera la solution en employant l'équation du n° 94.

On peut aussi trouver une solution en observant que le centre du cercle cherché est le centre radical des trois cercles, et que son rayon est égal à la tangente menée de ce centre à l'un quelconque des cercles donnés.

III. Trouver le cercle coupant orthogonalement les trois cercles de l'Ex. II, n° 108.

Réponse. $$\left(x+\frac{1}{16}\right)^2+\left(y+\frac{25}{16}\right)^2=\frac{1746}{256}.$$

IV. Lorsqu'un cercle S coupe orthogonalement les trois cercles S', S'' et S''', il rencontre à angle droit le cercle $kS'+lS''+mS'''=0$.

En effet, la condition

$$\begin{aligned}2g(kg'+lg''+mg''')+2f(kf'+lf''+mf''')\\=(k+l+m)c+kc'+lc''+mc'''\end{aligned}$$

est satisfaite, puisque, d'après l'hypothèse, les coefficients de k, l et m sont tous séparément nuls.

On verrait de même qu'un cercle coupant orthogonalement S et S'' rencontre à angle droit le cercle $kS'+lS''$.

V. Tous les cercles qui coupent orthogonalement deux cercles S' et S'' ont même axe radical.

Ce théorème, déjà indiqué au n° 112, peut encore se démontrer de la manière suivante. Les deux équations du premier degré

$$2gg'+2ff'=c+c',\quad 2gg''+2ff''=c+c''$$

donnant les valeurs de g et de f, l'équation

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$

ne renferme plus que l'indéterminée c qui est du premier degré, et par suite (105) représente une série de cercles ayant même axe radical.

VI. La polaire de l'extrémité A du diamètre AB d'un cercle, prise par rapport à un cercle coupant orthogonalement le premier, passe par le point B.

VII. Trouver le cercle coupant orthogonalement trois cercles donnés. Cette question peut se résoudre, comme plus haut, par le centre radical, ou bien (Ex. VI) en cherchant le lieu du point dont les polaires, par rapport aux trois cercles, passent par un même point.

VIII. Le carré de la tangente menée d'un point quelconque d'un cercle à un autre, est dans un rapport constant avec la distance de ce point à l'axe radical des deux cercles.

IX. Trouver l'angle α suivant lequel deux cercles se coupent.

Soient R et r les rayons des cercles, D la distance de leurs centres, on aura

$$D^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\alpha,$$

puisque l'angle suivant lequel les cercles se coupent est égal à celui des rayons aboutissant au point d'intersection.

X. Si un cercle mobile coupe deux cercles fixes sous des angles constants, il coupera tous les cercles ayant même axe radical sous des angles constants.

Soient $S = 0$, $S' = 0$ les équations des deux cercles fixes, r et r' leurs rayons, α et β les angles sous lesquels ils coupent le cercle mobile, R le rayon du cercle mobile; les coordonnées du centre de ce cercle satisferont aux relations

$$R^2 - 2Rr\cos\alpha = S, \quad R^2 - 2Rr'\cos\beta = S',$$

puisque le carré de la tangente menée à un cercle fixe S est égal à $D^2 - r^2$, D étant la distance des centres des deux cercles (90).

On en déduit

$$R^2 - 2R\frac{kr\cos\alpha + lr'\cos\beta}{k+l} = \frac{kS + lS'}{k+l},$$

ce qui est la condition pour que le cercle mobile coupe le cercle $kS + lS'$ sous l'angle constant γ : γ étant défini par l'expression

$$(k+l)\,r''\cos\gamma = kr\cos\alpha + lr'\cos\beta,$$

dans laquelle r'' est le rayon du cercle $kS + lS'$.

XI. Le cercle qui coupe deux cercles fixes sous un angle constant est tangent à deux cercles fixes.

On peut en effet déterminer le rapport $\frac{k}{l}$ de l'Exercice précédent, de telle sorte que $\gamma = 0$, autrement dit que $\cos\gamma = 1$; d'ailleurs il est facile de voir que si D est la distance des centres des cercles S et S', on a

$$(k+l)^2 r''^2 = (k+l)(kr^2 + lr'^2) - klD^2.$$

En portant dans l'équation précédente la valeur de r'' qu'on en déduit, on trouve, pour déterminer le rapport $\frac{k}{l}$, une équation du deuxième degré.

113. *Mener une tangente commune à deux cercles.*

Soient

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2,$$
$$(x-\alpha')^2 + (y-\beta')^2 = r'^2,$$

les équations des deux cercles S et S'.

L'équation d'une tangente au cercle S sera (85)

$$(x-\alpha)(x'-\alpha) + (y-\beta)(y'-\beta) = r^2,$$

ou bien

$$(x-\alpha)\cos\theta + (y-\beta)\sin\theta = r,$$

en posant, comme au n° 102,

$$\frac{x'-\alpha}{r} = \cos\theta, \quad \frac{y'-\beta}{r} = \sin\theta;$$

on a de même, pour la tangente à S',

$$(x-\alpha')\cos\theta' + (y-\beta')\sin\theta' = r'.$$

L'équation de la tangente commune s'obtiendra en écrivant que les deux équations précédentes représentent une même droite. Ramenant à l'unité, dans chacune d'elles, le coefficient de x et comparant les coefficients de y, on trouve

$$\tang\theta = \tang\theta';$$

d'où

$$\theta = \theta' \quad \text{ou} \quad \theta = 180^\circ + \theta'.$$

En exprimant que l'une ou l'autre de ces conditions est remplie dans l'équation fournie par la comparaison des termes

constants, on a, pour la relation cherchée,

$$(\alpha - \alpha')\cos\theta + (\beta - \beta')\sin\theta + r - r' = 0$$

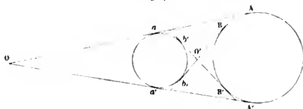
lorsque $\theta = \theta'$, et

$$(\alpha - \alpha')\cos\theta + (\beta - \beta')\sin\theta + r + r' = 0$$

dans le cas où $\theta = 180° + \theta'$.

Chacune de ces expressions conduit à une équation du deuxième degré pour déterminer θ. Les deux racines de la

Fig. 42.



première correspondent aux tangentes communes extérieures (ou directes) Aa, $A'a'$ (*fig.* 42); les deux racines de la seconde, aux tangentes communes intérieures (ou transverses) Bb, $B'b'$.

Pour obtenir les coordonnées du point de contact de la tangente commune avec le cercle S, il suffit de remplacer, dans les équations précédentes, $\cos\theta$ et $\sin\theta$ par leurs valeurs

$$\cos\theta = \frac{x' - \alpha}{r}, \quad \sin\theta = \frac{y' - \beta}{r};$$

on trouve ainsi, suivant le cas,

$$(\alpha - \alpha')(x' - \alpha) + (\beta - \beta')(y' - \beta) + r(r - r') = 0,$$
$$(\alpha - \alpha')(x' - \alpha) + (\beta - \beta')(y' - \beta) + r(r + r') = 0.$$

La première de ces équations, combinée avec celle du cercle S, fournit une équation du deuxième degré ayant pour racines les coordonnées des points de contact A, A' des tangentes communes extérieures (88); et l'équation

$$(\alpha' - \alpha)(x - \alpha) + (\beta - \beta')(y - \beta) + r(r - r') = 0$$

représente la corde de contact AA' de ces tangentes.

De même

$$(\alpha'-\alpha)(x-\alpha)+(\beta-\beta')(y-\beta)+r(r+r')=0$$

représente la corde de contact BB' des tangentes communes intérieures.

Si le centre du cercle S est pris pour origine, on a $\alpha=0$, $\beta=0$, et l'équation de la corde de contact devient

$$\alpha' x+\beta' y=r(r\mp r').$$

EXERCICE.

Trouver les tangentes communes aux cercles

$$x^2+y^2-4x-2y+4=0,\quad x^2+y^2+4x+2y-4=0.$$

Les cordes de contact des tangentes communes par rapport au premier cercle sont

$$2x+y=6,\quad 2x+y=3.$$

La première rencontre le cercle aux points (2, 2), $\left(\frac{14}{5}, \frac{2}{5}\right)$; les tangentes menées par ces points ont pour équation

$$y=2,\quad 4x-3y=10.$$

La seconde rencontre le cercle aux points (1, 1), $\left(\frac{7}{5}, \frac{1}{5}\right)$; les tangentes correspondantes sont données par

$$x=1,\quad 3x+4y=5.$$

114. Les points O et O', où se rencontrent respectivement les tangentes communes extérieures et intérieures, sont les *centres de similitude* des deux cercles. On verra plus loin la raison de cette dénomination.

Leurs coordonnées se trouvent facilement; car O est, par rapport au cercle S, le pôle de la corde de contact AA', dont l'équation est

$$\frac{(\alpha'-\alpha)r}{r-r'}(x-\alpha)+\frac{(\beta'-\beta)r}{r-r'}(y-\beta)=r^2.$$

En comparant cette équation avec celle de la polaire du point (x', y')

$$(x'-\alpha)(x-\alpha)+(y'-\beta)(y-\beta)=r^2,$$

on trouve, pour les coordonnées x', y' du point O,

$$x'-\alpha=\frac{(\alpha'-\alpha)r}{r-r'},\quad y'-\beta=\frac{(\beta'-\beta)r}{r'-r},$$

ou bien

$$x'=\frac{\alpha' r-\alpha r'}{r-r'},\quad y'=\frac{\beta' r-\beta r'}{r-r'}.$$

On trouverait de même, pour les coordonnées de O',

$$x=\frac{\alpha' r+\alpha r'}{r+r'},\quad y=\frac{\beta' r+\beta r'}{r+r'}.$$

Ces valeurs montrent (n° 7) que les centres de similitude sont les points où la droite joignant les centres des cercles est divisée, extérieurement ou intérieurement, dans le rapport des rayons.

EXERCICE.

Trouver les tangentes communes aux cercles

$$x^2+y^2-6x-8y=0,\quad x^2+y^2-4x-6y=3.$$

L'équation des tangentes menées au cercle

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$$

par le point (x', y') est (92)

$$[(x'-\alpha)^2+(y'-\beta)^2-r^2][(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-r^2]$$
$$=[(x-\alpha)(x'-\alpha)+(y-\beta)(y'-\beta)-r^2]^2.$$

Les coordonnées du centre extérieur de similitude étant $-2, -1$, les tangentes passant par ce centre auront pour équation

$$25(x^2+y^2-6x-8y)=(5x+5y-10)^2,$$

c'est-à-dire

$$xy+x+2y+2=0,\quad \text{ou}\quad (x+2)(y+1)=0.$$

Les cercles donnés se coupant en des points réels, les tangentes intérieures sont imaginaires; leur équation

$$40x^2 + xy + 40y^2 - 199x - 278y + 722 = 0.$$

se trouve de la même manière en observant que le centre intérieur de similitude a pour coordonnées $\frac{22}{9}$ et $\frac{31}{9}$.

115. ***Les droites menées par l'intersection des tangentes communes à deux cercles sont coupées en parties proportionnelles par ces cercles.***

Si l'on prend sur le rayon vecteur OP, issu du point O et aboutissant au point P, un point Q, tel que $OP = m.OQ$, les coordonnées du point P s'obtiendront en multipliant par m celles du point Q; si P décrit une courbe, Q en décrira une autre dont l'équation se trouvera, en remplaçant x et y par mx et my dans l'équation de la courbe décrite par P.

Prenons pour axes les tangentes communes, et représentons (*fig.* 42) Oa par a, OA par a' : les équations des deux cercles seront (84, Ex. II)

$$x^2 + y^2 + 2xy\cos\omega - 2ax - 2ay + a^2 = 0,$$
$$x^2 + y^2 - 2xy\cos\omega - 2a'x - 2a'y + a'^2 = 0.$$

La seconde se déduit de la première en y remplaçant x et y par $\frac{ax}{a'}, \frac{ay}{a'}$; elle représente donc le lieu obtenu en prolongeant chaque rayon vecteur dans le rapport de a à a'.

Corollaire. — Puisque le rectangle $O\rho.O\rho'$ (*fig.* 43) est constant, OR étant avec $O\rho$ dans un rapport constant, le rectangle $OR.O\rho' = OR'.O\rho$ est aussi constant, quelle que soit la droite menée par le point O.

116. ***Si, par un centre de similitude O, on mène deux droites coupant le premier cercle (fig. 43) aux points R, R', S, S', et le second aux points ρ, ρ', σ, σ', les cordes RS et ρσ, R'S' et ρ'σ' sont parallèles, et les cordes RS et ρ'σ', R'S' et ρσ se coupent sur l'axe radical PQ des deux cercles.***

En prenant OR et OS pour axes, on aura (115)

$$OR = m.O\rho, \quad OS = m.O\sigma.$$

Fig. 43.



Le cercle $\rho\sigma\rho'\sigma'$ ayant pour équation

$$a(x^2 + 2xy\cos\omega + y^2) + 2gx + 2fy + c = 0,$$

celle du cercle RSR'S' sera

$$a(x^2 + 2xy\cos\omega + y^2) + 2m(gx + fy) + m^2c = 0,$$

et celle de l'axe radical (105)

$$2(gx + fy) + (m+1)c = 0.$$

Les équations de $\rho\sigma$ et $\rho'\sigma'$ seront

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad \frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} = 1,$$

en posant

$$O\rho = a, \quad O\sigma = b; \quad O\rho' = a', \quad O\sigma' = b'.$$

On aura alors pour celles de RS, R'S'

$$\frac{x}{ma} + \frac{y}{mb} = 1, \quad \frac{x}{ma'} + \frac{y}{mb'} = 1.$$

D'après la forme de ces équations, RS est parallèle à $\rho\sigma$, et R'S' à $\rho'\sigma'$.

Quant aux cordes RS et $\rho'\sigma'$, elles se coupent sur la droite

$$x\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a'}\right) + y\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b'}\right) = 1 + m;$$

c'est-à-dire sur l'axe radical des deux cercles, puisque cette équation peut se mettre sous la forme (100)

$$2(gx + fy) + (m + 1)c = 0.$$

Il en est de même pour les cordes R'S' et $\rho\sigma$.

Comme cas particulier de ce théorème, on voit que les tangentes en R et ρ, R' et ρ' sont parallèles, et que les tangentes en R et ρ', R' et ρ se coupent sur l'axe radical.

117. *Les centres de similitude de trois cercles* S, S' *et* S'', *pris deux à deux, sont situés trois par trois sur une même droite.*

Soient r, r', r'' les rayons de ces trois cercles; (α, β), (α', β'), (α'', β'') leurs centres. Les coordonnées de deux des centres de similitude seront (114)

$$\left(\frac{r\alpha' - \alpha r'}{r - r'}, \frac{r\beta' - \beta r'}{r - r'}\right), \quad \left(\frac{r\alpha'' - \alpha r''}{r - r''}, \frac{r\beta'' - \beta r''}{r - r''}\right),$$

et la droite qui les joint aura pour équation (29, Ex. VI)

$$\begin{aligned} &[r(\beta' - \beta'') + r'(\beta'' - \beta) + r''(\beta - \beta')]x \\ &- [r(\alpha' - \alpha'') + r'(\alpha'' - \alpha) + r''(\alpha - \alpha')]y \\ &+ r(\beta'\alpha'' - \beta''\alpha') + r'(\beta''\alpha - \beta\alpha'') + r''(\beta\alpha' - \beta'\alpha) = 0. \end{aligned}$$

La symétrie de cette équation montre que cette ligne passe aussi par le troisième centre de similitude

$$\left(\frac{r'\alpha'' - r''\alpha'}{r' - r''}, \quad \frac{r'\beta'' - \beta' r''}{r' - r''}\right).$$

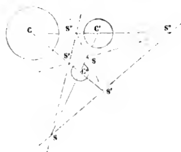
Cette droite s'appelle *axe de similitude* des trois cercles.

Puisque chaque couple de cercles a deux centres de similitude, il y a en tout *six* centres de similitude S, S', S'',... pour les trois cercles; ces centres sont distribués sur *quatre* axes de similitude, ainsi que le représente la *fig.* 44.

Les équations des trois autres axes s'obtiendront en changeant successivement les signes de r, r', r'' dans l'équation donnée plus haut.

Corollaire. — Si un cercle Σ est tangent aux deux cercles S *et* S′, *la droite qui joint les points de contact passe par un centre de similitude de* S *et* S′. Car lorsque deux cercles se touchent, un de leurs centres de similitude coïncide avec le point de contact.

Fig. 44.



Quand Σ est tangent intérieurement ou extérieurement aux deux cercles S et S′ à la fois, la droite joignant les points de contact passe par le centre de similitude de S et S′ qui leur est *extérieur;* lorsque Σ est tangent intérieurement à l'un des cercles et extérieurement à l'autre, cette droite passe par le centre de similitude *intérieur*, ou situé entre les deux cercles.

*118. *Trouver le lieu du centre du cercle* Σ *coupant trois cercles donnés* S, S′, S″ *sous des angles égaux.*

Soit $S = 0$, ou

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - r^2 = 0$$

l'équation d'un cercle, le carré de la distance d'un point (x, y) à son centre a pour valeur

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = S + r^2.$$

Les coordonnées du centre du cercle Σ de rayon R, coupant S sous un angle α, satisfont à la condition (112, Ex. V)

$$S = R^2 - 2Rr\cos\alpha;$$

elles satisfont de même aux relations

$$S' = R^2 - 2Rr'\cos\alpha,\quad S'' = R^2 - 2Rr''\cos\alpha,$$

puisque Σ coupe S et S' sous l'angle α.

En éliminant R et $\cos\alpha$ entre ces trois équations, on aura l'équation du lieu cherché. On obtient successivement

$$S - S' = 2R(r' - r)\cos\alpha,\quad S - S'' = 2R(r'' - r)\cos\alpha,$$

d'où

$$(S - S')(r - r'') = (S - S'')(r - r').$$

Le lieu est donc une droite qui passe par le centre radical (108); en remplaçant S, S' et S'' par leurs valeurs développées, on trouve, pour les coefficients de x et de y,

$$-2[\alpha(r' - r'') + \alpha'(r'' - r) + \alpha''(r - r')],$$
$$-2[\beta(r' - r'') + \beta'(r'' - r) + \beta''(r - r')].$$

En comparant ces expressions avec celles correspondantes de l'équation d'un axe de similitude (117), on voit (32) que le lieu est la perpendiculaire abaissée du centre radical sur un des axes de similitude.

Il est indifférent de prendre, pour angle des deux cercles, l'un ou l'autre des deux angles supplémentaires que forment les rayons aboutissant au point d'intersection. Les formules (112) employées supposent que cet angle est celui sous lequel la distance des centres est vue du point d'intersection ; dans cette hypothèse, le lieu dont on vient de trouver l'équation est une perpendiculaire à l'axe extérieur de similitude. Si l'on n'admet pas cette restriction, on peut prendre

$$S = R^2 \mp 2Rr\cos\alpha,$$

ce qui revient à changer le signe de l'une ou l'autre des quantités r, r', r'' dans les expressions précédentes. Par suite (117), le lieu cherché peut être perpendiculaire à l'un quelconque des axes de similitude (*).

(*) Les cercles coupant sous des angles égaux trois cercles donnés S, S', S'',

Lorsque deux cercles sont tangents intérieurement, l'angle sous lequel ils se coupent est nul, puisque les rayons du point de contact coïncident; mais s'ils se touchent extérieurement, cet angle, en vertu des conventions faites précédemment, est égal à 180 degrés, puisqu'un des rayons est situé dans le prolongement de l'autre. La perpendiculaire abaissée sur l'axe extérieur de similitude contient donc le centre du cercle tangent intérieurement ou extérieurement à la fois aux trois cercles donnés. Le centre du cercle tangent extérieurement à S et intérieurement à S' et S″ (ou *vice versâ*) sera sur la perpendiculaire à un des autres axes de similitude, puisque l'équation du lieu décrit par le centre s'obtiendra en changeant le signe de r dans la précédente. On peut donc en tout mener à trois cercles donnés huit cercles tangents; les centres de ces huit cercles se trouvent, deux par deux, sur les perpendiculaires abaissées du centre radical sur les quatre axes de similitude.

***119.** *Décrire un cercle Σ tangent à trois cercles donnés* S, S', S″.

Ce qui précède indique un lieu sur lequel doit se trouver le centre du cercle cherché : on peut en déterminer un autre en éliminant son rayon R entre les deux équations

$$S = R^2 - 2rR, \quad S' = R^2 - 2r'R;$$

mais on trouverait ainsi une courbe autre que le cercle.

On obtient une solution plus élémentaire en cherchant, au

---

de rayons r, r', r'', ont pour axe radical commun un des axes de similitude. Soient, en effet, trois cercles Σ, Σ', Σ'', de rayons R, R', R″, coupant les cercles donnés respectivement sous les angles α, β, γ. Les coordonnées du centre de S satisfont aux conditions

$$\Sigma = r^2 - 2rR\cos\alpha, \quad \Sigma' = r^2 - 2rR'\cos\beta, \quad \Sigma'' = r^2 - 2rR''\cos\gamma,$$

d'où

$$(R\cos\alpha - R''\cos\gamma)(\Sigma - \Sigma') = (R\cos\alpha - R'\cos\beta)(\Sigma - \Sigma'').$$

Cette équation, analogue à celle d'une droite, est satisfaite psr les coordonnées du centre de S, S' et S″, trois points que nous n'svons pas supposés en ligne droite; elle est donc de la forme $\Sigma = k\Sigma' + l\Sigma''$, et prouve que les trois cercles ont même sxe radical.

lieu des coordonnées du centre du cercle tangent Σ, celles de son point de contact avec un des cercles donnés. Ce point se trouvant sur un cercle, on a déjà une relation entre ses coordonnées; il suffira donc d'en trouver une autre pour qu'elles soient complétement déterminées (*).

Plaçons, pour simplifier, l'origine des coordonnées au centre du cercle S, dont on veut déterminer le point de contact avec Σ, l'équation de ce cercle se réduit à

$$x^2+y^2=r^2,$$

et celles des autres cercles S et S' sont toujours

$$(x-\alpha')^2+(y-\beta')^2=r'^2,$$

$$(x-\alpha'')^2+(y-\beta'')^2=r''^2.$$

Si A et B sont les coordonnées du centre de Σ, elles satisferont aux relations

$$S-S'=2R(r-r'),\quad S-S''=2R(r'-r'');$$

de plus, les coordonnées du point de contact de S avec Σ étant x et y, on aura

$$A=\frac{x(R+r)}{r},\quad B=\frac{y(R+r)}{r}.$$

Pour trouver le résultat de la substitution de mx, my à x et y dans l'équation d'une droite, on peut multiplier toute l'équation par m et en retrancher $(m-1)$ fois le terme constant. Ce terme étant égal à

$$r'^2-r^2-\alpha'^2-\beta'^2$$

dans $S-S'$ (105), le résultat de la substitution de A et B à x et y dans $S-S'=2R(r-r')$ sera

$$\frac{R+r}{r}(S-S')+\frac{R}{r}(\alpha'^2+\beta'^2+r^2-r'^2)=2R(r-r'),$$

(*) Cette solution a été donnée par M. Gergonne (*Annales de Mathématiques*, t. VII, p. 289).

ou

$$(R + r)(S - S') = R[(r - r')^2 - \alpha'^2 - \beta'^2].$$

On aura de même

$$(R + r)(S - S'') = R[(r - r'')^2 - \alpha''^2 - \beta''^2].$$

En éliminant R entre ces deux équations, on voit que le point de contact cherché se trouve à l'intersection du cercle S avec la droite

$$\frac{S - S'}{\alpha'^2 + \beta'^2 - (r - r')^2} = \frac{S - S''}{\alpha''^2 + \beta''^2 - (r - r'')^2}.$$

120. Pour compléter la solution géométrique du problème, il reste à montrer comment on peut construire cette droite. Comme elle passe par le centre radical des cercles donnés, il suffit d'en trouver un deuxième point. En remplaçant S — S', S — S'' par leurs valeurs développées (105), son équation devient

$$\frac{2\alpha' x + 2\beta' y + r'^2 - r^2 - \alpha'^2 - \beta'^2}{\alpha'^2 + \beta'^2 - (r - r')^2}$$
$$= \frac{2\alpha'' x + 2\beta'' y + r''^2 - r^2 - \alpha''^2 - \beta''^2}{\alpha''^2 + \beta''^2 - (r - r'')^2};$$

ou en ajoutant l'unité à chacun des termes,

$$\frac{\alpha' x + \beta' y + (r' - r)r}{\alpha'^2 + \beta'^2 - (r - r')^2} = \frac{\alpha'' x + \beta'' y + (r'' - r)r}{\alpha''^2 + \beta''^2 - (r - r')^2};$$

ce qui exprime qu'elle passe par l'intersection des droites

$$\alpha' x + \beta' y + (r' - r)r = 0, \quad \alpha'' x + \beta'' y + (r'' - r)r = 0.$$

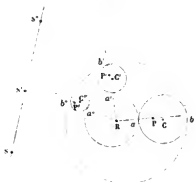
La première de ces droites est (113), dans le cercle S, la corde de contact des tangentes communes aux cercles S et S': autrement dit (114), c'est la polaire par rapport à S du centre de similitude de S et S'; de même, la seconde droite est la polaire par rapport à S du centre de similitude de S et S''. L'intersec-

tion de ces droites est donc le pôle de l'axe de similitude des cercles, par rapport au cercle S.

De là on déduit la construction suivante.

Construire (*fig.* 45) un des quatre axes de similitude SS' des trois cercles C, C', C''; déterminer le pôle de cet axe successi-

Fig. 45.



vement par rapport aux trois cercles, et joindre les points ainsi trouvés P, P' et P'' au centre radical R. Si les droites RP, RP', RP'', rencontrent les cercles aux points, *a b* ; *a'*, *b'* ; *a''*, *b''*, le cercle passant par les points *a*, *a'*, *a''* sera un des cercles tangents cherchés, et le cercle mené par les points *b*, *b'*, *b''* en sera un autre.

En appliquant la même construction aux trois axes de similitude, on déterminera les six autres cercles tangents.

121. On peut arriver, sans calcul algébrique, au même résultat, de la manière suivante :

1° Les lignes *ab*, *a'b*, *a''b''* se rencontrent en un point qui est le centre de similitude des cercles *aa'a''*, *bb'b''* (117, Corollaire);

2° Les droites *a'a''*, *b'b''* se coupent en S centre de similitude de C' et C'' (117);

3° Par suite (116) les lignes transversales *a'b'*, *a''b''* se coupent sur l'axe radical de C' et C''. De même, *a''b''* et *ab* se

coupent sur l'axe radical de C″ et C : le point R, centre de similitude des cercles $aa'a''$, $bb'b''$ est donc en même temps le centre radical des trois cercles C, C′ et C″;

4° Puisque $a'b'$, $a''b''$ passent par le centre de similitude de $aa'a''$, $bb'b''$, les droites $a'a''$, $b'b''$ se rencontrent en S sur l'axe radical de ces deux cercles (116). Les points S′ et S″ se trouvent ainsi sur ce même axe radical. Donc, *l'axe de similitude* SS′S″ *des cercles* C, C′, C″ *est en même temps l'axe radical des cercles* $aa'a''$, $bb'b''$;

5° Comme $a''b''$ passe par le centre de similitude de $aa'a''$, $bb'b''$, les tangentes menées à ces cercles (116) aux points où $a''b''$ les rencontre se coupent sur l'axe radical SS′S″ en un point qui est évidemment le pôle de $a''b''$ par rapport au cercle C″; le pôle de $a''b''$ se trouvant sur SS′S″, le pôle de SS′S″ par rapport à C″ sera (98) sur $a''b''$. On pourra donc construire $a''b''$ en joignant le centre radical R au pôle P de S′S″ par rapport au cercle C″;

6° Le centre de similitude de deux cercles étant sur leur ligne des centres, et l'axe radical perpendiculaire à cette ligne, la droite joignant les centres des cercles $aa'a''$, $bb'b''$ passe par le point R (118) perpendiculairement à SS′S″.

121 (*a*). *Lorsque quatre cercles sont tangents à un cinquième, les longueurs de leurs tangentes communes satisfont à la relation*

$$(12)(34) \pm (14)(23) \pm (13)(24) = 0,$$

dans laquelle (12) *représente la longueur de la tangente commune au premier et au deuxième cercle, etc.*

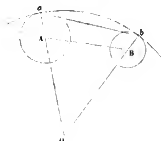
Soient R le rayon du cinquième cercle, O son centre (*fig.* 46); r et r' les rayons des cercles 1 et 2, A et B leurs centres; a et b leurs points de contact avec le cinquième. Le triangle aOb, étant isoscèle, donne

$$ab = 2R \sin \frac{1}{2} aOb.$$

Les côtés du triangle AOB étant $R-r$, $R-r'$ et $D=AB$, on a

$$\sin^2\frac{1}{2}aOb=\frac{D^2-(r-r')^2}{4(R-r)(R-r')};$$

Fig. 46.



d'ailleurs

$$(12)^2=D^2-(r-r')^2:$$

par suite

$$ab=\frac{R.(12)}{\sqrt{(R-r)(R-r')}}.$$

Dans le quadrilatère inscrit formé par les quatre points de contact a, b, c et d des quatre premiers cercles avec le cinquième, les côtés et les diagonales satisfont à la condition

$$ab.cd+ad.bc=ac.bd;$$

remplaçant, dans cette équation, chacune des cordes $ab,\ldots$ par sa valeur, trouvée précédemment, en fonction de la longueur $(12),\ldots$ de la tangente commune correspondante, et supprimant le facteur commun $\frac{R^2}{\sqrt{(R-r)(R-r')(R-r'')(R-r''')}}$, on obtient la relation qu'il fallait démontrer.

121 (*b*). On peut déduire de ce théorème une solution du problème posé au n° 119. Lorsque le quatrième cercle se réduit à un point, ce point appartient au cercle tangent aux trois

premiers; les expressions (41), (42) et (43) représentent la longueur des tangentes menées par ce point à ces trois cercles. D'ailleurs, en désignant par S, S' et S'' les valeurs particulières que prennent les équations des trois premiers cercles lorsqu'on y remplace les coordonnées courantes par celles de ce point, on aura, d'après le n° 90,

$$(41) = \sqrt{S}, \quad (42) = \sqrt{S'}, \quad (43) = \sqrt{S''}.$$

Les coordonnées d'un point quelconque du cercle cherché satisferont donc à la relation

$$(23)\sqrt{S} \pm (31)\sqrt{S'} \pm (12)\sqrt{S''} = 0,$$

qui se transforme en une équation du quatrième degré lorsqu'on fait disparaître les radicaux. Dans le cas où (23), (31) et (12) sont les tangentes communes directes, elle se décompose en deux équations du second degré représentant respectivement les cercles tangents intérieurement et extérieurement (*fig.* 45) aux trois cercles donnés.

Cette solution et le théorème d'où on la déduit sont dus à M. Casey.

121 (*c*). Ce théorème peut aussi se démontrer sans recourir aux propriétés du quadrilatère inscrit. En prenant, comme au n° 104 (Ex. VI), sur chaque rayon vecteur OP (*fig.* 41), mené par un point O à une courbe, une longueur OQ inversement proportionnelle à OP, on obtient une nouvelle courbe qu'on appelle *inverse* de la courbe donnée. L'inverse, par rapport à l'origine O du cercle

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

a pour équation

$$c(x^2 + y^2) + 2gx + 2fy + 1 = 0.$$

C'est un cercle, excepté dans le cas où $c = 0$ (c'est-à-dire quand le point O est sur le cercle), cas dans lequel c'est une ligne droite. Réciproquement, l'inverse d'une droite est un cercle passant par le point O.

A un couple de cercles correspond, par rapport à un point, un couple inverse, qui forme avec le premier un système jouissant de la propriété suivante, indiquée par M. Casey : le rapport du carré de la tangente commune au produit des rayons est le même dans l'un et l'autre couple (*). En effet, le rayon r d'un cercle étant donné par (80)

$$r^2 = g^2 + f^2 - c,$$

celui de son inverse s'obtiendra en remplaçant, dans cette équation, g, f et c par $\frac{g}{c}, \frac{f}{c}, \frac{1}{c}$, et sera ainsi égal à $\frac{r}{c}$. La quantité $D^2 - r^2 - r'^2$, qui est représentée par $c + c' - 2gg' - 2ff'$ (112, Ex. I), deviendra, par une substitution analogue, égale à $\frac{D^2 - r^2 - r'^2}{cc'}$. Le rapport de $D^2 - r^2 - r'^2$, au produit rr' des rayons, et, par suite, le rapport de $D^2 - (r \pm r')^2$ à rr' est donc le même pour chacun des couples.

Considérons maintenant quatre cercles tangents à une même droite en quatre points. Les distances mutuelles de ces quatre points situés en ligne droite, qui sont alors les longueurs des tangentes communes, sont liées par la relation

$$(12)(34) + (14)(32) = (13)(24),$$

comme il est facile de le voir en partant de l'identité

$$(b - a)(d - c) + (d - a)(c - b) = (c - a)(d - b),$$

dans laquelle a, b, c, d représentent les distances de ces quatre points à un point quelconque de la droite pris pour origine.

L'inverse du système, par rapport à un point quelconque, se composera de quatre cercles tangents à un cinquième; et la relation précédente subsistera encore, puisque le rapport de chacun de ses termes à la racine carrée du produit des

(*) Ce qui revient à dire (112, Ex. VIII), que l'angle sous lequel se coupent les deux cercles d'un couple est le même pour les deux couples : proposition facile à établir géométriquement.

rayons des quatre premiers cercles, ne change point quand on passe du premier système à son inverse.

La relation entre les tangentes communes étant ainsi établie directement, on peut en déduire, comme cas particulier, les propriétés relatives aux côtés et aux diagonales du quadrilatère inscrit. Il suffit, pour cela, de supposer que les quatre premiers cercles se réduisent à quatre points.

Cette démonstration fait voir en outre que, dans le cas où deux cercles sont tangents à la fois intérieurement ou extérieurement au cinquième cercle, il faut faire entrer dans la relation donnée ci-dessus leur tangente commune directe, et leur tangente inverse lorsqu'ils sont situés l'un à l'intérieur, l'autre à l'extérieur. Ainsi l'équation des quatre couples de cercles tangents à trois cercles donnés

$$(23)\sqrt{S} \pm (31)\sqrt{S'} \pm (12)\sqrt{S''} = 0$$

représentera :

1° Les cercles tangents laissant du même côté, intérieur ou extérieur, les trois cercles donnés lorsque (12), (23) et (31) seront les tangentes communes directes; 2° les cercles touchant intérieurement le premier cercle et extérieurement les deux autres (ou inversement), lorsque (23) sera une tangente directe, (31) et (12) des tangentes inverses; 3° enfin les deux autres couples de cercles, en considérant successivement l'une des tangentes (31) et (12) comme directe, et la troisième tangente comme inverse.



*CHAPITRE IX.

APPLICATION DE LA MÉTHODE DES NOTATIONS ABRÉGÉES A L'ÉQUATION DU CERCLE.

122. Pour savoir si une équation du deuxième degré, exprimée au moyen de la méthode des notations abrégées exposée au Chapitre IV, représente un cercle, il suffit de la ramener à une équation en x et y, en y remplaçant chacune des abréviations α par son expression équivalente

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p,$$

et de voir, dans cette équation transformée, si le terme en xy disparaît, et si les coefficients de x^2 et de y^2 sont égaux. Les exemples suivants serviront d'éclaircissements.

Trouver la condition pour qu'un cercle soit le lieu d'un point tel, que le produit de ses distances à deux côtés opposés d'un quadrilatère soit dans un rapport constant k avec le produit de ses distances aux autres côtés.

Soient α, β, γ, δ les quatre côtés du quadrilatère; l'équation du lieu est

$$\alpha\gamma = k\beta\delta$$

et représente une courbe du second degré qui passe par les sommets du quadrilatère, puisque son équation est satisfaite par une quelconque des quatre conditions

$$\alpha = 0,\quad \beta = 0;\qquad \alpha = 0,\quad \delta = 0;$$
$$\beta = 0,\quad \gamma = 0;\qquad \gamma = 0,\quad \delta = 0.$$

Si l'on remplae, dans cette équation, les abréviations α, β, γ, δ par leurs expressions équivalentes en x et y, on obtient l'é-

quation transformée

$$(x\cos\alpha + y\sin\alpha - p)(x\cos\gamma + y\sin\gamma - p'')$$
$$= k(x\cos\beta + y\sin\beta - p')(x\cos\delta + y\sin\delta - p''').$$

En écrivant qne les coefficients de x^2 et de y^2 sont égaux, et que celui de xy est nul, on trouve, pour exprimer que cette courbe est un cercle, les conditions

$$\cos(\alpha + \gamma) = k\cos(\beta + \delta),$$
$$\sin(\alpha + \gamma) = k\sin(\beta + \delta).$$

Si l'on ajoute ces équations, après les avoir élevées au carré, il vient

$$k = \pm 1.$$

Cette condition étant remplie, on a

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta, \quad \text{ou} \quad \alpha + \gamma = 180^\circ + \beta + \delta;$$

d'où

$$\alpha - \beta = \delta - \gamma, \quad \text{ou} \quad \alpha - \beta = 180^\circ + \delta - \gamma;$$

et comme l'angle $\alpha - \beta$ est (61) le supplément de l'angle formé par les droites α et β entre lesquelles se trouve l'origine, cette condition est satisfaite lorsque le quadrilatère est inscriptible. Quand l'origine est à l'intérieur du quadrilatère, on doit prendre $k = -1$: l'angle compris entre α et β est alors supplémentaire de l'angle formé par γ et δ; on prendra, au contraire, $k = 1$ si l'origine est en dehors du quadrilatère, et les angles opposés seront alors égaux.

123. *Trouver la condition pour qu'un cercle soit le lieu d'un point tel, que le carré de sa distance à la base d'un triangle soit dans un rapport constant avec le produit de ses distances aux autres côtés.*

Soient α, β, γ les côtés du triangle, l'équation du lieu sera

$$\alpha\beta = k\gamma^2.$$

Si, pour déterminer les points où la droite α rencontre le lieu,

on fait $\alpha = 0$ dans son équation, on trouve $\gamma^2 = 0$. Le premier membre étant un carré parfait, la droite α rencontre le lieu en deux points qui coïncident; autrement dit (83), elle est tangente au lieu au point (α, γ). De même, β est la tangente au point (β, γ). La droite γ est donc la corde de contact des deux tangentes α et β.

En remplaçant les abréviations par leurs valeurs développées, comme au numéro précédent, et écrivant que les conditions indiquées au n° 80 sont remplies, on trouve

$$\cos(\alpha+\beta) = k\cos 2\gamma, \quad \sin(\alpha+\beta) = k\sin 2\gamma,$$

et, par suite,

$$k = 1, \quad \alpha - \gamma = \gamma - \beta.$$

Pour qne le lieu soit un cercle il faut donc que le triangle soit isoscèle : résultat qui peut s'énoncer ainsi :

Le produit des distances du point d'un cercle à deux tangentes est égal au carré de la distance de ce point à leur corde de contact.

EXERCICE.

Trouver la condition pour qu'un cercle soit le lieu d'un point tel, que la somme c^2 des carrés de ses distances aux trois côtés d'un triangle $\alpha\beta\gamma$ soit constante.

L'équation du lieu étant en général $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = c^2$, représentera un cercle lorsqu'on aura

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = 0, \qquad \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 0;$$
$$\cos 2\alpha = -2\cos(\beta+\gamma)\cos(\beta-\gamma), \quad \sin 2\alpha = -2\sin(\beta+\gamma)\cos(\beta-\gamma).$$

En élevant au carré et ajoutant, il vient

$$1 = 4\cos^2(\beta-\gamma), \quad \beta - \gamma = 60°.$$

On verrait de même que chacun des autres angles doit être égal à 60 degrés. Il faut donc que le triangle soit équilatéral.

124. *Trouver l'équation du cercle circonscrit au triangle formé par les droites* $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$.

Une équation de la forme

$$l\beta\gamma + m\gamma\alpha + n\alpha\beta = 0$$

représente une courbe du second degré circonscrite à ce triangle, puisqu'elle est satisfaite par chacune des suppositions

$$\alpha = 0,\ \beta = 0;\quad \beta = 0,\ \gamma = 0;\quad \gamma = 0,\ \alpha = 0.$$

En suivant la marche indiquée au n° 122, on trouve, pour exprimer que cette courbe devient un cercle, les conditions

$$l\cos(\beta+\gamma) + m\cos(\gamma+\alpha) + n\cos(\alpha+\beta) = 0,$$
$$l\sin(\beta+\gamma) + m\sin(\gamma+\alpha) + n\sin(\alpha+\beta) = 0.$$

Mais lorsqu'on a les deux équations

$$l\alpha' + m\beta' + n\gamma' = 0,$$
$$l\alpha'' + m\beta'' + n\gamma'' = 0,$$

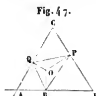
les quantités l, m et n sont proportionnelles à $\beta'\gamma'' - \beta''\gamma'$, $\gamma'\alpha'' - \gamma''\alpha'$, $\alpha'\beta'' - \alpha''\beta'$ (65); dans le cas actuel, l, m et n seront donc proportionnels à $\sin(\beta-\gamma)$, $\sin(\gamma-\alpha)$, $\sin(\alpha-\beta)$ ou à $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$, A, B et C désignant les angles du triangle formé par les droites α, β, γ, comme au n° 61.

L'équation du cercle circonscrit sera donc

$$\beta\gamma\sin A + \gamma\alpha\sin B + \alpha\beta\sin C = 0.$$

125. L'interprétation géométrique de cette équation n'est pas sans importance. Les perpendiculaires OQ, OP (*fig.* 47) abaissées

Fig. 47.



d'un point O sur les deux côtés α et β du triangle ABC ont précisément pour longueur α et β (51); d'ailleurs l'angle QOP

qu'elles comprennent est le supplément de l'angle C du triangle : le produit $\alpha\beta \sin C$ mesure donc le double de l'aire du triangle OPQ. De même $\gamma\alpha \sin B$, $\beta\gamma \sin A$ représentent respectivement le double de l'aire des triangles OPR, OQR, OR étant perpendiculaire à γ. La quantité

$$\beta\gamma \sin A + \gamma\alpha \sin B + \alpha\beta \sin C$$

est donc le double de l'aire du triangle PQR, et l'équation du numéro précédent exprime que, si le point O appartient au cercle circonscrit au triangle, l'aire PQR est nulle, c'est-à-dire (36, Corollaire II) que les trois points P, Q, R sont en ligne droite.

Le lieu d'un point O tel, que la surface du triangle PQR formé par ses projections sur les trois côtés du triangle ABC soit constante, a pour équation

$$\beta\gamma \sin A + \gamma\alpha \sin B + \alpha\beta \sin C = \text{const.}$$

Cette équation, ne différant que par une constante de celle du cercle circonscrit, représente (81) un cercle concentrique à ce dernier.

126. Reprenons l'équation $l\beta\gamma + m\gamma\alpha + n\alpha\beta = 0$, nous pouvons la mettre sous la forme

$$\gamma(l\beta + m\alpha) + n\alpha\beta = 0;$$

la droite γ rencontre la courbe sur les droites α et β (124), puisque, si nous faisons $\gamma = 0$ dans l'équation ci-dessus, elle se réduit à $\alpha\beta = 0$. Pour la même raison, la droite $l\beta + m\alpha$ rencontre la courbe en deux points situés sur les droites α et β; mais ces deux points coïncident, puisque $l\beta + m\alpha$ passe par l'intersection de α et β : la droite $l\alpha + m\beta$ rencontre donc la courbe en deux points qui coïncident, c'est-à-dire lui est tangente (83) au point (α, β).

Cette conséquence de l'équation $l\beta\gamma + m\gamma\alpha + n\alpha\beta = 0$, ainsi que quelques autres dont l'exposé va suivre, ne supposent point aux coefficients l, m, n les valeurs particulières $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$: elles s'appliquent donc non-seulement à

un cercle, mais à une courbe quelconque du second degré circonscrite à un triangle.

Dans le cas du cercle, la tangente a pour équation

$$\alpha \sin B + \beta \sin A = 0,$$

et, comme $\alpha \sin A + \beta \sin B = 0$ représente une parallèle au côté γ menée par le sommet (α, β) (64), la tangente fait avec un des côtés α du triangle le même angle que le côté opposé γ fait avec le troisième β (55).

Les équations des tangentes menées à la courbe du second degré par les trois sommets du triangle peuvent s'écrire

$$\frac{\beta}{m} + \frac{\gamma}{n} = 0, \quad \frac{\gamma}{n} + \frac{\alpha}{l} = 0, \quad \frac{\alpha}{l} + \frac{\beta}{m} = 0,$$

par suite, les trois points où ces tangentes coupent respectivement les côtés opposés du triangle sont situés sur la droite

$$\frac{\alpha}{l} + \frac{\beta}{m} + \frac{\gamma}{n} = 0.$$

En retranchant l'une de l'autre les équations des tangentes, on trouve, pour les droites qui joignent les sommets du triangle formé par les tangentes aux sommets correspondants du triangle primitif,

$$\frac{\beta}{m} - \frac{\gamma}{n} = 0, \quad \frac{\gamma}{n} - \frac{\alpha}{l} = 0, \quad \frac{\alpha}{l} - \frac{\beta}{m} = 0.$$

Ces droites se coupent en un même point (40) (*).

127. Si $\alpha', \beta', \gamma'; \alpha'', \beta'', \gamma''$ sont les coordonnées de deux points de la courbe, la droite qui les joint a pour équation

$$\frac{l\alpha}{\alpha'\alpha''} + \frac{m\beta}{\beta'\beta''} + \frac{n\gamma}{\gamma'\gamma''} = 0;$$

en effet, elle est satisfaite lorsqu'on y remplace les coordonnées courantes α, β, γ par α', β', γ', puisque $\alpha'', \beta'', \gamma''$ vérifient

(*) Les théorèmes de ce numéro sont dus à M. Bobillier (*Annales de Mathématiques*, t. XVIII, p. 320.). La première équation du n° 127 est de M. Hermes.

l'équation de la courbe qui peut se mettre sous la forme

$$\frac{l}{\alpha}+\frac{m}{\beta}+\frac{n}{\gamma}=0.$$

On verrait de même qu'elle est satisfaite par $\alpha'', \beta'', \gamma''$.

On déduit de là, pour l'équation de la tangente en un point $(\alpha', \beta', \gamma')$,

$$\frac{l\alpha}{\alpha'^2}+\frac{m\beta}{\beta'^2}+\frac{n\gamma}{\gamma'^2}=0.$$

Réciproquement, si $\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma=0$ est l'équation d'une tangente, les coordonnées α', β', γ' du point de contact sont données par les relations

$$\frac{l}{\alpha'^2}=\lambda, \quad \frac{m}{\beta'^2}=\mu, \quad \frac{n}{\gamma'^2}=\nu.$$

En portant les valeurs qu'on en tire pour α', β', γ' dans l'équation de la courbe qui doit être satisfaite par les coordonnées du point de contact, on trouve

$$\sqrt{l\lambda}+\sqrt{m\mu}+\sqrt{n\nu}=0.$$

C'est la *condition pour que la droite* $\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma$ *soit tangente à la courbe* $l\beta\gamma+m\gamma\alpha+n\alpha\beta$, et on peut l'appeler (70) l'*équation tangentielle* de la courbe. On obtient aussi cette équation tangentielle en éliminant γ entre l'équation de la droite et celle de la courbe, et exprimant que l'équation résultant en $\frac{\alpha}{\beta}$ a des racines égales.

128. *Trouver la condition pour que l'équation générale du second degré en* α, β, γ

$$a\alpha^2+b\beta^2+c\gamma^2+2f\beta\gamma+2g\gamma\alpha+2h\alpha\beta=0$$

représente un cercle (*).

Les équations de tous les cercles ayant les mêmes termes du second degré, x^2+y^2, ne peuvent différer que par une

(*) Dublin, *Exam. Papers*, janvier 1857.

quantité linéaire. Si donc S représente un cercle, l'équation

$$S + lx + my + n = 0$$

sera celle d'un cercle quelconque, et il en sera de même en coordonnées trilinéaires : il suffit donc d'ajouter à l'équation connue d'un cercle la fonction linéaire $l\alpha + m\beta + n\gamma$, après l'avoir toutefois multipliée par la constante

$$\alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C,$$

afin de conserver l'homogénéité, pour obtenir l'équation d'un cercle quelconque.

Si l'on se reporte au n° **124**, on voit que cette équation peut se mettre sous la forme

$$(l\alpha + m\beta + n\gamma)(\alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C) \\ + k(\beta\gamma \sin A + \gamma\alpha \sin B + \alpha\beta \sin C) = 0.$$

En comparant les coefficients de ses termes en α^2, β^2, γ^2 avec ceux des termes correspondants de l'équation générale, on voit que cette dernière peut s'écrire

$$\left(\frac{a}{\sin A}\alpha + \frac{b}{\sin B}\beta + \frac{c}{\sin C}\gamma\right)(\alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C) \\ = k(\beta\gamma \sin A + \gamma\alpha \sin B + \alpha\beta \sin C).$$

On déduit de là, pour les autres coefficients,

$$2f \sin B \sin C = c \sin^2 B + b \sin^2 C + k \sin A \sin B \sin C,$$
$$2g \sin C \sin A = a \sin^2 C + c \sin^2 A + k \sin A \sin B \sin C,$$
$$2a \sin A \sin B = b \sin^2 A + a \sin^2 B + k \sin A \sin B \sin C;$$

et en éliminant k, on trouve, pour les conditions cherchées,

$$b \sin^2 C + c \sin^2 B - 2f \sin B \sin C \\ = c \sin^2 A + a \sin^2 C - 2g \sin C \sin A \\ = a \sin^2 B + b \sin^2 A - 2h \sin A \sin B.$$

Si deux cercles ont pour équations

$$(l\alpha + m\beta + n\gamma)(\alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C)$$
$$+ h(\beta\gamma \sin A + \gamma\alpha \sin B + \alpha\beta \sin C = o,$$
$$(l'\alpha + m'\beta + n'\gamma)(\alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C)$$
$$+ k(\beta\gamma \sin A + \gamma\alpha \sin B + \alpha\beta \sin C = o,$$

ils ont pour axe radical la droite

$$l\alpha + m\beta + n\gamma - (l'\alpha + m'\beta + n'\gamma) = o,$$

et $l\alpha + m\beta + n\gamma$ représente l'axe radical correspondant au premier de ces cercles et au cercle circonscrit au triangle.

EXERCICES.

I. Vérifier que $\alpha\beta - \gamma^2$ représente un cercle lorsque $A = B$ (123).

Cette équation peut en effet se mettre sous la forme

$$\alpha\beta \sin C + \beta\gamma \sin A + \gamma\alpha \sin B - \gamma(\alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C) = o.$$

II. Les milieux des côtés d'un triangle et les pieds des hauteurs sont situés sur un cercle.

En effet l'équation

$$\alpha^2 \sin A \cos A + \beta^2 \sin B \cos B + \gamma^2 \sin C \cos C$$
$$- (\beta\gamma \sin A + \gamma\alpha \sin B + \alpha\beta \sin C) = o$$

représente une courbe du deuxième degré passant par les points en question; car en y faisant $\gamma = o$, on trouve

$$\alpha^2 \sin A \cos A + \beta^2 \sin B \cos B - \alpha\beta(\sin A \cos B + \sin B \cos A) = o,$$

expression qui se décompose dans les deux facteurs

$$\alpha \sin A - \beta \sin B \quad \text{et} \quad \alpha \cos A - \beta \cos B.$$

Cette courbe est un cercle, puisque son équation peut s'écrire

$$(\alpha \cos A + \beta \cos B + \gamma \cos C)(\alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C)$$
$$- 2(\beta\gamma \sin A + \gamma\alpha \sin B + \alpha\beta \sin C) = o.$$

L'axe radical de ce cercle et du cercle circonscrit a pour équation

$$\alpha \cos A + \beta \cos B + \gamma \cos C = o,$$

qui est aussi celle de l'axe d'homologie du triangle donné par rapport au triangle formé en joignant les pieds des hauteurs.

129. *Trouver l'équation du cercle tangent aux trois côtés du triangle $\alpha\beta\gamma$.*

La courbe du second degré tangente aux trois côtés du triangle a pour équation

$$l^2\alpha^2 + m^2\beta^2 + n^2\gamma^2 - 2mn\beta\gamma - 2nl\gamma\alpha - 2lm\alpha\beta = 0\ (*);$$

puisqu'en y faisant $\gamma = 0$ pour déterminer les points où cette courbe rencontre le côté γ, on obtient le carré parfait

$$l^2\alpha^2 + m^2\beta^2 - 2ml\alpha\beta = 0.$$

Le côté γ est donc tangent à la courbe, et il en est de même des autres côtés.

Cette équation peut aussi se mettre sous la forme commode

$$\sqrt{l\alpha} + \sqrt{m\beta} + \sqrt{n\gamma} = 0,$$

comme il est facile de s'en assurer en faisant disparaître les radicaux.

Avant de déterminer les valeurs de l, m et n, pour lesquelles cette équation représente un cercle, nous allons en déduire quelques propriétés communes à toutes les courbes du second degré inscrites dans des triangles.

En écrivant la première équation sous la forme

$$n\gamma(n\gamma - 2l\alpha - 2m\beta) + (l\alpha - m\beta)^2 = 0,$$

on voit que la droite $(l\alpha - m\beta)$ qui passe par le point (α, β), passe aussi par le point où γ rencontre la courbe. Les trois lignes qui joignent les points de contact des côtés aux som-

(*) A la rigueur, les doubles rectangles $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$,... pourraient avoir le double signe sans que la démonstration cessât de s'appliquer. Si l'on donne le signe + à tous ces rectangles ou à l'un d'eux seulement (les deux autres ayant le signe —); l'équation ne représente plus une courbe du deuxième degré, mais bien le carré de l'une ou l'autre des lignes $l\alpha \pm m\beta \pm n\gamma$. La forme adoptée ici renferme le cas où un seul des rectangles est négatif, pourvu que l'on suppose que l, m et n emportent leurs signes avec eux.

mets opposés du triangle circonscrit ont donc pour équations

$$l\alpha - m\beta = 0, \quad m\beta - n\gamma = 0, \quad n\gamma - l\alpha = 0,$$

et, par suite, se coupent au même point.

La droite $n\gamma - 2l\alpha - 2m\beta = 0$ est tangente à la courbe, puisque, en combinant son équation avec celle de la courbe pour déterminer leurs points d'intersection, nous trouvons le carré parfait $(l\alpha - m\beta)^2 = 0$, c'est-à-dire deux points qui coïncident; la droite $l\alpha - m\beta$ passe d'ailleurs par le point de contact. Si donc, après avoir joint par des droites les sommets du triangle aux points de contact des côtés opposés, nous menons de nouvelles tangentes à la courbe par les points où elle est rencontrée par ces droites, ces tangentes ont pour équations

$$2l\alpha + 2m\beta - n\gamma = 0,$$
$$2m\beta + 2n\gamma - l\alpha = 0,$$
$$2n\gamma + 2l\alpha - m\beta = 0,$$

et rencontrent les côtés qui leur sont opposés en trois points situés sur la droite

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0,$$

puisque cette droite passe par les intersections de la première tangente avec γ, de la seconde avec α, et de la troisième avec β.

130. La corde menée par les deux points $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ de la courbe a pour équation (Dr Hart)

$$\alpha\sqrt{l}\left(\sqrt{\beta'\gamma''} + \sqrt{\beta''\gamma'}\right) + \beta\sqrt{m}\left(\sqrt{\gamma'\alpha''} + \sqrt{\gamma''\alpha'}\right)$$
$$+ \gamma\sqrt{n}\left(\sqrt{\alpha'\beta''} + \sqrt{\alpha''\beta'}\right) = 0:$$

car, en y remplaçant α, β, γ par α', β', γ', le premier membre devient

$$\left(\sqrt{\alpha'\beta'\gamma''} + \sqrt{\beta'\gamma'\alpha''} + \sqrt{\gamma'\alpha'\beta''}\right)\left(\sqrt{l\alpha'} + \sqrt{m\beta'} + \sqrt{n\gamma'}\right)$$
$$- \sqrt{\alpha'\beta'\gamma'}\left(\sqrt{l\alpha''} + \sqrt{m\beta''} + \sqrt{n\gamma''}\right),$$

et se réduit à zéro, puisque les deux points sont sur la courbe.

En égalant respectivement α'', β'', γ'' à α', β', γ' dans l'équation de la corde, on obtient l'équation de la tangente, qui se ramène à la forme

$$\alpha\sqrt{\frac{l}{\alpha'}} + \beta\sqrt{\frac{m}{\beta'}} + \gamma\sqrt{\frac{n}{\gamma'}} = 0,$$

lorsqu'on la divise par $2\sqrt{\alpha'\beta'\gamma'}$.

Réciproquement, si la droite $\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma$ est tangente à la courbe, les coordonnées α', β', γ' du point de contact seront définies par les relations

$$\sqrt{\frac{l}{\alpha'}} = \lambda, \quad \sqrt{\frac{m}{\beta'}} = \mu, \quad \sqrt{\frac{n}{\gamma'}} = \nu.$$

En tirant de là les valeurs de α', β', γ' et les portant dans l'équation de la courbe, on trouve

$$\frac{l}{\lambda} + \frac{m}{\mu} + \frac{n}{\nu} = 0$$

pour exprimer la condition que la droite $\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma$ lui est tangente : c'est l'*équation tangentielle* de la courbe.

Pour mieux faire ressortir la réciprocité qui existe entre les équations ordinaire et tangentielle de la courbe, nous résoudrons le problème inverse : trouver l'équation de la courbe dont les tangentes satisfont à la relation

$$\frac{l}{\lambda} + \frac{m}{\mu} + \frac{n}{\nu} = 0.$$

Reprenons la marche indiquée au n° 127. Les deux droites $\lambda'\alpha + \mu'\beta + \nu'\gamma$, $\lambda''\alpha + \mu''\beta + \nu''\gamma$ seront tangentes à la courbe dont nous cherchons l'équation, si les quantités λ', μ', ν', λ'', μ'', ν'' satisfont à la relation précédente; mais (70) une équation de la forme $A\lambda + B\mu + C\nu = 0$, exprimant que la droite

$$\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma = 0$$

passe par un certain point, est l'équation tangentielle de ce

point : donc la relation

$$\frac{l\lambda}{\lambda'\lambda''} + \frac{m\mu}{\mu'\mu''} + \frac{n\nu}{\nu'\nu''} = 0,$$

qui est vérifiée par les coordonnées tangentielles des deux droites, est l'équation tangentielle de leur point d'intersection.

En égalant respectivement λ', μ', ν' à λ'', μ'', ν'', nous aurons l'équation de l'intersection de deux tangentes consécutives, autrement dit l'équation du point de contact d'une tangente. On trouve ainsi

$$\frac{l\lambda}{\lambda'^2} + \frac{m\mu}{\mu'^2} + \frac{n\nu}{\nu'^2} = 0.$$

Les coordonnées trilinéaires du point de contact seront alors

$$\alpha = \frac{l}{\lambda'^2}, \quad \beta = \frac{m}{\mu'^2}, \quad \gamma = \frac{n}{\gamma'^2}.$$

Si l'on tire de là les valeurs λ', μ', ν' pour les porter dans la relation à laquelle elles doivent satisfaire par hypothèse, on obtient pour l'équation de la courbe cherchée

$$\sqrt{l\alpha} + \sqrt{m\beta} + \sqrt{n\gamma} = 0.$$

131. Les conditions pour que la courbe du deuxième degré tangente aux côtés d'un triangle soit un cercle sont (**128**)

$$\begin{aligned} & m^2 \sin^2 C + n^2 \sin^2 B + 2mn \sin B \sin C \\ & = n^2 \sin^2 A + l^2 \sin^2 C + 2nl \sin A \sin C \\ & = l^2 \sin^2 B + m^2 \sin^2 A + 2lm \sin A \sin B, \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} & m \sin C + n \sin B \\ & = \pm (n \sin A + l \sin C) \\ & = \pm (l \sin B + m \sin A). \end{aligned}$$

On peut mener quatre cercles tangents aux trois côtés d'un triangle, puisqu'en changeant les signes, on peut écrire ces

équations de quatre manières différentes. En prenant à la fois tous les membres positifs, on aura les équations

$$l \sin C - m \sin C + n(\sin A - \sin B) = 0,$$
$$l \sin B + m(\sin A - \sin C) - n \sin B = 0,$$

d'où l'on tire (124)

$$l = \sin A(\sin B + \sin C - \sin A),$$
$$m = \sin B(\sin C + \sin A - \sin B),$$
$$n = \sin C(\sin A + \sin B - \sin C).$$

Mais puisque, dans un triangle, on a

$$\sin B + \sin C - \sin A = 4 \cos \tfrac{1}{2} A \sin \tfrac{1}{2} B \sin \tfrac{1}{2} C,$$

ces valeurs de l, m et n sont respectivement proportionnelles à $\cos^2 \frac{1}{2} A$, $\cos^2 \frac{1}{2} B$, $\cos^2 \frac{1}{2} C$; l'équation du cercle correspondant, qui est *inscrit* dans le triangle, est donc

$$\cos \tfrac{1}{2} A \sqrt{\alpha} + \cos \tfrac{1}{2} B \sqrt{\beta} + \cos \tfrac{1}{2} C \sqrt{\gamma} = 0 \ (*),$$

ou bien

$$\alpha^2 \cos^4 \tfrac{1}{2} A + \beta^2 \cos^4 \tfrac{1}{2} B + \gamma^2 \cos^4 \tfrac{1}{2} C - 2\alpha\beta \cos^2 \tfrac{1}{2} A \cos^2 \tfrac{1}{2} B$$
$$- 2\beta\gamma \cos^2 \tfrac{1}{2} B \cos^2 \tfrac{1}{2} C - 2\alpha\gamma \cos^2 \tfrac{1}{2} C \cos^2 \tfrac{1}{2} A = 0.$$

Il est facile, du reste, de s'assurer qu'elle représente un cercle en la mettant sous la forme

$$\left(\alpha \frac{\cos^4 \frac{1}{2} A}{\sin A} + \beta \frac{\cos^4 \frac{1}{2} B}{\sin B} + \gamma \frac{\cos^4 \frac{1}{2} C}{\sin C}\right)(\alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C)$$
$$- \frac{4 \cos^2 \frac{1}{2} A \cos^2 \frac{1}{2} B \cos^2 \frac{1}{2} C}{\sin A \sin B \sin C}(\beta\gamma \sin A + \gamma\alpha \sin B + \alpha\beta \sin C) = 0.$$

(*) Le Dr Hart déduit cette équation de la manière suivante de celle du cercle circonscrit. Soient α', β', γ' les côtés du triangle formé en joignant les points de contact; A′, B′, C′ les angles de ce triangle. L'équation cherchée est (124)

$$\beta'\gamma' \sin A' + \gamma'\alpha' \sin B' + \alpha'\beta' \sin C' = 0,$$

mais (123), pour chaque point du cercle, on a $\alpha'^2 = \beta\gamma$, $\beta'^2 = \gamma\alpha$, $\gamma'^2 = \alpha\beta$; d'ailleurs $A' = 90^\circ - \frac{1}{2} A$; et en substituant ces valeurs dans l'équation précédente, on retombe sur l'équation

$$\cos \tfrac{1}{2} A \sqrt{\alpha} + \cos \tfrac{1}{2} B \sqrt{\beta} + \cos \tfrac{1}{2} C \sqrt{\gamma} = 0.$$

On trouverait de même pour l'équation d'un des cercles exinscrits

$$\alpha^2\cos^4\tfrac{1}{2}A + \beta^2\sin^4\tfrac{1}{2}B + \gamma^2\sin^4\tfrac{1}{2}C - 2\beta\gamma\sin^2\tfrac{1}{2}B\sin^2\tfrac{1}{2}C$$
$$+ 2\gamma\alpha\sin^2\tfrac{1}{2}C\cos^2\tfrac{1}{2}A + 2\alpha\beta\sin^2\tfrac{1}{2}B\cos^2\tfrac{1}{2}A = 0,$$

ou bien

$$\cos\tfrac{1}{2}A\sqrt{-\alpha} + \sin\tfrac{1}{2}B\sqrt{\beta} + \sin\tfrac{1}{2}C\sqrt{\gamma} = 0.$$

Le signe — de α tient à ce que ce cercle n'est pas du même côté de α que le cercle inscrit.

EXERCICE.

Trouver l'axe radical du cercle inscrit et du cercle passant par les milieux des côtés du triangle.

En employant la méthode du n° 128, on trouve pour son équation

$$2\cos^2\frac{1}{2}A\cos^2\frac{1}{2}B\cos^2\frac{1}{2}C(\alpha\cos A + \beta\cos B + \gamma\cos C)$$
$$= \sin A\sin B\sin C\left(\alpha\frac{\cos^4\frac{1}{2}A}{\sin A} + \beta\frac{\cos^4\frac{1}{2}B}{\sin B} + \gamma\frac{\cos^4\frac{1}{2}C}{\sin C}\right);$$

divisant par $2\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C$, le coefficient de α devient

$$\cos\frac{1}{2}A\left(2\cos^2\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C - \cos A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C\right),$$

ou

$$\cos\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}(A-B)\sin\frac{1}{2}(A-C);$$

par suite, l'équation peut s'écrire

$$\frac{\alpha\cos\frac{1}{2}A}{\sin\frac{1}{2}(B-C)} + \frac{\beta\cos\frac{1}{2}B}{\sin\frac{1}{2}(C-A)} + \frac{\gamma\cos\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}(A-B)} = 0.$$

La droite qu'elle représente est tangente (130) au cercle inscrit, et les coordonnées du point de contact sont $\sin^2\frac{1}{2}(B-C)$, $\sin^2\frac{1}{2}(C-A)$ et $\sin^2\frac{1}{2}(A-B)$. Il résulte de ces valeurs (66) que le point de contact

se trouve sur la ligne des centres dont les coordonnées sont 1, 1, 1 et cos(B — C), cos(C — A), cos(A — B).

On démontrerait de la même manière que le cercle passant par les milieux des côtés est tangent à tous les cercles qui touchent les côtés. Ce théorème a été indiqué par Feuerbach (*).

132. Lorsque l'équation d'un cercle en coordonnées trilinéaires est équivalente à une équation en coordonnées rectangulaires dans laquelle m est le coefficient de x^2 et de y^2, le résultat obtenu en y remplaçant les coordonnées courantes par les coordonnées d'un point, exprime m fois le carré de la tangente menée au cercle par ce point. On pourra donc déterminer cette constante m en cherchant, par des considérations géométriques, la longueur de la tangente menée au cercle par un point, et en déduire alors la longueur de la tangente menée par un autre point. Si, après avoir calculé ainsi les constantes m et m' relatives à deux cercles, on divise respectivement leurs équations par m et m', la différence des résultats obtenus, qui représente l'axe radical des deux cercles, sera toujours divisible par $\alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C$.

(*) M. Casey a donné, du théorème de Feuerbach, une démonstration qui peut s'appliquer au théorème beaucoup plus général du Dr Hart : *Les cercles tangents à trois cercles donnés sont quatre par quatre tangents à un même cercle.* Désignons par 1, 2 et 3 les cercles exinscrits, par 4 le cercle inscrit, par (12) et (12)' les longueurs respectives des tangentes directes et inverses communes aux cercles 1 et 2, et soient a, b, c les côtés du triangle rangés par ordre de grandeur. La droite a ayant d'un côté le cercle 1, et de l'autre les cercles 2, 3 et 4, on aura (121)(c),

$$(13)'(24) = (12)'(34) + (14)'(23);$$

de même

$$(12)'(34) + (24)'(13) = (23)'(14),$$

$$(23)'(14) = (13)'(24) + (34)'(12);$$

ajoutant membre à membre, il vient

$$(24)'(13) = (14)'(23) + (34)'(12).$$

Les quatre cercles 1, 2, 3 et 4 sont donc tangents à un cinquième cercle qui laisse le dernier d'un côté et les trois premiers de l'autre.

EXERCICES.

I. Trouver la valeur de la constante m du cercle

$$\alpha^2 \sin A \cos A + \beta^2 \sin B \cos B + \gamma^2 \sin C \cos C - \beta\gamma \sin A - \gamma\alpha \sin B - \alpha\beta \sin C = 0$$

passant par le milieu des côtés du triangle de référence (128, Ex. II).

Puisque ce cercle coupe le côté γ en deux points dont les distances au sommet A sont $\frac{1}{2}c$ et $b\cos A$, le carré de la tangente menée à ce cercle par le point A sera $\frac{1}{2}bc\cos A$. Et comme pour le point A, on a $\beta = 0$, $\gamma = 0$; le résultat obtenu en substituant aux coordonnées courantes les coordonnées du point A dans l'équation du cercle sera $\alpha'^2 \sin A \cos A$ (α' étant la distance du sommet A au côté opposé), ou bien

$$bc \sin A \sin B \sin C \cos A.$$

On aura donc

$$m = 2 \sin A \sin B \sin C.$$

II. Déterminer la constante m pour le cercle circonscrit

$$\beta\gamma \sin A + \gamma\alpha \sin B + \alpha\beta \sin C = 0.$$

Si de l'équation de l'Ex. précédent nous retranchons les termes linéaires

$$(\alpha \cos A + \beta \cos B + \gamma \cos C)(\alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C) \quad (64),$$

le coefficient de $x^2 + y^2$ ne change pas. La constante cherchée est donc

$$- \sin A \sin B \sin C.$$

III. Trouver la distance D entre les centres des cercles inscrit et circonscrit.

Soient r et R les rayons de ces cercles : le carré de la tangente menée par le centre du cercle inscrit au cercle circonscrit sera égal à $D^2 - R^2$ et s'obtiendra en substituant les coordonnées du centre $\alpha = \beta = \gamma = r$ du cercle inscrit dans l'équation (Ex. II) du cercle circonscrit. On a par suite

$$D^2 - R^2 = - \frac{r^2(\sin A + \sin B + \sin C)}{\sin A \sin B \sin C} = -2Rr.$$

Donc

$$D^2 = R^2 - 2Rr.$$

IV. Trouver la distance D entre les centres du cercle inscrit et du cercle passant par le milieu des côtés.

Soit ρ le rayon de ce dernier cercle; en employant la formule

$$\sin A \cos A + \sin B \cos B + \sin C \cos C = 2 \sin A \sin B \sin C,$$

on aura

$$D^2 - \rho^2 = r^2 - Rr;$$

et comme $R = 2\rho$, on en déduit $D = r - \rho$, autrement dit les cercles sont tangents.

V. Trouver la constante m pour le cercle inscrit (131)

RÉPONSE. $\quad m = 4r^2 \cos^2 \frac{1}{2} A \cos^2 \frac{1}{2} B \cos^2 \frac{1}{2} C.$

VI. Trouver l'équation tangentielle du cercle ayant $(\alpha', \beta', \gamma')$ pour centre et r pour rayon.

En procédant comme au n° 86, Ex. IV, et en se reportant à la formule du n° 61, on trouve pour l'équation cherchée

$$\begin{aligned}&(\lambda\alpha' + \mu\beta' + \nu\gamma')^2\\ &\quad = r^2(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 - 2\mu\nu\cos A + 2\nu\lambda\cos B - 2\lambda\mu\cos C).\end{aligned}$$

L'équation correspondante en α, β, γ est la suivante :

$$\begin{aligned}r^2(\alpha\sin A + \beta\sin B + \gamma\sin C)^2&\\ = (\beta\gamma' - \beta'\gamma)^2 + (\gamma\alpha' - \gamma'\alpha)^2 + (\alpha\beta' - \alpha'\beta)^2&\\ - 2(\gamma\alpha' - \gamma'\alpha)(\alpha\beta' - \alpha'\beta)\cos A&\\ - 2(\alpha\beta' - \alpha'\beta)(\beta\gamma' - \beta'\gamma)\cos B&\\ - 2(\beta\gamma' - \beta'\gamma)(\gamma\alpha' - \gamma'\alpha)\cos C,&\end{aligned}$$

comme on peut s'en assurer en employant la méthode indiquée au n° 285.

Cette équation donne aussi une expression pour la distance de deux points.

VII. Les projections sur les côtés du triangle de référence des points $(\alpha', \beta', \gamma')$ et $\left(\frac{1}{\alpha'}, \frac{1}{\beta'}, \frac{1}{\gamma'}\right)$ (*voir* n° 55) sont sur un même cercle.

En se reportant au n° 61, Ex. VI, on voit que ce cercle a pour équation

$$\begin{aligned}&(\beta\gamma\sin A + \gamma\alpha\sin B + \alpha\beta\sin C)(\alpha'\sin A + \beta'\sin B + \gamma'\sin C)\\ &\quad\times(\beta'\gamma'\sin A + \gamma'\alpha'\sin B + \alpha'\beta'\sin C)\\ &\quad = \sin A\sin B\sin C(\alpha\sin A + \beta\sin B + \gamma\sin C)\\ &\quad\times\left[\frac{\alpha\alpha'(\beta' + \gamma'\cos A)(\gamma' + \beta'\cos A)}{\sin A} + \frac{\beta\beta'(\gamma' + \alpha'\cos B)(\alpha' + \gamma'\cos B)}{\sin B}\right.\\ &\qquad\qquad\left. + \frac{\gamma\gamma'(\alpha' + \beta'\cos C)(\beta' + \alpha'\cos C)}{\sin C}\right].\end{aligned}$$

132 (*a*). La notation des déterminants (*) est actuellement d'un usage assez fréquent, pour que nous puissions y avoir recours sans inconvénient, dans les Chapitres les moins élémentaires de ce Traité.

Le double de l'aire du triangle formé par les trois points (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) (n° 36) est donné par le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

La condition (38) pour que trois droites se coupent en un même point peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} = 0.$$

Les équations du cercle passant par trois points (94), et du cercle en coupant orthogonalement trois autres (112, Ex. II), sont respectivement

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x'^2+y'^2 & x' & y' & 1 \\ x''^2+y''^2 & x'' & y'' & 1 \\ x'''^2+y'''^2 & x''' & y''' & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ c' & -g' & -f' & 1 \\ c'' & -g'' & -f'' & 1 \\ c''' & -g''' & -f''' & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

On peut aussi obtenir l'équation de ce dernier cercle en se basant sur le théorème du n° 116 (Ex. VI), et en le considérant comme le lieu du point dont les polaires, par rapport aux trois cercles donnés, passent par un même point; on trouve ainsi

$$\begin{vmatrix} x+g' & y+f' & g'x+f'y+c' \\ x+g'' & y+f'' & g''x+f''y+c'' \\ x+g''' & y+f''' & g'''x+f'''y+c''' \end{vmatrix} = 0.$$

(*) La théorie des déterminants a été exposée par M. Salmon dans ses *Leçons d'Algèbre supérieure*. *Voir* les quatre premières Leçons de la traduction française, par M. Bazin. Paris, Gauthier-Villars; 1868.

Nous discuterons plus loin l'équation correspondante relative à trois courbes du second degré.

EXERCICES.

I. Trouver la condition pour que les équations

$$ax + by + c = a'x + b'y + c' = a''x + b''y + c'' = a'''x + b'''y + c'''$$

soient compatibles.

Soit λ la valeur commune de chacune de ces quantités. En éliminant x, y et λ entre les quatre équations $ax + by + c = \lambda, \ldots,$ on trouve pour la condition cherchée :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a' & a'' & a''' \\ b & b' & b'' & b''' \\ c & c' & c'' & c''' \end{vmatrix} = 0,$$

ou bien

$$A + C = B + D,$$

A, B, C, D désignant les quatre déterminants mineurs obtenus en supprimant la première ligne, et successivement chacune des colonnes dans le déterminant qui précède.

La condition pour que quatre droites forment un quadrilatère circonscrit peut s'obtenir en exprimant que les équations $\alpha = \beta = \gamma = \delta$ sont compatibles. Dans ce cas, les déterminants mineurs A, B, C, D représentent respectivement le produit d'un côté du quadrilatère par les sinus des deux angles adjacents.

II. Trouver les relations qui lient les distances deux à deux de quatre points pris sur un cercle.

En effectuant, d'après la règle connue, le produit des deux déterminants

$$\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & -2x_1 & -2y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & -2x_2 & -2y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & -2x_3 & -2y_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2 & -2x_4 & -2y_1 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2+y_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2+y_2^2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2+y_3^2 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4^2+y_4^2 \end{vmatrix}$$

qui expriment tous deux la condition indiquée au n° 94, on trouve pour la relation cherchée

$$\begin{vmatrix} 0 & (12)^2 & (13)^2 & (14)^2 \\ (12)^2 & 0 & (23)^2 & (24)^2 \\ (13)^2 & (23)^2 & 0 & (34)^2 \\ (14)^2 & (24)^2 & (34)^2 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

dans laquelle $(12)^2$ représente le carré de la distance des deux points 1 et 2. Le développement du déterminant conduit à l'équation

$$(12)(34) \pm (13)(24) \pm (14)(23) = 0.$$

III. Trouver une relation entre les distances deux à deux de quatre points sur un plan.

Ajoutons une unité et des zéros aux deux déterminants dont nous avons fait le produit dans l'Exercice précédent, il vient

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1^2+y_1^2 & -2x_1 & -2y_1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & x_1 & y_1 & x_1^2+y_1^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}.$$

Nous avons maintenant cinq lignes horizontales et quatre colonnes seulement; le produit doit donc être nul. Mais ce produit n'est autre que le déterminant

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & (12)^2 & (13)^2 & (14)^2 \\ 1 & (12)^2 & 0 & (23)^2 & (24)^2 \\ 1 & (13)^2 & (23)^2 & 0 & (34)^2 \\ 1 & (14)^2 & (24)^2 & (34)^2 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

qui donne le développement

$$\begin{aligned} &(12)^2(34)^2[(12)^2+(34)^2-(13)^2-(14)^2-(23)^2-(24)^2] \\ &+(13)^2(24)^2[(13)^2+(24)^2-(12)^2-(14)^2-(23)^2-(34)^2] \\ &+(14)^2(23)^2[(14)^2+(23)^2-(12)^2-(13)^2-(24)^2-(34)^2] \\ &+(23)^2(34)^2(42)^2+(14)^2(43)^2(31)^2+(12)^2(24)^2(41)^2 \\ &\qquad\qquad +(12)^2(23)^2(31)^2 = 0. \end{aligned}$$

En remplaçant dans cette équation (23), (31), (12) par a, b, c; (14), (24), (34) par $R+r$, $R+r'$, $R+r''$, on obtient une équation du second degré en R, dont les racines représentent les rayons des cercles touchant à la fois extérieurement (ou intérieurement) les trois cercles ayant r, r', r'' pour rayons, et dont les centres forment un triangle ayant a, b et c pour côtés.

Les solutions des problèmes des Exercices II et III sont dues à M. Cayley. (*Voir* les *Leçons d'Algèbre supérieure*, traduction française, p. 27.)

IV. On peut obtenir une relation entre les longueurs des tangentes communes à cinq cercles, en suivant la même marche que dans l'Exercice précédent.

Écrivons les deux séries d'éléments

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x'^2+y'^2-r'^2 & -2x' & -2y' & -2r' & 1 \\ x''^2+y''^2-r''^2 & -2x'' & -2y'' & -2r'' & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & x' & y' & r' & x'^2+y'^2-r'^2 \\ 1 & x'' & y'' & r'' & x''^2+y''^2-r''^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

contenant chacune cinq lignes horizontales et six colonnes; leur produit doit être nul. On a donc, en suivant les règles indiquées pour la multiplication des déterminants, la relation

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & (12)^2 & (13)^2 & (14)^2 & (15)^2 \\ 1 & (12)^2 & 0 & (23)^2 & (24)^2 & (25)^2 \\ 1 & (13)^2 & (23)^2 & 0 & (34)^2 & (35)^2 \\ 1 & (14)^2 & (24)^2 & (34)^2 & 0 & (45^2) \\ 1 & (15)^2 & (25)^2 & (35)^2 & (45)^2 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

dans laquelle (12) représente la longueur de la tangente commune aux deux premiers cercles. Si le cinquième cercle est tangent aux quatre premiers, les quantités (15), (25), (35), (45) s'annulent, et on retrouve ainsi, comme cas particulier de la relation précédente, le théorème de M. Casey (121) qu'on peut alors exprimer sous la forme suivante :

$$\begin{vmatrix} 0 & (12)^2 & (13)^2 & (14)^2 \\ (12)^2 & 0 & (23)^2 & (24)^2 \\ (13)^2 & (23)^2 & 0 & (34)^2 \\ (14)^2 & (24)^2 & (34)^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

CHAPITRE X.

CLASSIFICATION ET PROPRIÉTÉS COMMUNES DES COURBES REPRÉSENTÉES PAR L'ÉQUATION GÉNÉRALE DU DEUXIÈME DEGRÉ.

133. L'équation du second degré entre deux variables x et y, dans sa forme la plus générale, peut s'écrire

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0,$$

a, b, c, f, g, h étant des constantes.

La nature d'une courbe ne dépend pas de la *grandeur absolue* des coefficients de son équation, mais seulement de leurs *rapports mutuels*, puisqu'en multipliant ou en divisant tous ses termes par une quantité constante, on ne change pas la courbe qu'elle représente. *Cinq* relations suffisent donc pour déterminer une courbe du second degré, dont l'équation renferme *six* constantes, puisqu'on peut les ramener à *cinq* en les divisant toutes par le terme absolu, qui devient alors égal à l'unité.

Ainsi une conique est déterminée par *cinq points*, puisqu'en substituant aux coordonnées courantes, dans l'équation générale, les coordonnées x', y',... des cinq points par où doit passer la courbe, on obtient entre les coefficients cinq équations qui sont suffisantes pour déterminer les cin quantités $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$,....

(*) Nous démontrerons plus loin que la section faite par un plan dans un cône à base circulaire est une courbe du deuxième degré, et que, réciproquement, toute courbe du deuxième degré peut être placée sur un pareil cône, par suite être considérée comme une *section conique*. C'est du reste à ce point de vue que les courbes du deuxième degré furent étudiées d'abord par les géomètres. Ainsi dirons-nous fréquemment, pour abréger : *section conique* et même *conique*, au lieu de *courbe du second degré*.

134. Comme nous aurons souvent à employer dans le cours de ce Chapitre la transformation des coordonnées, nous allons chercher ce que devient l'équation générale du second degré lorsqu'on transporte les axes parallèlement à eux-mêmes à une nouvelle origine (x', y').

Remplaçant, dans l'équation générale, x et y par $x + x'$, $y + y'$ (n° 8), il vient

$$a(x + x')^2 + 2h(x + x')(y + y') + b(y + y')^2 + 2g(x + x') + 2f(y + y') + c = 0.$$

Développant et ordonnant, nous voyons que les coefficients respectifs a, $2h$, b de x^2, xy, y^2 n'ont pas changé, et que g, f, c ont pris les nouvelles valeurs g', f', c' indiquées ci-après :

$$g' = ax' + hy' + g,$$
$$f' = hx' + by' + f,$$
$$c' = ax'^2 + 2hx'y' + by'^2 + 2gx' + 2fy' + c.$$

Donc, *si l'on rapporte à de nouveaux axes parallèles aux anciens l'équation d'une courbe de second degré, les coefficients des termes du degré le plus élevé ne changent pas, et le nouveau terme absolu est le résultat de la substitution des coordonnées de la nouvelle origine aux coordonnées courantes dans l'équation primitive* (*).

135. *Une courbe du second degré est toujours rencontrée par une droite en deux points réels, coïncidents ou imaginaires.*

Ce théorème résulte de ce que, pour déterminer les points d'intersection d'une droite $y = mx + n$ avec une conique, on obtient une équation du second degré.

Ainsi les points où la conique rencontre les axes sont donnés par les équations (84)

$$ax^2 + 2gx + c = 0, \quad by^2 + 2fy + c = 0.$$

(*) Ce théorème est également vrai pour les équations de degré quelconque; on le démontre de la même manière.

L'équation donnant les points d'intersection s'abaisse au premier degré, lorsqu'un des termes en x^2 ou y^2 manque dans l'équation de la conique. C'est ce qui arrive, par exemple, quand, pour chercher l'intersection de

$$xy + 2y^2 + x + 5y + 3 = 0$$

avec l'axe des x, on y fait $y = 0$. Ce cas semble faire exception au cas général, mais l'exception n'est qu'apparente, comme on va le voir.

Lorsque, dans l'équation du second degré

$$Ax^2 + 2Bx + C = 0,$$

le coefficient C s'annule, on ne la regarde pas comme une équation du premier degré, mais bien comme une équation du second degré, ayant pour racines $x' = 0$, $x'' = -\frac{2B}{A}$.

De même, les racines de l'équation transformée

$$C\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 2B\left(\frac{1}{x}\right) + A = 0,$$

lorsque A devient nul, sont $\frac{1}{x'} = 0$, $\frac{1}{x''} = -\frac{2B}{c}$. Les racines de l'équation primitive sont alors $x' = \infty$, $x'' = -\frac{C}{B}$, et l'équation peut encore être considérée comme étant du second degré.

Ce qui précède pourrait aussi se déduire de la valeur générale de x, qui peut s'exprimer par l'une ou l'autre des fractions

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}, \quad x = \frac{C}{-B \mp \sqrt{B^2 - AC}},$$

suivant qu'on la déduit de l'équation en x ou de celle en $\frac{1}{x}$.

Si donc on trouve, pour déterminer les points où une droite rencontre la courbe, une équation du premier degré, on peut

regarder cette équation comme le cas limite

$$0.x^2 + 2Bx + C = 0,$$

auquel correspond une racine infinie, et dire qu'un des points d'intersection de la courbe avec la droite est situé à l'infini.

Ainsi, l'équation citée plus haut pour exemple, pouvant s'écrire

$$(y+1)(x+2y+3) = 0,$$

représente deux droites; l'une coupe l'axe des x à une distance finie de l'origine; l'autre rencontre cet axe à l'infini, puisqu'elle lui est parallèle.

Si, dans l'équation $Ax^2 + 2Bx + C = 0$, B et C s'évanouissent à la fois, les deux racines sont égales à 0; si B et A s'évanouissent, les deux racines deviennent infinies.

On voit donc qu'en tenant compte des points situés à l'infini, ainsi que des points imaginaires, on peut dire qu'une droite rencontre toujours en deux points une courbe du second degré.

136. L'équation générale du deuxième degré, transformée en coordonnées polaires, devient (*)

$$(a\cos^2\theta + 2h\cos\theta\sin\theta + b\sin^2\theta)\rho^2 \\ + 2(g\cos\theta + f\sin\theta)\rho + c = 0;$$

ses racines expriment les longueurs des rayons vecteurs correspondant à une valeur déterminée de l'angle θ. La condition pour qu'un de ces rayons vecteurs soit infini, c'est-à-dire qu'il rencontre la courbe à l'infini, s'obtiendra en écrivant que le coefficient de ρ^2 devient nul. On aura ainsi l'équation du deuxième degré

$$a + 2h\tang\theta + b\tang^2\theta = 0$$

(*) Nous supposons l'équation rapportée à des coordonnées rectangulaires; mais ce que nous allons dire s'appliquerait encore si les coordonnées étaient obliques. Il suffirait alors de remplacer x et y par $\frac{\sin\theta}{\sin\omega}\rho$, $\frac{\sin(\omega-\theta)}{\sin\omega}\rho$ (n° 12); le raisonnement resterait le même.

pour déterminer les valeurs de θ, auxquelles correspondent ces rayons vecteurs; donc

On peut toujours mener par l'origine deux droites réelles, coïncidentes ou imaginaires, qui rencontrent la courbe à l'infini.

Si, après avoir multiplié par ρ^2 l'équation

$$a\cos^2\theta + 2h\sin\theta\cos\theta + b\sin^2\theta = 0,$$

nous y remplaçons $\rho\cos\theta$, $\rho\sin\theta$ par leurs valeurs x et y, nous aurons, pour l'équation de ces deux droites,

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0.$$

Le deuxième point de rencontre de chacune d'elles avec la courbe se déduira sans peine de l'équation

$$2(g\cos\theta + f\sin\theta)\rho + c = 0.$$

Comme l'origine est arbitraire, il s'ensuit que, par un point quelconque, on peut toujours mener deux droites rencontrant la courbe à l'infini. Dans les équations qu'on obtient en prenant successivement les différents points pour origine, les constantes a, b, h ne changent pas (134) : les directions des droites rencontrant la courbe à l'infini sont donc toujours données par la même équation

$$a\cos^2\theta + 2h\sin\theta\cos\theta + b\sin^2\theta = 0.$$

Donc, *si par un point on peut mener deux droites réelles rencontrant la courbe à l'infini, les parallèles menées à ces droites par un autre point quelconque rencontreront aussi la courbe à l'infini* (*).

137. Une des questions les plus importantes qu'on puisse se poser relativement à la *forme* d'une courbe représentée par une équation est celle de savoir si cette courbe est limitée

(*) Ce théorème est évident géométriquement, puisque deux parallèles peuvent être considérées comme passant par le même point situé à l'infini.

dans tous les sens, ou si elle s'étend à l'infini dans une certaine direction. Nous avons déjà vu qu'une équation du second degré peut représenter une courbe limitée en tous sens, qui est le cercle, ou bien un lieu s'étendant à l'infini, comme dans le cas où elle représente deux droites. Il est donc nécessaire de trouver un critérium qui permette de distinguer facilement à laquelle de ces classes appartient le lieu représenté par une équation donnée du second degré.

Ce critérium peut se déduire facilement de ce que nous avons dit au numéro précédent; car si la courbe est limitée dans tous les sens, on ne peut mener par l'origine *aucun* rayon vecteur réel ayant une valeur infinie; autrement dit, on ne peut satisfaire à l'équation

$$a + 2h \tang\theta + b \tang^2\theta = 0$$

par aucune valeur réelle de θ.

1° Si l'on suppose $h^2 - ab < 0$, les racines de cette équation sont imaginaires, et il n'existe aucune droite réelle rencontrant la courbe à l'infini : la courbe est alors *limitée dans tous les sens* et a reçu le nom d'*ellipse*. On verra, dans le Chapitre suivant, que sa forme est celle indiquée par la *fig.* 48.

Fig. 48.



2° Lorsque $h^2 - ab > 0$, les racines de l'équation

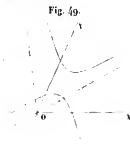
$$a + 2h \tang\theta + \tang^2\theta = 0$$

sont réelles; par conséquent, il y a deux valeurs de θ pour lesquelles le rayon vecteur mené par l'origine à la courbe devient infini. On peut donc, dans ce cas, mener par l'origine les deux droites réelles

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0,$$

rencontrant la courbe à l'infini. Une pareille courbe s'appelle *hyperbole*, et sa forme, ainsi qu'on le montrera plus loin, est celle que reproduit la *fig.* 49.

Fig. 49.



3° Enfin, dans le cas où $h^2 - ab = 0$, les racines de l'équation

$$a + 2h \operatorname{tang}\theta + \operatorname{tang}^2\theta = 0$$

sont égales, et les deux directions suivant lesquelles on peut mener des droites rencontrant la courbe à l'infini coïncident. La courbe, qui porte alors le nom de *parabole*, a la forme indiquée par la *fig.* 50. Dans ce cas, les trois premiers termes

Fig. 50.



de l'équation de la courbe forment un carré parfait, et cette propriété peut servir à définir la parabole.

138. Bien qu'il soit plus commode de n'étudier complétement la forme de la courbe représentée par une équation du second degré qu'après avoir simplifié cette équation, nous montrerons cependant ici comment, en partant du procédé exposé au n° 16, on peut vérifier les indications du numéro précédent.

En résolvant par rapport à y l'équation générale (76), on a

$$by = -(hx+f) \pm \sqrt{(h^2-ab)x^2 + 2(hf-bg)x + f^2 - bc}.$$

D'après la théorie des équations du second degré, une quantité de la forme $x^2 + px + q$ peut toujours se remplacer par le produit $(x-\alpha)(x-\beta)$ de deux facteurs réels ou imaginaires; la quantité située sous le radical pourra donc s'écrire

$$(h^2-ab)(x-\alpha)(x-\beta).$$

Si $h^2 - ab$ est négatif, cette quantité est négative, et par suite y est imaginaire, tant que les facteurs $x-\alpha$, $x-\beta$ sont à la fois positifs ou à la fois négatifs. On ne peut ainsi trouver des valeurs réelles pour y que lorsque x est compris entre α et β; la courbe se trouve donc tout entière dans l'espace limité par les droites $x=\alpha$, $x=\beta$. (*Voir* n° 16, Ex. III.)

Lorsque $h^2 - ab$ est positif, c'est l'inverse qui a lieu. On ne peut trouver des valeurs réelles pour y qu'en prenant pour x des valeurs telles, que les facteurs $x-\alpha$, $x-\beta$ soient à la fois positifs ou à la fois négatifs. La courbe se compose alors de deux branches s'étendant à l'infini, l'une dans la région positive, l'autre dans la région négative, et séparées par un intervalle compris entre les droites $x=\alpha$, $x=\beta$, dans lequel ne se trouve aucun point de la courbe.

Si $h^2 - ab$ est nul, la quantité située sous le radical est de l'une des formes $x-\alpha$ ou $\alpha - x$: dans le premier cas, la valeur de y est réelle quand x est plus grand que α; dans le deuxième, lorsque x est plus petit que α. La courbe se compose donc d'une seule branche s'étendant à l'infini à droite ou à gauche de la ligne $x=\alpha$, suivant la forme de la quantité qui se trouve sous le radical.

Lorsque les facteurs α et β deviennent imaginaires, la quantité sous le radical peut se mettre sous la forme

$$(h^2-ab)[(x-\gamma)^2+\delta^2];$$

elle est constamment positive quand $h^2 - ab$ est positif, et toutes les parallèles à l'axe des y rencontrent la courbe.

Lorsque $h^2 - ab$ est négatif, la quantité sous le radical est constamment négative, et l'équation ne représente aucune ligne réelle.

EXERCICES.

I. Construire, d'après le n° 16, les courbes suivantes et en déterminer l'espèce :

$$3x^2 + 4xy + y^2 - 3x - 2y + 21 = 0.$$

Réponse. Hyperbole.

$$5x^2 + 4xy + y^2 - 5x - 2y - 19 = 0.$$

Réponse. Ellipse.

$$4x^2 + 4xy + y^2 - 5x - 2y - 10 = 0.$$

Réponse. Parabole.

II. Le cercle est un cas particulier de l'ellipse. L'équation générale représente un cercle lorsque $a = b$, $h = a\cos\omega$ (81); mais alors

$$h^2 - ab = -a^2\sin^2\omega,$$

donc

$$h^2 - ab < 0.$$

III. Quelle est la courbe représentée par l'équation générale lorsque $h = 0$?

Réponse. Une ellipse lorsque a et b sont de même signe, et une hyperbole lorsqu'ils sont de signes contraires.

IV. Quelle est la courbe représentée par l'équation générale si $a = 0$, ou si $b = 0$?

Réponse. Une parabole lorsqu'on a en même temps $h = 0$, une hyperbole dans les autres cas. La courbe rencontre à l'infini l'axe des x lorsque $a = 0$, et l'axe des y lorsque $b = 0$.

V. Quelle est la courbe représentée par

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2x}{a} - \frac{2y}{b} + 1 = 0?$$

Réponse. Une parabole touchant les axes aux points $x = a$, $y = b$.

139. Lorsque, dans une équation du second degré,

$$Ax^2 + 2Bx + C = 0,$$

le coefficient B s'annule, les racines deviennent égales et de signes contraires. L'équation

$$(a\cos^2\theta + 2h\sin\theta\cos\theta + b\sin^2\theta)\rho^2 \\ + 2(g\cos\theta + f\sin\theta)\rho + c = 0$$

aura donc ses racines égales lorsque les rayons vecteurs seront menés suivant la direction définie par la relation

$$g\cos\theta + f\sin\theta = 0.$$

Les points de la courbe correspondant à ces valeurs de ρ égales et de signes contraires sont équidistants de l'origine et dans des régions opposées; donc la corde représentée par l'équation

$$gx + fy = 0$$

est divisée par l'origine en deux parties égales.

Par suite, *on peut, en général, mener par un point donné une corde qui soit divisée en ce point en deux parties égales.*

140. Il y a cependant un cas où il est possible de mener par un point plus d'une corde ayant ce point pour milieu. Si, dans l'équation générale, on a à la fois $g = 0$, $f = 0$, la quantité $g\cos\theta + f\sin\theta$ est nulle, quelle que soit la valeur de θ, et alors *toutes* les cordes menées par l'origine ont leur milieu en ce point qui s'appelle alors le *centre* de la courbe.

On peut, en général, par une transformation de coordonnées, rendre nuls les coefficients g et h. Et en égalant à zéro les valeurs de g et h (134) relatives à une nouvelle origine (x', y'), on trouve, pour les conditions auxquelles doivent alors satisfaire ses coordonnées,

$$ax' + hy' + g = 0, \quad hx' + by' + f = 0.$$

Ces deux équations sont suffisantes pour déterminer les valeurs de x' et de y', et, comme elles sont linéaires, elles ne peuvent être satisfaites que par une seule valeur de x et de y.

Donc *les sections coniques ont en général un centre, et n'en ont qu'un.*

Les coordonnées de ce centre, déduites de ces équations,

sont

$$x' = \frac{bg - hf}{h^2 - ab}, \quad y' = \frac{af - hg}{h^2 - ab}.$$

Dans l'ellipse et l'hyperbole, $h^2 - ab$ a une valeur finie (137), tandis que, dans la parabole, $h^2 - ab = 0$, ce qui rend infinies les coordonnées du centre. Aussi l'ellipse et l'hyperbole sont-elles souvent désignées sous le nom de *courbes à centre*, tandis que la parabole est dite *dépourvue de centre*. A la rigueur, on doit considérer toutes les courbes du second degré comme ayant un centre; dans le cas de la parabole, ce centre est à l'infini.

141. *Trouver le lieu des milieux des cordes menées dans une courbe du deuxième degré parallèlement à une droite donnée.*

Le milieu d'une corde faisant avec l'axe des x un angle θ, se trouve à l'origine (139) lorsqu'on a

$$g\cos\theta + f\sin\theta = 0.$$

Transportons l'origine en un point quelconque (x', y'). Une corde parallèle à la première sera divisée par la nouvelle origine deux parties égales, si l'on a la relation

$$\cos\theta(ax' + hy' + g) + \sin\theta(hx' + by' + f) = 0,$$

les quantités entre parenthèses exprimant (134) ce que deviennent les coefficients g et f lorsqu'on passe à la nouvelle origine. Les milieux des cordes faisant avec l'axe des x un angle θ se trouveront donc sur la droite

$$\cos\theta(ax + hy + g) + \sin\theta(hx + by + f) = 0,$$

qui est le lieu cherché.

La droite passant par les milieux d'un système de cordes parallèles s'appelle le *diamètre* de ces cordes; les cordes sont les *ordonnées* de ce diamètre.

La forme de l'équation du diamètre montre (40) que tous les diamètres passent par l'intersection des deux droites

$$ax + hy + g = 0, \quad hx + by + f = 0,$$

et comme ces équations sont celles qui déterminent le centre

de la courbe (140), *tous les diamètres passent par le centre de la courbe.*

En faisant alternativement $\theta = 0$ et $\theta = 90°$ dans l'équation du diamètre, on trouve

$$ax + hy + g = 0$$

pour l'équation du diamètre des cordes parallèles à l'axe des x, et

$$hx + by + f = 0$$

pour celle du diamètre des cordes parallèles à l'axe des y (*).

Dans la parabole, on a $h^2 = ab$, ou $\frac{a}{h} = \frac{h}{b}$, par suite les droites $ax + hy + g = 0$ et $hx + by + f = 0$ sont parallèles; donc *tous les diamètres d'une parabole sont parallèles.* Ceci est du reste évident, puisque tous les diamètres d'une section conique passent par le centre; dans la parabole, ce centre est à l'infini, et des parallèles peuvent être considérées comme se rencontrant à l'infini.

Ce qui précède permet, étant donné un arc de section conique, de déterminer son centre et son espèce. En effet, en menant deux cordes parallèles et joignant leurs milieux, on obtient

Fig. 51.

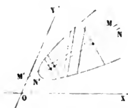
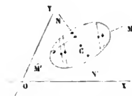


Fig. 52.



un diamètre MM′ (*fig.* 51, 52 et 53); on en détermine de même un second NN′. Si ces diamètres sont parallèles (*fig.* 51)

(*) L'équation du n° 138 étant de la forme $by = -(hx + f) \pm R$ peut se construire facilement en traçant d'abord la droite $hx + by + f$, et prenant sur chaque ordonnée MP de cette ligne des longueurs PQ, PQ′ égales à R, alternativement au-dessus et au-dessous. On voit ainsi que chaque ordonnée est divisée en deux parties égales par la droite $hx + by + f$.

la courbe est une parabole; s'ils se coupent, leur point d'intersection est le centre de la courbe. Lorsque ce centre est du côté concave de l'arc (*fig.* 52), la courbe est une ellipse;

Fig. 53.



quand il est dans la partie convexe (*fig.* 53), c'est une hyperbole.

Les exemples étudiés dans la théorie du cercle (Chap. VI) suffisent pour donner une première idée sur la nature des diamètres dans les courbes du second degré; mais il faut bien observer qu'en général les diamètres ne sont pas perpendiculaires à leurs ordonnées. Ainsi, dans la parabole, la direction du diamètre étant constante, tandis que celle des ordonnées est variable, l'angle compris entre un diamètre et ses ordonnées peut prendre *toutes les valeurs possibles.*

142. *La direction des diamètres d'une parabole est la même que celle de la droite passant par l'origine et rencontrant la courbe à l'infini.*

Les droites menées par l'origine et rencontrant à l'infini la courbe du deuxième degré ont pour équation (136)

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0,$$

qui devient, dans le cas de la parabole, en y remplaçant h par sa valeur $\sqrt{ab}$,

$$(x\sqrt{a} + y\sqrt{b})^2 = 0;$$

mais les diamètres (141) sont parallèles à la droite

$$ax + hy = 0,$$

dont l'équation se réduit à

$$x\sqrt{a} + y\sqrt{b} = 0,$$

lorsque $h = \sqrt{ab}$. Les diamètres sont donc parallèles à la droite qui coupe la courbe à l'infini, et, par suite, ne peuvent la rencontrer qu'en un seul point situé à une distance finie.

143. *Si deux diamètres d'une section conique sont tels, que l'un d'eux divise en deux parties égales les cordes parallèles à l'autre, réciproquement cet autre divisera en deux parties égales les cordes parallèles au premier.*

L'équation du diamètre des cordes faisant un angle θ avec l'axe des x est (141)

$$(ax + hy + g) + (hx + by + f)\operatorname{tang}\theta = 0.$$

L'angle θ' que ce diamètre fait avec ce même axe est donné par

$$\operatorname{tang}\theta' = -\frac{a + h\operatorname{tang}\theta}{h + b\operatorname{tang}\theta},$$

d'où

$$b\operatorname{tang}\theta\operatorname{tang}\theta' + h(\operatorname{tang}\theta + \operatorname{tang}\theta') + a = 0.$$

La symétrie de cette équation montre que les cordes faisant un angle θ' avec l'axe des x ont pour diamètre une droite faisant un angle θ avec ce même axe.

Ces diamètres, qui sont tels que l'un d'eux divise en deux parties égales les cordes parallèles à l'autre, s'appellent *diamètres conjugués* (*).

Si dans l'équation générale on a $h = 0$, les axes sont parallèles a un système de diamètres conjugués; car le diamètre des cordes parallèles à l'axe des x ayant alors pour équation

(*) Il est évident que, seules, les courbes à centre ont des diamètres conjugués, puisque dans la parabole tous les diamètres ont même direction.

$ax + g = 0$ est parallèle à l'axe des y. De même, le diamètre des cordes parallèles aux y, ayant pour équation $by + f = 0$, est parallèle à l'axe des x.

144. Lorsque dans l'équation générale $c = 0$, l'origine est un point de la courbe (81); et l'équation du second degré

$$(a\cos^2\theta + 2h\sin\theta\cos\theta + b\sin^2\theta)\rho^2 + 2(g\cos\theta + f\sin\theta)\rho = 0$$

a constamment une de ses racines nulle. La deuxième racine devient nulle aussi, autrement dit le rayon vecteur rencontre la courbe en deux points, qui coïncident lorsqu'on a en même temps

$$g\cos\theta + f\sin\theta = 0.$$

La tangente à l'origine a donc pour équation

$$gx + fy = 0 \ (^*).$$

L'équation de la tangente en un autre point de la courbe peut se déduire de celle de la tangente à l'origine par une transformation de coordonnées, en rapportant la courbe à ce point pris pour origine, écrivant l'équation de la tangente comme il vient d'être dit, et la rapportant ensuite aux anciens axes.

En appliquant cette méthode à l'équation générale, on obtient, pour la tangente au point (x', y'), l'équation

$$ax'x + h(x'y + y'x) + by'y + g(x + x') + f(y + y') + c = 0,$$

que nous avons déjà trouvée par une autre méthode (86).

EXERCICE.

Le point (1, 1) étant sur la courbe

$$3x^2 - 4xy + 2y^2 + 7x - 5y - 3 = 0,$$

trouver, par une transformation de coordonnées, la tangente en ce point.

(*) On prouverait de la même manière que, dans une courbe de degré quelconque, lorsque le terme constant est nul, l'origine est sur la courbe, et que les termes du premier degré représentent la tangente à l'origine.

L'équation de cette tangente, par rapport aux nouveaux axes, est

$$9x - 5y = 0,$$

et par rapport aux axes primitifs,

$$9(x-1) = 5(y-1).$$

145. Lorsque, par un point (x', y') non situé sur la courbe, on mène des tangentes à une courbe du deuxième degré, les points de contact sont les intersections de la courbe avec une droite, ayant une équation de forme identique à celle de la tangente et portant le nom de *polaire* du point (x', y') (89). Et comme une droite rencontre toujours une conique en deux points, *on peut toujours mener par un point (x', y') deux tangentes réelles, coïncidentes ou imaginaires à une courbe du deuxième degré* (*).

La polaire de l'origine, ainsi qu'on l'a vu au n° 89, ayant pour équation

$$gx + fy + c = 0,$$

est parallèle à la corde $gx + fy$, qui est divisée (139) par l'origine en deux parties égales, et qui est l'ordonnée du diamètre passant par l'origine. Donc : *la polaire d'un point est parallèle aux ordonnées du diamètre passant par ce point.* Ce théorème renferme, comme cas particulier, le suivant : *la tangente à l'extrémité d'un diamètre est parallèle aux ordonnées de ce diamètre,* théorème qui, dans le cas des courbes à centre, où les ordonnées d'un diamètre sont parallèles au diamètre conjugué, devient : *la polaire d'un point pris sur un diamètre d'une courbe à centre est parallèle au diamètre conjugué.*

146. Les principales propriétés des pôles des polaires ont déjà été démontrées dans les Chapitres précédents. Ainsi (98) lorsqu'un point A se trouve sur la polaire du point B, récipro-

(*) Une courbe est dite de la $n^{ième}$ *classe* lorsqu'on peut lui mener par un point n tangentes. Une section conique est donc à la fois du deuxième degré et de la deuxième classe; mais, en général, dans les courbes de degré plus élevé, les indices du degré et de la classe ne sont pas les mêmes.

quement le point B se trouve sur la polaire du point A, ce qu'on peut énoncer autrement :

Lorsqu'un point A *glisse le long d'une droite fixe* (la polaire du point B), *sa polaire passe par un point fixe* (B);

Ou réciproquement :

Si une droite (la polaire du point A) *passe par un point fixe* (B), *son pôle* A *décrit une droite fixe* (la polaire de B).

On peut encore énoncer ce théorème :

L'intersection de deux droites est le pôle de la ligne menée par les pôles de ces droites;

Et réciproquement :

La ligne joignant deux points est la polaire de l'intersection des polaires de ces points.

Car si l'on prend deux points sur la polaire de A, les polaires de ces points passent par le point A.

On a vu (100) que *si, après avoir mené par un point deux droites coupant une conique, on joint deux à deux les points d'intersection, les droites de jonction se coupent sur la polaire du point.*

Dans le cas particulier où les deux droites coïncident, ce théorème peut s'énoncer ainsi :

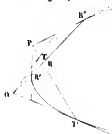
Si l'on mène par le point O (*fig.* 54) *une droite rencontrant la courbe aux points* R', R", *les tangentes en* R' *et* R" *se coupent sur la polaire* PR *du point* O.

Il peut se démontrer en observant que la polaire R'R" du point P passant par le point O, le point P se trouve sur la polaire du point O.

Nous avons vu aussi (103, Ex. III) que si, sur un rayon vecteur OR mené par l'origine, on prenait une moyenne harmonique OR entre OR' et OR", le lieu du point R était la polaire de l'origine : donc, *la droite menée par un point est divisée harmoniquement par le point, la courbe et la polaire de ce point.* Ce théorème a été aussi démontré au n° 91.

Si donc on mène par le point O une droite quelconque OR, et si l'on joint le pôle P de cette droite au point O, les lignes OP,

Fig. 54.

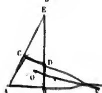


OR forment un faisceau harmonique avec les tangentes OT, OT' issues du point O; car, puisque OB est la polaire de P, PTRT' est divisé harmoniquement, et alors OP, OT, OR, OT' forment un faisceau harmonique.

EXERCICES.

I. Lorsqu'un quadrilatère ABCD (*fig*.55) est inscrit dans une conique, un quelconque des points E, F, O est le pôle de la droite joignant les deux autres.

Fig. 55.



Puisque EC et ED sont deux droites passant par le point E, et que CD et AB joignent les points d'intersection de ces droites avec la conique, CD et AB se coupent en O sur la polaire du point E; il en est de même de AB et CB : donc la droite OF est la polaire du point E. On démontrerait de même que EO et EF sont respectivement les polaires des points F et O.

II. Par un point E pris en dehors d'une conique, lui mener une tangente au moyen de la règle seulement.

Mener par le point E deux droites quelconques EA, EB (*fig*. 55), com-

pléter le quadrilatère comme sur la figure; la droite OF coupera la conique en deux points, qui seront les points de contact cherchés.

III. Dans un quadrilatère ABCD (*fig.* 55) circonscrit à une section conique, une diagonale est la polaire de l'intersection des deux autres.

Ce théorème peut se démontrer (comme celui de l'Ex. I) au moyen des propriétés harmoniques du quadrilatère. On sait (60, Ex. I) que les droites EA, EO, EB, EF forment un faisceau harmonique; mais EA, EB étant, par hypothèse, tangentes à la conique, et EF passant par leur point d'intersection, EO (146) passe par le pôle de EF; on verrait de même que FO passe par le pôle de EF : ce pôle est donc le point O.

147. Les tangentes menées à une conique par un point (x', y') ont pour équation (92)

$$\begin{aligned}&(ax'^2 + 2hx'y' + by'^2 + 2gx' + 2fy' + c)\\ &\quad\times(ax^2 + 2hxy + by^2 - 2gx + 2fy + c)\\ &\quad= [ax'x + h(x'y + y'x) + by'y\\ &\qquad + g(x' + x) + f(y' + y) + c]^2.\end{aligned}$$

On peut, en y faisant $x' = y' = 0$, en déduire l'équation des tangentes menées par l'origine; mais on peut aussi, pour trouver cette dernière équation, suivre le procédé indiqué au n° 83, Ex. IV. Lorsqu'un rayon vecteur mené par l'origine est tangent à la conique, les deux valeurs de ρ données par l'équation

$$\begin{aligned}&(a\cos^2\theta + 2h\cos\theta\sin\theta + b\sin^2\theta)\rho^2\\ &\qquad + 2(g\cos\theta + f\sin\theta)\rho + c = 0\end{aligned}$$

doivent être égales, ce qui implique la condition

$$(a\cos^2\theta + 2h\cos\theta\sin\theta + b\sin^2\theta)c = (g\cos\theta + f\sin\theta)^2.$$

En la multipliant par ρ^2, on en déduit, pour l'équation des tangentes menées par l'origine,

$$(ac - g^2)x^2 + 2(ch - gf)xy + (bc - f^2)y^2 = 0.$$

Les tangentes coïncideront lorsque les racines de cette équation seront égales, c'est-à-dire lorsqu'on aura

$$(ac - g^2)(bc - f^2) = (ch - gf)^2,$$

ou

$$c(abc + 2fgh - af^2 - ch^2) = 0.$$

Cette dernière condition est satisfaite lorsque $c = 0$, c'est-à-dire lorsque l'origine est un point de la courbe : donc, *un point de la courbe peut être considéré comme l'intersection de deux tangentes qui coïncident*, de même que la tangente peut être regardée comme la droite joignant deux points qui coïncident.

Cette condition sera aussi satisfaite si l'on a la relation

$$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0,$$

qui exprime (76) que l'équation du second degré représente deux droites. Pour expliquer comment il se fait que l'on retombe ici sur cette relation, il suffit de remarquer que, par tangente, on entend en général une droite rencontrant la courbe en deux points qui coïncident. Lorsque la courbe se réduit à deux droites, la seule ligne qu'on puisse mener de manière à la rencontrer en deux points qui coïncident est celle qui passe par leur point d'intersection, et puisqu'on peut toujours mener *deux* tangentes à une courbe du deuxième degré, les deux tangentes doivent dans ce cas coïncider avec la droite passant par (x', y') et par ce point d'intersection.

148. *Si par un point* O *on mène deux cordes rencontrant une conique aux points* R′, R″, S′, S″, *la rapport des rectangles* OR′.OR″ *et* OS′.OS″ *sera constant, quelle que soit la position du point* O, *pourvu que la direction des cordes soit constante.*

De l'équation donnée pour déterminer les valeurs de ρ (136), on déduit facilement

$$\mathrm{OR'}.\mathrm{OR''} = \frac{c}{a\cos^2\theta + 2h\cos\theta\sin\theta + b\sin^2\theta},$$

θ étant l'angle que forme la corde OR′ avec l'axe des x; de même, θ' désignant l'angle compris entre la corde OS′ et cet axe, on aura

$$\mathrm{OS'}.\mathrm{OS''} = \frac{c}{a\cos^2\theta' + 2h\cos\theta'\sin\theta' + b\sin^2\theta'};$$

d'où

$$\frac{\mathrm{OR'}.\mathrm{OR''}}{\mathrm{OS'}.\mathrm{OS''}} = \frac{a\cos^2\theta' + 2h\cos\theta'\sin\theta' + b\sin^2\theta'}{a\cos^2\theta + 2h\cos\theta\sin\theta + b\sin^2\theta}.$$

Ce rapport est constant, puisque a, b et h ne changent pas lorsqu'on déplace l'origine (134), et que la direction des cordes, définie par les angles θ et θ' qu'elles forment avec l'axe des x, est constante.

Si, par deux points fixes O et O', *on mène deux cordes parallèles* OR, O'ρ *coupant respectivement la conique aux points* R', R'', ρ', ρ'', *le rapport des rectangles* OR'.OR'' *et* O'ρ'.O'ρ'' *est constant et indépendant de la direction des cordes.*

Ces rectangles ont pour expressions :

$$\frac{c}{a\cos^2\theta + 2h\cos\theta\sin\theta + b\sin^2\theta},$$

$$\frac{c'}{a\cos^2\theta + 2h\cos\theta\sin\theta + b\sin^2\theta},$$

θ étant l'angle fait par les cordes avec l'axe des x, et c' la valeur que prend le terme absolu lorsqu'on rapporte la courbe au point O' comme origine : le rapport de ces rectangles $\frac{c}{c'}$ est indépendant de θ.

149. Le théorème du numéro précédent comporte quelques cas particuliers qu'il est utile d'énoncer.

1° Si le point O' est le centre de la courbe, on a $O'\rho' = O'\rho''$, et le rectangle $O'\rho'.O'\rho''$ devient le carré du demi-diamètre parallèle à OR'. Donc *les rectangles construits sur les segments de deux cordes qui se coupent sont entre eux dans le rapport des carrés des diamètres parallèles à ces cordes.*

2° Lorsque OR est tangent à la courbe, on a $OR' = OR''$; le rectangle OR'.OR'' devient le carré de la tangente, et, puisque nous pouvons mener par le point O deux tangentes, nous pourrons extraire la racine carrée du rapport trouvé plus haut, et en conclure que *les tangentes menées par un point sont dans le rapport des diamètres qui leur sont parallèles.*

3° Supposons enfin que la ligne OO' soit un diamètre et que les cordes OR, O'ρ soient parallèles à ses ordonnées : alors $OR' = OR''$, $O'\rho' = O'\rho''$; et, si A et B sont les points où le

diamètre OO′ rencontre la courbe, nous aurons

$$\frac{\mathrm{OR}'^2}{\mathrm{AO.OB}} = \frac{\mathrm{O}'\rho'^2}{\mathrm{AO}'.\mathrm{O}'\mathrm{B}}.$$

Donc, *les carrés des ordonnées d'un diamètre sont proportionnels aux rectangles des segments qu'elles déterminent sur ce diamètre.*

150. Il y a un cas dans lequel le théorème du n° 148 n'est plus applicable, c'est lorsque la ligne OS est parallèle à l'une des droites qui rencontrent la courbe à l'infini : alors le segment OS″ devient infini, et la corde OS ne rencontre plus la conique qu'en un seul point situé à une distance finie. Cherchons à quelle condition, dans ce cas, le rapport $\frac{\mathrm{OS}'}{\mathrm{OR}'.\mathrm{OR}''}$ peut être constant.

Prenons, pour simplifier, OS et OR pour axes des x et des y. Puisque l'axe des x est parallèle à une des lignes rencontrant la courbe à l'infini, le coefficient a doit être nul (138, Ex. IV), et l'équation de la courbe sera de la forme

$$2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0.$$

En y faisant successivement $y = 0$, $x = 0$, on trouve pour le segment déterminé sur l'axe des x, $\mathrm{OS}' = -\frac{c}{2g}$, et pour le rectangle des segments faits sur l'axe des y, $\mathrm{OR}'.\mathrm{OR}'' = \frac{c}{b}$. Nous aurons donc

$$\frac{\mathrm{OS}'}{\mathrm{OR}'.\mathrm{OR}''} = -\frac{b}{2g}.$$

Si l'on déplace les axes parallèlement à eux-mêmes (134), b ne change pas et g prend la valeur $hy' + g$ (y' étant l'abscisse de la nouvelle origine) : le rapport précédent devient alors

$$-\frac{b}{2(hy'+g)}.$$

Lorsque la courbe est une parabole on a $h = 0$, et ce rapport est constant ; donc, *si, dans une parabole, une droite de direc-*

14.

tion donnée rencontre un diamètre, le rectangle de ses segments est dans un rapport constant avec le segment qu'elle détermine sur le diamètre.

Lorsque la courbe est une hyperbole, le rapport ne peut être constant que lorsque y' est constant : donc, *dans une hyperbole, les segments déterminés par deux cordes parallèles sur une droite rencontrant la courbe à l'infini sont proportionnels aux rectangles construits sur les segments des cordes.*

*151. *Trouver la condition pour que la droite* $\lambda x + \mu y + \nu = 0$ *soit tangente à la conique représentée par l'équation générale.*

En substituant, dans l'équation générale, la valeur de y tirée de $\lambda x + \mu y + \nu = 0$, pour déterminer les abscisses des points d'intersection de la droite avec la courbe, on a

$$(a\mu^2 - 2h\lambda\mu + b\lambda^2)x^2 + 2(g\mu^2 - h\mu\nu - f\mu\lambda + b\lambda\nu)x + (c\mu^2 - 2f\mu\nu + b\nu^2) = 0,$$

et la droite sera tangente lorsque les racines de cette équation seront égales, c'est-à-dire lorsqu'on aura

$$(a\mu^2 - 2h\lambda\mu - b\lambda^2)(c\mu^2 - 2f\mu\nu + b\nu^2) = (g\mu^2 - h\mu\nu - f\mu\lambda + b\lambda\nu)^2.$$

Développant et divisant par μ^2, cette condition devient

$$(bc - f^2)\lambda^2 + (ca - g^2)\mu^2 + (ab - h^2)\nu^2 + 2(gh - af)\mu\nu + 2(hf - bg)\nu\lambda + 2(fg - ch)\lambda\mu = 0.$$

On trouvera plus loin une autre méthode pour obtenir cette relation, qu'on peut appeler l'*équation tangentielle de la courbe*, et qu'on écrit souvent de la manière suivante :

$$A\lambda^2 + B\mu^2 + C\nu^2 + 2F\mu\nu + 2G\nu\lambda + 2H\lambda\mu = 0,$$

en posant $A = bc - f^2$, $B = ca - g^2, \ldots$. Les coefficients A, B, C, 2F, 2G, 2H ne sont autre chose que les dérivées de la fonction

$$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$$

prises en y considérant successivement a, b, c, f, g, h comme

variables. Cette fonction, qui devient nulle lorsque la conique se transforme en deux droites, s'appelle le *discriminant* de l'équation générale du deuxième degré, et se désigne ordinairement par la caractéristique Δ.

EXERCICES.

I. Former l'équation de la conique qui détermine des segments λ, λ', μ, μ' sur les axes.

Si l'on fait successivement $y = 0$, $x = 0$ dans cette équation, elle devra se réduire à

$$x^2 - (\lambda + \lambda')x + \lambda\lambda' = 0, \quad y^2 - (\mu + \mu')y + \mu\mu' = 0;$$

elle sera donc

$$\mu\mu' x^2 + 2hxy + \lambda\lambda' y^2 - \mu\mu'(\lambda + \lambda')x - \lambda\lambda'(\mu + \mu')y + \lambda\lambda'\mu\mu' = 0.$$

Le coefficient h reste indéterminé si l'on ne se donne une nouvelle condition. On peut mener deux paraboles par les quatre points donnés puisqu'alors

$$h = \pm\sqrt{\lambda\lambda'\mu\mu'}.$$

II. La polaire d'un point fixe prise par rapport aux coniques passant par quatre points donnés passe par un point fixe.

Si l'on prend pour axes deux côtés opposés du quadrilatère formé par les quatre points, l'équation des coniques sera celle de l'Exercice I, et l'équation de la polaire du point (x', y') renfermera l'indéterminée h au premier degré (145) : donc la polaire passe par un point fixe.

III. Trouver le lieu des centres des coniques passant par quatre points fixes.

Le centre de la conique de l'Exercice I est donné par les équations

$$2\mu\mu' x + 2hy - \mu\mu'(\lambda + \lambda') = 0, \quad 2\lambda\lambda' y + 2hx - \lambda\lambda'(\mu + \mu') = 0,$$

et en éliminant h, on trouve, pour l'équation du lieu,

$$2\mu\mu' x^2 - 2\lambda\lambda' y^2 - \mu\mu'(\lambda + \lambda')x + \lambda\lambda'(\mu + \mu')y = 0.$$

C'est une conique sur laquelle se trouvent les intersections des trois couples de droites passant par les quatre points donnés et les milieux de ces droites.

Le lieu est une hyperbole lorsque λ, λ', ainsi que μ et μ', sont à la fois de même signe, ou à la fois de signes contraires ; dans le cas contraire, c'est une ellipse. Ainsi le lieu est une ellipse lorsque les deux points situés sur un axe se trouvant du même côté de l'origine, les deux autres points

qui appartiennent au deuxième axe sont l'un d'un côté, l'autre de l'autre côté de l'origine, autrement dit lorsque le quadrilatère formé par les quatre points a un angle rentrant. Ceci est du reste évident géométriquement : à un pareil quadrilatère, on ne peut pas circonscrire une conique de la forme d'une ellipse ou d'une parabole, mais bien une hyperbole ; et comme le centre d'une hyperbole n'est jamais à l'infini, le lieu de ce centre doit être une ellipse. Dans l'autre cas, il y a deux positions du centre à l'infini : ce sont celles qui correspondent aux deux paraboles que l'on peut faire passer par les quatre points donnés.



CHAPITRE XI.

DE L'ELLIPSE ET DE L'HYPERBOLE.

§ I. — Réduction de l'équation générale du deuxième degré.

152. Nous pouvons simplifier beaucoup les équations qui nous serviront dans la recherche des propriétés de l'ellipse et de l'hyperbole, en prenant le centre pour origine des coordonnées. L'équation générale du deuxième degré (133) se réduit alors à

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + c' = 0;$$

car (140), lorsque le centre est pris pour origine, les coefficients de x et de y deviennent nuls. La valeur de c' en fonction des coefficients de l'équation primitive et des coordonnées x' et y' de la nouvelle origine a pour expression (134)

$$c' = ax'^2 + 2hx'y' + by'^2 + 2gx' + 2fy' + c;$$

et peut s'écrire

$$c' = (ax' + hy' + g)x' + (hx' + by' + f)y' + gx' + fy' + c.$$

Lorsque x' et y' sont les coordonnées du centre, les deux premiers termes s'annulent, et la valeur de c' se réduit à (140)

$$c' = g\frac{hf-bg}{ab-h^2} + f\frac{hg-af}{ab-h^2} + c = \frac{abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2}{ab-h^2} \ (*).$$

(*) Le résultat de la substitution des coordonnées du centre (x', y') dans l'équation de la polaire d'un point (x'', y'')

$$(ax' + hy' + g)x'' + (hx' + by' + f)y'' + gx' + fy' + c$$

est le même que celui de la substitution de x', y' dans l'équation de la courbe, puisque les deux premières séries de termes s'annulent dans les deux cas.

153. Si le numérateur de cette dernière fraction est nul, l'équation transformée prend la forme

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0,$$

et représente (73) deux droites réelles ou imaginaires, suivant que $ab - h^2$ est négatif ou positif. On retrouve ainsi la condition du n° 76

$$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0,$$

pour que l'équation du deuxième degré représente deux droites; car elle doit être remplie pour qu'en transportant l'origine au point d'intersection des droites, le terme absolu puisse s'évanouir.

EXERCICES.

I. Rapporter la conique

$3x^2 + 4xy + y^2 - 5x - 6y - 3 = 0$ à son centre $\left(\frac{7}{2}, -4\right)$.

Réponse. $12x^2 + 16xy + 4y^2 + 1 = 0$.

II. Rapporter la courbe

$x^2 + 2xy - y^2 + 8x + 4y - 8 = 0$ à son centre $(-3, -1)$.

Réponse. $x^2 + 2xy - y^2 = 22$.

154. Nous avons vu (136) que, lorsque θ satisfaisait à la relation

$$a\cos^2\theta + 2h\cos\theta\sin\theta + b\sin^2\theta = 0,$$

le rayon vecteur correspondant rencontrait la courbe à l'infini, et en un point situé à la distance finie de l'origine

$$\rho = -\frac{c}{g\cos\theta + f\sin\theta}.$$

Lorsque l'origine est *le centre* de la courbe, $g = 0, f = 0$, et cette distance devient aussi infinie. Il est donc possible de mener par le centre deux droites rencontrant la courbe chacune *en deux points coïncidents* situés à l'infini. Ces droites, qui, par suite, peuvent être considérées comme des tangentes ayant leurs points de contact à l'infini, s'appellent *asymptotes* de la courbe : elles sont imaginaires dans l'ellipse et réelles

dans l'hyperbole. On verra plus loin que ces asymptotes se rapprochent d'autant plus de la courbe, qu'on s'éloigne davantage de l'origine, toutefois elles ne rencontrent la courbe qu'à l'infini.

Puisque les points de contact des tangentes réelles ou imaginaires menées par le centre sont situés à l'infini, la droite qui les joint est aussi tout entière à l'infini; donc, d'après la définition des pôles et polaires (89), *le centre peut être considéré comme le pôle d'une droite située à l'infini*. On arriverait à la même conclusion en remarquant que l'équation de la polaire de l'origine $gx + fy + c = 0$ se réduit à $c = 0$ lorsque le centre est pris pour origine, et représente alors (67) une droite située à l'infini.

155. En prenant le centre pour origine, les coefficients g et f de l'équation générale s'évanouissent. Si de plus les axes forment un système de diamètres conjugués, le coefficient h s'annule également (143), et l'équation, se simplifiant encore, devient

$$ax^2 + by^2 + c = 0.$$

On voit facilement que toute corde parallèle à un axe est divisée en deux parties égales par l'autre; car si l'on donne, par exemple, à x une valeur quelconque, on en déduit immédiatement pour y deux valeurs égales et de signes contraires. L'angle compris entre deux diamètres conjugués n'est pas droit en général, mais il existe toujours un système de diamètres conjugués faisant entre eux un angle droit : ces diamètres sont les *axes* de la courbe, et les points où ils la rencontrent en sont les *sommets*.

Pour le démontrer, rappelons-nous (143) que les angles θ et θ', que font avec l'axe des x deux diamètres conjugués, sont liés par la relation

$$b \tan\theta \tan\theta' + h(\tan\theta + \tan\theta') + a = 0$$

Si les diamètres forment un angle droit, $\tan\theta' = -\dfrac{1}{\tan\theta}$ (25);

par suite,

$$h \tang^2\theta + (a-b)\tang\theta - h = 0.$$

Multipliant par ρ^2, remplaçant $\rho\cos\theta$, $\rho\sin\theta$ par x et y, il vient

$$hx^2 - (a-b)xy - hy^2 = 0,$$

équation de deux droites réelles perpendiculaires l'une sur l'autre (74). Les courbes à centre ont donc deux diamètres conjugués à angle droit, et n'en ont que deux.

Ces axes, ainsi que le montre (75) leur équation, sont les bissectrices intérieure et extérieure de l'angle compris entre les droites réelles ou imaginaires

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0.$$

Les axes sont donc les bissectrices des angles formés par les asymptotes, et ils sont réels (75, note), que les asymptotes soient réelles ou imaginaires, c'est-à-dire que la courbe soit une hyperbole ou une ellipse.

156. Nous aurions pu arriver au même résultat, par une transformation de coordonnées, en montrant qu'il est toujours possible de trouver un système d'axes rectangulaires tel, que l'équation de la courbe par rapport à ce système d'axes n'ait pas de terme en xy. Supposons les axes primitifs rectangulaires, et faisons-les tourner d'un angle θ autour de l'origine : l'équation transformée s'obtiendra en remplaçant respectivement x et y par $\cos\theta - y\sin\theta$ et $x\sin\theta + y\cos\theta$ dans l'équation primitive, qui devient ainsi

$$a(x\cos\theta - y\sin\theta)^2 + 2h(x\cos\theta - y\sin\theta)(x\sin\theta + y\cos\theta) + b(x\sin\theta + y\cos\theta)^2 + c = 0,$$

et en développant, nous aurons, pour les nouveaux coefficients, a', b', h',

$$a' = a\cos^2\theta + 2h\cos\theta\sin\theta + b\sin^2\theta,$$
$$h' = b\sin\theta\cos\theta + h(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - a\sin\theta\cos\theta,$$
$$b' = a\sin^2\theta - 2h\cos\theta\sin\theta + b\cos^2\theta.$$

En faisant $h' = 0$, pour déterminer l'angle θ que les axes de la courbe forment avec les axes de coordonnées, nous retomberons sur l'équation du n° 155, qui donne

$$\tang 2\theta = \frac{2h}{a-b}.$$

157. Le théorème suivant permet de simplifier les calculs à exécuter pour déterminer les nouveaux coefficients relatifs à la transformation d'une équation de la forme

$$ax^2 + by^2 + c = 0.$$

Si l'on transforme une équation du deuxième degré en passant d'un système d'axes rectangulaires à un autre système rectangulaire, les quantités $a + b$ et $h^2 - ab$ ne changent pas.

En effet, en ajoutant les valeurs de a' et b' calculées plus haut (156), on trouve immédiatement

$$a' + b' = a + b.$$

On a aussi

$$2a' = a + b + 2h \sin 2\theta + (a - b)\cos 2\theta,$$
$$2b' = a + b - 2h \sin 2\theta - (a - b)\cos 2\theta;$$

d'où

$$4a'b' = (a + b)^2 - [2h \sin 2\theta + (a - b)\cos 2\theta]^2.$$

Mais

$$4h'^2 = [2h \cos 2\theta - (a - b)\sin 2\theta]^2;$$

donc

$$4(a'b' - h'^2) = (a + b)^2 - 4h^2 - (a - b)^2 = 4(ab - h^2).$$

Pour écrire l'équation rapportée aux axes, on a ainsi les relations

$$h' = 0, \quad a' + b' = a + b, \quad a'b' = ab - h^2;$$

elles donnent la somme et le produit des coefficients inconnus a' et b', qui se trouvent ainsi déterminés.

EXERCICES.

I. Trouver les axes de l'ellipse $14x^2 - 4xy + 11y^2 = 60$, et rapporter la courbe à ces axes.

L'équation des axes est (155)

$$4x^2 + 6xy - 4y^2 = 0,$$

ou

$$(2x - y)(x + 2y) = 0.$$

On a d'ailleurs

$$a' + b' = 25, \quad a'b' = 150,$$

d'où

$$a' = 10, \quad b' = 15;$$

l'équation transformée est donc

$$2x^2 + 3y^2 = 12.$$

II. Rapporter l'hyperbole $11x^2 + 84xy - 24y^2 = 156$ à ses axes.

On a

$$a' + b' = -13, \quad a'b' = -2028, \quad a' = 39, \quad b' = -52;$$

par suite l'équation transformée est

$$3x^2 - 4y^2 = 12.$$

III. Rapporter la courbe $ax^2 + 2hxy - by^2 + c = 0$ à ses axes.

Réponse.

$$(a + b - R)x^2 + (a + b + R)y^2 = 2c, \quad R^2 = 4h^2 + (a - b)^2.$$

* **158.** Lorsqu'on passe d'un système d'axes rectangulaires à un autre système rectangulaire, les quantités $a + b$, $ab - h^2$ ne changent pas. Cherchons ce qu'elles deviennent lorsque le second système d'axes est oblique. Conservons le même axe des x, et désignons par ω l'angle que le nouvel axe des y fait avec lui. Pour transformer l'équation, il faut y remplacer respectivement (9) x et y par $x + y\cos\omega$, $y\sin\omega$; on trouve ainsi

$$a' = a, \qquad h' = a\cos\omega + h\sin\omega,$$

$$b' = a\cos^2\omega + 2h\cos\omega\sin\omega + b\sin^2\omega,$$

d'où

$$\frac{a'+b'-2h'\cos\omega}{\sin^2\omega}=a+b,\quad \frac{a'b'-h'^2}{\sin^2\omega}=ab-h^2.$$

Donc, *si l'on transforme une équation du second degré, pour passer d'un système d'axes à un autre, les quantités*

$$\frac{a+b-2h\cos\omega}{\sin^2\omega},\quad \frac{ab-h^2}{\sin^2\omega}$$

ne changent pas.

Ce dernier théorème permet de rapporter une équation aux axes de la courbe qu'elle représente, puisqu'on peut exprimer la somme et le produit des nouveaux coefficients a et b en fonction des anciens.

EXERCICES.

I. Rapporter à ses axes la courbe $10x^2+6xy+5y^2=10$, pour laquelle $\cos\omega=\frac{3}{5}$.

$$a+b=\frac{285}{16},\quad ab=\frac{1025}{16},\quad a=5,\quad b=\frac{205}{16}.$$

RÉPONSE. $16x^2+41y^2=32$.

II. Rapporter à ses axes la conique $x^2-3xy+y^2+1=0$, en supposant $\omega=60°$.

RÉPONSE. $x^2-15y^2=3$.

III. Rapporter à ses axes la conique $ax^2+2hxy+by^2=c$.

RÉPONSE.

$$(a+b-2h\cos\omega-R)x^2+(a+b-2h\cos\omega+R)y^2=2c\sin^2\omega$$
$$R^2=[2h-(a+b)\cos\omega]^2+(a-b)^2\sin^2\omega.$$

* **159.** Les théorèmes des numéros précédents ont été démontrés de la manière suivante par M. Boole (*).

Supposons que nous ayons à passer d'un système d'axes faisant entre eux un angle ω, à un autre système faisant un angle Ω; en effectuant les substitutions indiquées au n° **9**, la

(*) *Cambridge Math. Journ.*, III, p. 106; et nouvelle série, VI, p. 87.

quantité $ax^2 + 2hxy + by^2$ deviendra $a'X^2 + 2h'XY + b'Y^2$ (x et y étant les anciennes coordonnées, X et Y les nouvelles). De même $x^2 + 2xy\cos\omega + y^2$ deviendra $X^2 + 2XY\cos\Omega + Y^2$, puisque l'une et l'autre de ces deux dernières expressions représentent le carré de la distance d'un même point à l'origine. Nous aurons donc, λ étant une indéterminée,

$$\begin{aligned} &ax^2 + 2hxy + by^2 + \lambda(x^2 + 2xy\cos\omega + y^2) \\ &= a'X^2 + 2h'XY + b'Y^2 + \lambda(X^2 + 2XY\cos\omega + Y^2), \end{aligned}$$

et si nous déterminons λ par la condition que le premier membre de cette équation soit un carré parfait, le second membre devra être aussi un carré parfait. Cette condition peut s'écrire

$$(a+\lambda)(b+\lambda) = (h + \lambda\cos\omega)^2,$$

et λ sera une des racines de l'équation du second degré

$$\lambda^2\sin^2\omega + (a + b - 2h\cos\omega)\lambda + ab - h^2 = 0.$$

Nous trouverons une équation de même forme pour déterminer la valeur de λ rendant le second membre un carré parfait, et, puisque les deux membres deviennent des carrés parfaits pour la même valeur de λ, les deux équations du second degré devront être identiques. Égalant donc les coefficients des termes correspondants, nous trouverons, comme plus haut,

$$\frac{a + b - 2h\cos\omega}{\sin^2\omega} = \frac{a' + b' - 2h'\cos\Omega}{\sin^2\Omega}, \quad \frac{ab - h^2}{\sin^2\omega} = \frac{a'b' - h'^2}{\sin^2\Omega}.$$

EXERCICES.

I. La somme des carrés des réciproques des demi-diamètres qui se coupent à angle droit est constante.

Soient α et β leurs longueurs : en faisant alternativement $x = 0, y = 0$ dans l'équation de la courbe, on aura $a\alpha^2 = c$, $b\beta^2 = c$; on voit ainsi que le théorème qui vient d'être énoncé n'est que l'interprétation géométrique de la constance de la somme $a + b$.

II. L'aire du triangle formé en joignant les extrémités de deux demi-diamètres conjugués est constante.

L'équation de la courbe rapportée à deux diamètres conjugués est

$$\frac{x}{\alpha'^2} + \frac{y}{\beta'^2} = 0,$$

α' et β' étant les longueurs de ces demi-diamètres, et puisque $\frac{ab - h^2}{\sin^2\omega}$ est constant, $\alpha'\beta'\sin\omega$ est constant.

III. La somme des carrés de deux demi-diamètres est constante.

Puisque $\frac{a + b - 2h\cos\omega}{\sin^2\omega}$ est constant, il en est de même de

$$\frac{1}{\sin^2\omega}\left(\frac{1}{\alpha'^2} + \frac{1}{\beta'^2}\right);$$

d'ailleurs, $\alpha'\beta'\sin\omega$ est constant : donc $\alpha'^2 + \beta'^2$ est constant.

160. Nous avons vu que l'équation d'une conique rapportée à ses axes était de la forme

$$Ax^2 + By^2 = C,$$

B étant positif dans le cas de l'ellipse et négatif dans le cas de l'hyperbole (138, Ex. III). (Nous avons repris ici les lettres majuscules, parce que nous allons avoir à employer les lettres a et b avec une signification nouvelle.)

L'équation de l'ellipse peut encore s'écrire sous une forme plus commode. Supposons que les segments déterminés par l'ellipse sur ses axes soient $x = a$, $y = b$; en faisant $y = 0$ dans l'équation de l'ellipse, il vient $Aa^2 = C$, d'où $A = \frac{C}{a^2}$; nous trouverions de même, en y faisant $y = 0$, $B = \frac{C}{b^2}$. L'équation de l'ellipse peut donc s'écrire ainsi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Puisque nous pouvons prendre un quelconque des axes de la courbe pour axe des x, nous supposerons que nous avons choisi cet axe de telle façon que a soit plus grand que b.

L'équation de l'hyperbole, qui, ainsi que nous le savons,

ne diffère de celle de l'ellipse que par le signe du coefficient de y^2, pourra se mettre sous la forme correspondante

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Le segment déterminé par l'hyperbole sur l'axe des x est évidemment $x = \pm a$; celui qui est déterminé sur l'axe des y, étant donné par l'équation $y^2 = -b^2$, est imaginaire; l'axe des y ne rencontre donc pas la courbe en des points réels.

Puisque nous avons pris pour axe des x l'axe rencontrant la courbe en des points réels, nous n'avons pas à nous occuper de la grandeur relative de a par rapport à b.

161. *Trouver l'équation polaire de l'ellipse, le centre étant pris pour pôle.*

Nous n'avons pour cela qu'à remplacer x par $\rho\cos\theta$, et y par $\rho\sin\theta$ dans l'équation précédente; nous trouverons ainsi l'équation

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2},$$

qui peut s'écrire sous l'une ou l'autre des formes équivalentes

$$\rho^2 = \frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}$$

$$= \frac{a^2b^2}{b^2 + (a^2 - b^2)\sin^2\theta} = \frac{a^2b^2}{a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2\theta}.$$

Les abréviations suivantes sont d'un usage fréquent :

$$c^2 = a^2 - b^2, \qquad e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}.$$

La quantité e s'appelle l'*excentricité* de l'ellipse.

En divisant par a^2 les deux termes de la dernière fraction trouvée pour la valeur de ρ^2, nous obtiendrons l'équation sous sa forme la plus usitée

$$\rho^2 = \frac{b^2}{1 - e^2\cos^2\theta}.$$

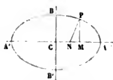
162. *Déterminer la forme de l'ellipse.*

La plus petite valeur que puisse avoir le dénominateur $b^2 + (a^2 - b^2)\sin^2\theta$ de l'expression de ρ^2 est celle qui correspond à $\theta = 0$; le maximum de ρ est donc le segment a déterminé par l'ellipse sur l'axe des x.

La plus grande valeur de $b^2 + (a^2 - b^2)\sin^2\theta$ correspond à $\sin\theta = 1$ ou $\theta = 90°$; le minimum de ρ est donc le segment b déterminé par la courbe sur l'axe des y. Le plus grand rayon vecteur qu'on puisse mener du centre à la courbe est donc l'axe des x, et le plus petit l'axe des y. En raison de cette propriété, on a appelé ces rayons le *grand axe* et le *petit axe* de la courbe.

Il est évident que ρ est d'autant plus grand que θ est plus petit. Donc *un diamètre est d'autant plus grand que sa direction se rapproche le plus de celle du grand axe.* La forme de la courbe est par suite celle qui est représentée par la *fig.* 56.

Fig. 56.



Les valeurs de ρ correspondant aux angles $\theta = \alpha$, $\theta = -\alpha$ sont égales; donc *deux diamètres faisant des angles égaux avec le même axe sont égaux;* théorème dont la réciproque est évidente.

Cette propriété permet de déterminer géométriquement les axes d'une ellipse dont le centre est donné. En effet, les points d'intersection de la courbe avec par un cercle concentrique sont les extrémités des diamètres égaux, et les bissectrices des angles formés par ces diamètres, les axes cherchés.

163. Si l'on compare l'équation de l'ellipse résolue par rapport à y

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

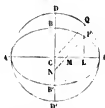
avec celle du cercle concentrique et de rayon a

$$y = \sqrt{a^2 - x^2},$$

on voit de suite que l'on peut construire l'ellipse de la manière suivante: *Décrire un cercle sur le grand axe* AA' *comme diamètre, prendre sur chaque ordonnée* LQ *un point* P *tel, que le rapport de* LP *à* LQ *soit constant et égal à* $b : a$; *le lieu des points* P *est l'ellipse demandée.*

Le cercle décrit sur le grand axe comme diamètre (*fig.* 57) est situé tout entier *en dehors* de la courbe. On pourrait de

Fig. 57.



même construire l'ellipse en décrivant un cercle sur le petit axe comme diamètre, et dilatant chaque ordonnée dans le rapport de b à a : le cercle décrit sur le petit axe est situé tout entier *à l'intérieur* de l'ellipse.

L'équation du cercle est, du reste, la forme particulière que prend celle de l'ellipse lorsqu'on y fait $b = a$.

164. *Trouver l'équation polaire de l'hyperbole.*

En opérant comme au nº 161, on trouve

$$\rho^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 \cos^2\theta - a^2 \sin^2\theta}$$
$$= \frac{a^2 b^2}{b^2 - (a^2 + b^2)\sin^2\theta} = \frac{a^2 b^2}{(a^2 + b^2)\cos^2\theta - a^2}.$$

Puisqu'on passe des formules relatives à l'ellipse aux formules correspondantes relatives à l'hyperbole en changeant le signe de b^2, on peut employer pour l'hyperbole les abrévia-

tions

$$c^2 = a^2 + b^2, \quad e^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2},$$

et considérer e comme l'*excentricité* de l'hyperbole.

En divisant alors par a^2 les deux termes de la dernière expression de ρ^2, on obtient, pour l'équation polaire de l'hyperbole,

$$\rho^2 = \frac{b^2}{e^2 \cos^2\theta - 1},$$

qui ne diffère de celle de l'ellipse que par le signe de b^2.

165. *Déterminer la forme de l'hyperbole.*

Les dénominations de *grand axe* et *petit axe* n'étant pas applicables à l'hyperbole (160), nous appellerons l'axe des x *axe transverse*, et l'axe des y *axe conjugué* ou *axe non transverse*.

Puisque le dénominateur $b^2 - (a^2 + b^2)\sin^2\theta$ est maximum lorsque $\theta = 0$, la valeur correspondante de ρ est minimum, autrement dit, *l'axe transverse est la ligne la plus courte qu'on puisse mener du centre à l'hyperbole.*

L'angle θ augmentant, ρ croît jusqu'à ce que l'on ait

$$\sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \text{ou} \quad \tang\theta = \frac{b}{a};$$

alors le dénominateur est nul et ρ est infini. Au delà, ρ^2 devient négatif et les diamètres cessent de rencontrer la courbe en des points réels jusqu'à ce que l'angle θ ait atteint la valeur θ_1, définie par les relations

$$\sin\theta_1 = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \text{ou} \quad \tang\theta_1 = \frac{b}{a},$$

et pour laquelle ρ redevient infini : l'angle θ continuant à augmenter, ρ diminue et repasse par sa valeur minimum a pour $\theta = 180°$.

La forme de l'hyperbole est ainsi celle qui est représentée par un trait plein sur la *fig.* 58.

166. Nous avons vu que l'axe des y ne rencontrait point

Fig. 58.



l'hyperbole en des points réels, puisque ces points sont donnés par l'équation

$$y^2 = -b^2;$$

nous pouvons cependant prendre sur l'axe des y des segments $CB = CB' = b$, et appeler cette longueur axe de la courbe. De même, si nous trouvons, pour déterminer un diamètre, une équation $\rho^2 = -R^2$, nous pourrons, bien que ce diamètre ne rencontre pas l'hyperbole en des points réels, prendre sur la direction correspondante et à partir du centre une longueur $\pm R$ pour le représenter, et appeler cette ligne un *diamètre de l'hyperbole*.

Le *lieu* des extrémités de ces diamètres qui ne rencontrent pas la courbe s'obtient en changeant le signe de ρ^2 dans l'équation de l'hyperbole, qui devient ainsi

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{\sin^2\theta}{b^2} - \frac{\cos^2\theta}{a^2},$$

ou

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

C'est l'équation d'une hyperbole rencontrant l'axe des y en des points réels, et l'axe des x en des points imaginaires. Cette courbe représentée en pointillé sur la *fig.* 58 s'appelle hyperbole *conjuguée* de l'hyperbole donnée.

167. Les diamètres qui correspondent à $\tang\theta = \pm \frac{b}{a}$, rencontrant la courbe à l'infini (165), sont, pour cette raison, les droites que nous avons appelées (154) *asymptotes* de la courbe.

Sur la figure, ce sont les lignes CK, CL : elles séparent évidemment les diamètres qui rencontrent la courbe en des points réels, de ceux qui la rencontrent en des points imaginaires. Il est, du reste, évident que deux hyperboles conjuguées ont les mêmes asymptotes.

L'expression $\operatorname{tang}\theta = \pm\frac{b}{a}$ permet de tracer les asymptotes lorsqu'on connaît les axes en grandeur et en position : il suffit pour cela de mener des parallèles aux axes par leurs extrémités B et A ; l'asymptote CK est la diagonale du rectangle ainsi formé. L'asymptote CL se construit d'une manière analogue.

Les asymptotes font avec l'axe des x des angles égaux θ définis par la relation

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{e};$$

d'ailleurs, celui qu'elles comprennent est égal à 2θ : donc, *en se donnant l'excentricité d'une hyperbole, on se donne l'angle formé par les asymptotes*, et cet angle est le double de celui qui a pour sécante l'excentricité.

EXERCICE.

Trouver l'excentricité de la conique donnée par l'équation générale.

Nous pouvons (74) trouver la tangente de l'angle compris entre les droites représentées par l'équation $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$, et en déduire la sécante de l'angle moitié; ou bien suivre la marche indiquée au n° 157 (Ex. III).

Nous avons

$$\frac{1}{\alpha^2} = \frac{a+b-R}{2c}, \quad \frac{1}{\beta^2} = \frac{a+b+R}{2c},$$

avec

$$R^2 = 4h^2 + (a-b)^2 = 4h^2 - 4ab + (a+b)^2.$$

Donc

$$\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\alpha^2} = \frac{R}{c}, \quad \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^4} = \frac{2R}{\alpha+b+R}.$$

§ II. — Tangentes et diamètres conjugués.

168. Les équations de l'ellipse et de l'hyperbole ne différant que par le signe de b^2 (160), ces courbes ont un certain

nombre de propriétés communes qui peuvent se démontrer ensemble en considérant le signe de b^2 comme indéterminé. Aussi les étudierons-nous à la fois, en employant en général le signe de b^2, qui se rapporte à l'ellipse, et laissant au lecteur le soin de déduire les formules correspondantes relatives à l'hyperbole.

Trouver l'équation de la tangente à la courbe

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

au point (x', y').

On peut la déduire de l'équation générale de la tangente (86), ou l'obtenir directement en suivant la méthode indiquée au n° **86**.

L'équation de la corde qui joint les deux points (x', y'), (x'', y'') de la courbe est

$$\frac{(x-x')(x-x'')}{a^2}+\frac{(y-y')(y-y'')}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1,$$

ou bien

$$\frac{(x'+x'')x}{a^2}+\frac{(y'+y'')y}{b^2}=\frac{x'x''}{a^2}+\frac{y'y''}{b^2}+1.$$

En y faisant $x'=x''$, $y'=y''$, on en déduit pour l'équation de la tangente

$$\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}=1.$$

Cette démonstration est indépendante de l'angle que font entre eux les axes de coordonnées. Lorsqu'on prend pour axes un système de diamètres conjugués, le coefficient de xy dans l'équation de la courbe est nul (143); les coefficients de x et de y sont nuls aussi, puisque le centre est pris pour origine, et si a' et b' sont les segments déterminés sur les axes de coordonnées, l'équation de la courbe devient (160)

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1;$$

et celle de la tangente est encore

$$\frac{xx'}{a'^2} + \frac{yy'}{b'^2} = 1.$$

169. L'équation de la polaire du point (x', y'), c'est-à-dire de la droite qui joint les points de contact des tangentes menées par (x', y'), est de même forme que celle de la tangente (88, 89); elle est donc

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1, \quad \text{ou} \quad \frac{xx'}{a'^2} + \frac{yy'}{b'^2} = 1,$$

suivant qu'on prend pour axes de coordonnées les axes de la courbe ou un système de diamètres conjugués.

En particulier, l'équation de la polaire d'un point de l'axe des x est $\frac{xx'}{a'^2} = 1$. Pour construire la polaire d'un point P, il faudra donc mener le diamètre PC passant par ce point (C étant le centre de la courbe), et trouver sur ce diamètre un point P' tel, que le rectangle CP.CP' soit égal au carré a'^2 du demi-diamètre : la parallèle menée par P' au diamètre conjugué de a' sera la polaire cherchée. Cette construction démontre de nouveau ce théorème du n° 145 : *La tangente menée à l'extrémité d'un diamètre est parallèle à son diamètre conjugué.*

EXERCICES.

I. Trouver la condition pour que $\lambda x + \mu y = 1$ soit tangente à la courbe $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

En comparant les équations $\lambda x + \mu y = 1$ et $\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1$, on trouve

$$x' = \lambda a^2, \quad y' = \mu b^2;$$

d'où la condition cherchée

$$a^2\lambda^2 + b^2\mu^2 = 1.$$

II. Trouver l'équation des tangentes menées à la courbe par (x', y') (92).

Réponse.

$$\left(\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - 1\right)\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) = \left(\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} - 1\right)^2.$$

III. Trouver l'angle φ compris entre ces tangentes.

Lorsqu'une équation du deuxième degré représente deux droites, l'équation obtenue en égalant à zéro ses trois termes du deuxième degré est celle de deux droites menées par l'origine, parallèlement au deux premières : l'angle φ dépend donc seulement des trois termes du deuxième degré de l'équation des tangentes. En développant à ce point de vue l'équation de l'Exercice II, on obtient (74)

$$\tang\varphi = \frac{2ab\sqrt{\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-1}}{x'^2+y'^2-a^2-b^2}.$$

IV. Trouver le lieu de l'intersection des tangentes qui se coupent à angle droit.

En égalant à zéro le dénominateur de la valeur de tang φ, on trouve

$$x^2+y^2=a^2+b^2,$$

équation d'un cercle ayant même centre que l'ellipse.

Le lieu de l'intersection des tangentes qui se coupent sous un angle donné est en général une courbe du quatrième degré.

170. *Trouver l'équation, par rapport aux axes, du diamètre conjugué de celui qui passe par le point (x', y') de la courbe.*

Le diamètre passant par l'origine est parallèle (169) à la tangente menée par le point (x', y'); son équation est donc

$$\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}=0.$$

Si θ et θ' sont les angles que font avec l'axe des x le diamètre primitif et son conjugué, on aura évidemment

$$\tang\theta = \frac{y'}{x'};$$

d'ailleurs, d'après l'équation du diamètre conjugué (21), on a

$$\tang\theta' = -\frac{b^2x'}{a^2y'};$$

par suite,

$$\tang\theta\tang\theta' = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Cette relation aurait pu se déduire de celle du n° 143. Dans le cas de l'hyperbole, elle devient (168)

$$\tang\theta \tang\theta' = \frac{b^2}{a^2}.$$

171. Puisque dans l'ellipse $\tang\theta \tang\theta'$ est négatif lorsqu'un des angles θ, θ' est aigu, c'est-à-dire quand sa tangente est positive, l'autre angle θ', θ est obtus, puisque sa tangente est négative; donc, *dans l'ellipse, deux diamètres conjugués ne peuvent jamais être situés d'un même côté du petit axe*, puisque ce petit axe correspond à $\theta = 90°$.

Dans l'hyperbole, au contraire, $\tang\theta \tang\theta'$ est positif; par suite, θ et θ' sont tous deux aigus ou tous deux obtus. Donc, *dans l'hyperbole, deux diamètres conjugués se trouvent toujours d'un même côté de l'axe conjugué.* Quand $\tang\theta$ est plus petit que $\frac{b}{a}$, $\tang\theta'$ est plus grand; et comme (167) le diamètre correspondant à l'angle dont la tangente est $\frac{b}{a}$ est l'asymptote qui (167) sépare les diamètres rencontrant la courbe de ceux qui ne la rencontrent pas, on voit que, *dans l'hyperbole, lorsqu'un diamètre rencontre la courbe en des points réels, son conjugué ne la rencontre pas.* On reconnaît en même temps que chaque asymptote peut être considérée comme étant son diamètre conjugué à elle-même.

172. *Trouver les coordonnées x'', y'' de l'extrémité du diamètre conjugué de celui qui passe par le point (x', y') de la courbe.*

Il suffit, pour cela, de résoudre, par rapport à x et y, les équations de la courbe et du diamètre conjugué

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 0, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

En substituant successivement dans la seconde les valeurs de x et de y tirées de la première, on trouve sans difficulté

$$\frac{x''}{a} = \pm\frac{y'}{b}, \quad \frac{y''}{b} = \mp\frac{x'}{a}.$$

173. *Exprimer les longueurs du diamètre (a') et de son conjugué (b') en fonction de l'abscisse de l'extrémité du premier.*

1° On a

$$a'^2 = x'^2 + y'^2,$$

mais

$$y'^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x'^2);$$

donc

$$a'^2 = b^2 + \frac{a^2 - b^2}{a^2} x'^2 = b^2 + e^2 x'^2.$$

2° On trouverait de même

$$b'^2 = x''^2 + y''^2 = \frac{a^2}{b^2} y'^2 + \frac{b^2}{a^2} x'^2$$

$$= (a^2 - x'^2) + \frac{b^2}{a^2} x'^2;$$

donc

$$b'^2 = a^2 - e^2 x'^2.$$

On déduit de là

$$a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2.$$

La somme des carrés de deux diamètres conjugués d'une ellipse est constante (159, Ex. III).

174. Dans l'hyperbole, il faut changer les signes de b^2 et b'^2. On a alors

$$a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2.$$

La différence des carrés de deux diamètres conjugués d'une hyperbole est constante.

Si, dans une hyperbole $a = b$, son équation devient

$$x^2 - y^2 = a^2,$$

et l'hyperbole est dite *équilatère*.

Le théorème précédent montre que, *dans une hyperbole équilatère, un diamètre quelconque est égal à son conjugué.*

Les asymptotes de l'hyperbole équilatère forment un angle

droit, puisqu'elles sont données par l'équation

$$x^2 - y^2 = 0.$$

Aussi appelle-t-on souvent l'hyperbole équilatère : hyperbole *rectangulaire*.

La condition pour que l'équation générale du deuxième degré représente une hyperbole équilatère est $a = -b$; elle exprime en effet (74) que les asymptotes $(ax^2 + 2hxy + by^2)$ forment un angle droit. D'ailleurs, si l'hyperbole est *rectangulaire*, elle est *équilatère*, puisque (167) la tangente de la moitié de l'angle compris entre les asymptotes est $\frac{b}{a}$, et comme cet angle est de 45 degrés, on a $b = a$.

175. *Trouver la distance p du centre à la tangente en* (x', y').

La distance de l'origine à la droite

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1$$

a pour expression (23)

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4}}} = \frac{ab}{\sqrt{\frac{b^2x'^2}{a^2} + \frac{a^2y'^2}{b^2}}};$$

mais nous savons (173) que

$$b'^2 = \frac{b^2x'^2}{a^2} + \frac{a^2y'^2}{b^2};$$

donc

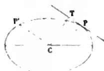
$$p = \frac{ab}{b'}.$$

176. *Trouver l'angle φ compris entre deux diamètres conjugués.*

L'angle φ compris entre deux diamètres CP, CP' (*fig.* 59) est égal à l'angle CPT compris entre l'un d'eux CP et la tan-

gente PT parallèle à l'autre CP'. Mais CT étant la perpendi-

Fig. 59.



culaire abaissée du centre sur la tangente, on a

$$\sin \text{CPT} = \frac{\text{CT}}{\text{CP}} = \frac{p}{a'};$$

donc

$$\sin \varphi = \frac{ab}{a'b'}.$$

L'équation $a'b' \sin \varphi = ab$ montre que *l'aire du triangle formé en joignant les extrémités de deux diamètres conjugués d'une ellipse ou d'une hyperbole est constante* (159, Ex. II).

177. La somme des carrés de deux diamètres conjugués d'une ellipse étant constante, leur rectangle est maximum lorsqu'ils sont égaux, et $\sin \varphi$ est alors un minimum : donc les angles aigu et obtus compris entre deux diamètres conjugués égaux sont respectivement le plus petit et le plus grand des angles que peuvent former deux diamètres conjugués.

La longueur des diamètres conjugués égaux s'obtient en faisant $a' = b'$ dans la relation $a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2$, alors a'^2 est la moitié de $a^2 + b^2$: donc

$$\sin \varphi = \frac{2ab}{a^2 + b^2}.$$

L'angle que ces diamètres font avec l'axe des x se déduit de l'équation

$$\tan \theta \tan \theta' = -\frac{b^2}{a^2};$$

en y faisant $\tan \theta = -\tan \theta'$, puisqu'ils font des angles égaux,

mais de signes contraires, avec l'axe des x (162). On trouve ainsi

$$\tang\theta = \frac{b}{a}.$$

Si donc (167) une ellipse et une hyperbole ont mêmes axes en grandeur et en position, les asymptotes de l'hyperbole coïncident avec les diamètres conjugués égaux de l'ellipse.

L'équation générale de l'ellipse, rapportée à deux diamètres conjugués (168), devient $x^2 + y^2 = a'^2$ lorsqu'on y fait $a' = b'$, autrement dit lorsqu'on la rapporte aux diamètres conjugués égaux. Elle prend alors la même forme que l'équation du cercle $x^2 + y^2 = r^2$, mais les axes de coordonnées sont *obliques*.

178. *Exprimer la longueur de la perpendiculaire abaissée du centre sur une tangente en fonction des angles que cette perpendiculaire fait avec les axes.*

Soient (x', y') le point de contact de la tangente, p la longueur de la perpendiculaire, et α l'angle qu'elle fait avec l'angle des x. Pour mettre l'équation

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1$$

sous la forme $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ (23), il suffit d'y faire

$$\frac{x'}{a^2} = \frac{\cos\alpha}{p}, \quad \frac{y'}{b^2} = \frac{\sin\alpha}{p};$$

et si l'on substitue, dans l'équation de la courbe, les valeurs de x' et y' qu'on en tire, on trouve

$$p^2 = a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha \ (*).$$

L'équation de la tangente prend alors la forme

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - \sqrt{a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha} = 0.$$

La distance du point (x', y') à la tangente est donnée par

(*) De même $p^2 = a'^2\cos^2\alpha + b'^2\cos^2\beta$, α et β étant les angles que la perpendiculaire fait avec deux diamètres conjugués.

l'expression (34)

$$\sqrt{a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha} - x'\cos\alpha - y'\sin\alpha,$$

pourvu que l'on considère cette distance comme positive lorsque le point (x', y') se trouve du même côté de la tangente que l'origine.

EXERCICE.

Trouver le lieu de l'intersection des tangentes qui se coupent à angle droit.

Soient p, p' les perpendiculaires abaissées du centre sur ces tangentes, on a

$$p^2 = a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha,\quad p'^2 = a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha,\quad p^2 + p'^2 = a^2 + b^2.$$

Mais le carré de la distance du centre à l'intersection de deux droites qui se coupent à angle droit est égal à la somme des carrés des distances de ce centre aux droites elles-mêmes. La distance de ce point d'intersection au centre est constante, et le lieu cherché est un cercle (169, Ex. IV).

179. Les cordes qui joignent les extrémités d'un diamètre à un point de la courbe s'appellent *cordes supplémentaires.*

Les diamètres parallèles à un système de cordes supplémentaires sont conjugués.

Considérons le triangle formé en joignant les extrémités d'un diamètre AB à un point D de la courbe, puisque la droite menée par les milieux de deux côtés est parallèle au troisième, le diamètre de la corde AD sera parallèle à BD, et celui de la corde BD sera parallèle à AD. On peut démontrer analytiquement ce théorème en formant les équations de AD et de BD, et en montrant que le produit des tangentes des angles que font ces cordes avec l'axe des x est égal à $-\frac{b^2}{a^2}$.

Nous pouvons maintenant construire géométriquement deux diamètres conjugués faisant entre eux un angle donné. Si l'on décrit en effet sur un diamètre un segment capable de l'angle donné, on aura, en joignant aux extrémités de ce diamètre les points où ce segment coupe la courbe, deux cordes supplémentaires qui seront parallèles aux diamètres cherchés.

EXERCICES.

I. Les tangentes menées aux extrémités d'un diamètre sont parallèles. Leurs équations sont en effet

$$\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}=\pm 1.$$

Ce théorème peut aussi se déduire du n° 146, en remarquant que le centre est le pôle de la droite située à l'infini (134).

II. Une tangente quelconque menée à une section conique à centre détermine sur deux tangentes fixes et parallèles des segments dont le rectangle est constant et égal au carré du demi-diamètre parallèle à ces tangentes fixes.

Prenons pour axes le diamètre b' parallèle aux tangentes et son conjugué a'; les équations de la courbe et de la tangente variable seront

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1, \quad \frac{xx'}{a'^2}+\frac{yy'}{b'^2}=1.$$

En faisant alternativement $x=a'$, $x=-a'$ dans la deuxième équation, on trouve pour les segments y déterminés sur les tangentes

$$y=\frac{b'^2}{y'}\left(1\mp\frac{x'}{a'}\right).$$

Leur produit

$$\frac{b'^4}{y'^2}\left(1-\frac{x'^2}{a'^2}\right)$$

se réduit à b'^2 lorsqu'on exprime que le point (x', y') est sur la conique.

III. Le rectangle des segments de la tangente variable (Ex. II) est égal au carré du demi-diamètre qui lui est parallèle.

Le rapport entre le segment déterminé sur une des tangentes parallèles et le segment adjacent de la tangente variable est le même que celui des diamètres parallèles à ces tangentes (149); donc le rapport du rectangle des segments des tangentes fixes au rectangle des segments de la tangente variable est égal à celui des carrés des diamètres parallèles aux tangentes : le premier rectangle étant égal au carré du demi-diamètre parallèle, le second sera aussi égal au carré du demi-diamètre parallèle à la tangente variable.

IV. Le rectangle des segments déterminés sur une tangente par deux

diamètres conjugués est égal au carré du demi-diamètre parallèle à la tangente.

Prenons pour axes le diamètre parallèle à la tangente et son conjugué : les équations de deux diamètres conjugués étant (170)

$$y = \frac{y'}{x'}x, \quad \frac{xx'}{a'^2} + \frac{yy'}{b'^2} = 0,$$

les segments qu'ils déterminent sur la tangente s'obtiendront en y faisant $x = a'$. Nous aurons ainsi

$$y = \frac{y'}{x'}a', \quad y = -\frac{b'^2}{a'}\frac{x'}{y'};$$

le rectangle de ces segments est évidemment b'^2.

Nous aurions pu, en suivant la même marche, donner une démonstration purement analytique du théorème de l'Ex. III.

On déduit de là que les diamètres passant par les points d'intersection d'une tangente avec deux tangentes parallèles sont conjugués.

V. Étant donnés, de grandeur et de position, deux diamètres conjugués Oa, Ob d'une conique à centre, déterminer les axes.

La construction suivante est fondée sur le théorème de l'Ex. IV. Par l'extrémité a (*fig.* 60) d'un des diamètres, menons une parallèle AB à l'autre;

Fig. 60.

cette parallèle est tangente à la conique. Sur Oa prenons un point P (dans le sens Oa pour l'ellipse, dans le sens aO pour l'hyperbole) tel, que $Oa.aP = \overline{Ob}^2$, et décrivons un cercle passant par OP, et ayant son centre C sur la droite AB; les droites OA et OB seront les axes de la courbe. En effet, puisque

$$Aa.aB = Oa.aP = \overline{Ob}^2,$$

les droites OA et OB sont des diamètres conjugués, et comme AB est un diamètre du cercle, l'angle AOB qu'elles comprennent est un angle droit.

VI. On donne deux diamètres ; de l'extrémité de l'un on abaisse une ordonnée sur l'autre : démontrer que les deux triangles ainsi formés sont équivalents.

VII. Étant donnés deux diamètres, par l'extrémité de l'un on mène une tangente jusqu'à l'autre ; prouver que l'on forme ainsi deux triangles équivalents.

§ III. — Normale.

180. On appelle *normale* à une courbe la perpendiculaire menée à la tangente par le point de contact.

Pour trouver l'équation de la normale à l'ellipse au point (x', y'), il suffit donc de former, d'après le n° 32, l'équation de la perpendiculaire menée par (x', y') à la tangente

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1.$$

On trouve ainsi

$$\frac{x'}{a^2}(y - y') = \frac{y'}{b^2}(x - x'),$$

ou bien

$$\frac{a^2 x}{x'} - \frac{b^2 y}{y'} = c^2;$$

c^2 représentant, suivant l'usage (161), la quantité $(a^2 - b^2)$.

Le segment CN (*fig.* 61) déterminé par la normale PN sur l'axe des x

Fig. 61.



s'obtient en faisant $y = 0$ dans l'équation précédente, ce qui donne

$$\text{CN} = \frac{c^2}{a^2}x' = e^2 x'.$$

On peut dès lors mener une normale à l'ellipse par un point N pris sur l'axe, puisque de la valeur de CN on peut déduire l'abscisse x' du point de la courbe par lequel passe cette normale.

Le cercle peut être considéré comme une ellipse dont l'excentricité est nulle, puisque $c^2 = a^2 - b^2$, et que, dans ce cas, $a^2 = b^2$; le segment CN est alors constamment nul : donc toutes les normales menées à un cercle passent par le centre.

181. Le segment MN de l'axe des x compris entre la normale PN et l'ordonnée PM s'appelle la ***sous-normale.*** D'après le n° 180, la longueur MN de cette sous-normale est

$$\mathrm{MN} = x' - \frac{c^2}{a^2}x' = \frac{b^2}{a^2}x'.$$

La normale divise donc l'abscisse en deux segments dont le rapport est constant.

Le segment MT de l'axe des x compris entre l'ordonnée PM et la tangente PT au point P est la ***sous-tangente.***

Comme $\mathrm{CT} = \frac{a^2}{x'}$ (169), la sous-tangente a pour valeur

$$\mathrm{MT} = \frac{a^2}{x'} - x' = \frac{a^2 - x'^2}{x'}.$$

La longueur de la normale PN a pour expression

$$\overline{\mathrm{PN}}^2 = \overline{\mathrm{PM}}^2 + \overline{\mathrm{MN}}^2 = y'^2 + \frac{b^4}{a^4}x'^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(\frac{a^2}{b^2}y'^2 + \frac{b^2}{a^2}x'^2\right).$$

Mais en désignant par b' le demi-diamètre conjugué de CP, la quantité comprise entre parenthèses est égale à b'^2 (173); on aura donc

$$\mathrm{PN} = \frac{bb'}{a}.$$

Si l'on prolonge la normale jusqu'à sa rencontre N' avec le petit axe, on trouve de même

$$\mathrm{PN'} = \frac{ab'}{b}.$$

Donc *le rectangle des segments* PN, PN' *déterminés par les axes sur la normale en un point* P *est égal au carré du demi-diamètre conjugué de celui qui passe par* P.

On sait (175) que la distance p du centre à la tangente est donnée par la relation $p = \frac{ab}{b'}$: donc *le produit de la normale par la distance du centre à la tangente est constant et égal au carré du demi-petit axe.*

La longueur de la normale en fonction de l'angle α qu'elle fait avec l'axe des x a pour expression (178)

$$PN = \frac{b^2}{p} = \frac{b^2}{\sqrt{a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha}} = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2\sin^2\alpha}}.$$

EXERCICES.

I. Mener par un point donné (x', y') une normale à une ellipse ou à une hyperbole.

Soit (X, Y) le point de la courbe par où passe la normale; l'équation de la normale sera alors

$$a^2xY - b^2yX = c^2XY,$$

et, puisqu'elle passe par (x', y'), on aura

$$a^2x'Y - b^2y'X = c^2XY.$$

Les points de la courbe dont les normales passent par (x', y') sont donc les points d'intersection de la courbe avec l'hyperbole

$$a^2x'y - b^2y'x = c^2x'x.$$

II. Si, par un point donné d'une conique, on mène deux cordes faisant entre elles un angle droit, la corde joignant leurs extrémités passera par un point fixe de la normale au point donné.

Prenons pour axes la tangente et la normale au point donné. L'équation de la conique sera alors

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2fy = 0,$$

car c doit être nul puisque l'origine est un point de la courbe, et g est nul (144) parce que l'axe des x, dont l'équation est $y = 0$, est tangent à la courbe. Soit

$$x^2 + 2pxy + qy^2 = 0$$

l'équation de deux droites menées par l'origine; multipliant cette équa-

tion par a, et la retranchant de celle de la courbe, nous trouvons

$$2(h-ap)xy+(b-aq)y^2+2fy=0.$$

Cette équation, qui est celle (40) d'un lieu passant par les points d'intersection des deux droites et de la conique, se décompose en deux :

$$y=0,\quad 2(h-ap)x+(b-aq)y+2f=0;$$

la première représente l'axe des x tangent à la courbe, et la seconde la corde joignant les extrémités des deux droites.

Le point où cette corde rencontre la normale (c'est-à-dire l'axe des y) est défini par la relation

$$y=\frac{2f}{aq-b}.$$

Mais si les droites menées par l'origine se coupent à angle droit, on a $q=-1$ (74), et la longueur du segment y_1 déterminé sur la normale est constante, puisque

$$y_1=-\frac{2f}{a+b}\ (*).$$

Si la courbe est une hyperbole équilatère $a+b=0$, la corde est constamment parallèle à la normale. Donc, si par un point d'une hyperbole équilatère, on mène deux cordes formant un angle droit, la perpendiculaire abaissée de ce point sur la corde joignant leurs extrémités est tangente à la courbe.

III. Trouver les coordonnées de l'intersection des tangentes aux points (x', y'), (x'', y'').

Les coordonnées x et y de l'intersection des droites

$$\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}=1,\quad \frac{xx''}{a^2}+\frac{yy''}{b^2}=1$$

sont

$$x=\frac{a^2(y'-y'')}{y'x''-y''x'},\quad y=\frac{b^2(x'-x'')}{y''x'-y'x''}.$$

IV. Trouver les coordonnées x et y de l'intersection des normales menées aux points (x', y'), (x'', y'').

Rép. $\quad x=\dfrac{(a^2-b^2)x'x''\mathrm{X}}{a^4},\quad y=\dfrac{(b^2-a^2)y'y''\mathrm{X}}{b^4},$

(*) Ce théorème est encore vrai si les droites sont menées de telle sorte, que le produit des tangentes des angles qu'elles font avec la normale soit constant; car alors q est constant, et par suite le segment $\frac{2f}{aq-b}$ est constant.

X et Y étant les coordonnées de l'intersection des tangentes trouvées à l'Ex. précédent.

Les valeurs de X et Y peuvent se mettre sous une autre forme, puisqu'en combinant les équations

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1,\quad \frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{b^2}=1,$$

on trouve

$$x'^2y''^2-y'^2x''^2=b^2(x'^2-x''^2)=-a^2(y'^2-y''^2).$$

Donc

$$X=\frac{x'y''+y'x''}{y'+y''},\quad Y=\frac{x'y''+y'x''}{x'+x''}.$$

On peut encore écrire

$$X=\frac{x'+x''}{1+\frac{x'x''}{a^2}+\frac{y'y''}{b^2}},\quad Y=\frac{y'+y''}{1+\frac{x'x''}{a^2}+\frac{y'y''}{b^2}}.$$

§ IV. — Foyers et directrices.

182. On appelle *foyers* d'une ellipse deux points F, F' (*fig.* 62) situés sur le grand axe, et également distants du

Fig. 62.



centre C de la quantité

$$\pm\sqrt{a^2-b^2}=\pm c.$$

Les foyers d'une hyperbole sont situés sur l'axe transverse et également distants du centre de la quantité

$$\pm\sqrt{a^2+b^2}=\pm c.$$

Exprimer la distance d'un point de l'ellipse au foyer.

Le carré de la distance FP d'un point P (x', y') au foyer F

dont les coordonnées sont $x = +c$, $y = 0$ a pour expression

$$\overline{FP}^2 = (x' - c)^2 + y'^2 = x'^2 + y'^2 - 2cx' + c^2.$$

Mais (173)

$$x'^2 + y'^2 = b^2 + e^2x'^2 \quad \text{et} \quad b^2 + c^2 = a^2;$$

donc

$$\overline{FP}^2 = a^2 - 2cx' + e^2x'^2,$$

et comme $c = ae$, il vient en définitive

$$FP = a - ex'.$$

Nous rejetons la valeur $ex' - a$ obtenue en donnant l'autre signe à la racine carrée; car x' étant toujours plus petit que a, et e plus petit que 1, la quantité $(ex' - a)$ est constamment négative. Cette valeur ne saurait donc convenir dans le cas actuel, où nous n'avons pas à considérer la direction du rayon vecteur FP, mais seulement sa grandeur absolue.

Pour trouver la distance F'P du point (x', y') à l'autre foyer, il suffit de changer le signe de c dans les formules précédentes; par suite

$$F'P = a + ex'.$$

Si l'on ajoute ensemble les valeurs de ces distances, on a

$$FP + F'P = 2a.$$

Donc *la somme des distances d'un point d'une ellipse aux foyers est constante et égale au grand axe.*

183. En appliquant la méthode précédente à l'hyperbole, nous obtiendrons la même valeur pour $\overline{FP}^2$; mais en extrayant la racine carrée, nous prendrons le signe contraire, parce que, dans l'hyperbole, x' est toujours plus grand que a, et e plus grand que 1, et que, par suite, la quantité $a - ex'$ est constamment négative. Nous aurons donc, pour le rayon vecteur dans l'hyperbole,

$$FP = ex' - a;$$

de même

$$F'P = ex' + a;$$

donc

$$F'P - FP = 2a.$$

La différence des distances d'un point d'une hyperbole aux foyers est constante et égale à l'axe transverse.

Dans les deux courbes, le produit des distances d'un point au foyer $\pm(a^2 - e^2x^2)$ est égal au carré b'^2 du demi-diamètre conjugué de celui qui passe par ce point (173).

184. On peut démontrer la réciproque des théorèmes précédents en cherchant le lieu du sommet d'un triangle dans lequel on donne la base $2c$, et la somme ou la différence $2a$ des deux autres côtés.

En prenant le point milieu de la base pour origine, la base pour axe des x, et une perpendiculaire pour axe des y, l'équation du lieu sera

$$\sqrt{y^2 + (c + x)^2} \pm \sqrt{y^2 + (c - x)^2} = 2a,$$

ou, en réduisant,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Si l'on donne la *somme* des côtés, a est plus grand que c, puisque la somme des côtés est plus grande que la base : le coefficient de y^2 est positif et le lieu est une *ellipse*.

Si l'on donne la *différence*, a est plus petit que c, le coefficient de y^2 est négatif et le lieu est une *hyperbole*.

185. Les théorèmes précédents permettent de décrire d'un mouvement continu une ellipse ou une hyperbole.

Si les extrémités d'un fil sont attachées en deux points fixes F et F', il est évident qu'une pointe qui se mouvra le long du fil en le tendant constamment décrira une ellipse dont les foyers seront F et F', et dont le grand axe sera égal à la longueur de ce fil.

Pour décrire une hyperbole, fixons une règle en un point F,

de manière qu'elle puisse tourner autour de ce point, et attachons un fil d'une part en F', de l'autre à un point R de la règle, en le faisant passer dans un anneau P (*fig.* 63); le point P dé-

Fig. 63.

crira une hyperbole lorsqu'on fera tourner la règle et glisser l'anneau en tendant le fil. En effet, F'P + PR étant constant, il en est de même de FP — F'P. Les points F et F' sont les foyers de l'hyperbole dont l'axe transverse est égal à la différence de longueur du fil et de la règle.

186. La polaire d'un foyer s'appelle *directrice* de la section conique. La directrice est donc (189) perpendiculaire au grand axe et située à une distance $\pm \frac{a^2}{c}$ du centre.

La distance d'un point de la courbe à une directrice est

$$\frac{a^2}{c} - x' = \frac{a}{c}(a - ex') = \frac{1}{e}(a - ex');$$

d'ailleurs, celle de ce point au foyer correspondant est $a - ex'$: donc *la distance d'un point de la courbe au foyer est dans le rapport constant de e à 1 avec sa distance à la directrice.*

Réciproquement, on peut définir une section conique comme le lieu d'un point tel, que sa distance à un point fixe foyer) soit dans un rapport constant $e:1$ (*fig.* 64) avec sa

Fig. 64.

distance à une droite fixe (directrice). C'est même sur cette

définition que plusieurs géomètres ont basé la théorie des sections coniques.

Prenons la droite fixe pour axe des x, et soient x', y' les coordonnées du point fixe, e le rapport constant; l'équation du lieu sera

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 = e^2 y^2,$$

et représentera une ellipse, une hyperbole ou une parabole, suivant que e sera inférieur, supérieur ou égal à l'unité.

EXERCICE.

Si une courbe est telle, que la distance ρ d'un quelconque de ses points (x, y) à un point fixe puisse s'exprimer par une fonction rationnelle et linéaire des coordonnées x, y, cette courbe est une section conique ayant le point fixe pour foyer (*).

Cette distance ρ peut s'exprimer par

$$\rho = Ax + By + C,$$

et comme $Ax + By + C$ est proportionnel à la distance du point (x, y) à la droite $(Ax + By + C = 0)$, cette équation exprime que la distance d'un point (x, y) de la courbe au point fixe est dans un rapport constant avec sa distance à une droite fixe.

187. *Trouver la distance* FT *du foyer* F *à une tangente* PT (*fig.* 62).

La distance du foyer $F(+c, 0)$ à la tangente PT, dont l'équation est $\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1$, a pour expression (34)

$$FT = \frac{1 - \frac{cx'}{a^2}}{\sqrt{\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4}}}.$$

Mais (175)

$$\sqrt{\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4}} = \frac{b'}{ab},$$

(*) O' Brien, *Coordinate Geometry*, p. 85.

donc

$$FT = \frac{b}{b'}(a - ex') = \frac{b}{b'} FP.$$

On trouverait de la même manière

$$F'T' = \frac{b}{b'}(a + ex') = \frac{b}{b'} F'P;$$

d'où

$$FT.F'T' = b^2,$$

puisque

$$a^2 - e^2 x'^2 = b'^2.$$

Le produit des distances des foyers à une tangente est constant et égal au carré du demi-petit axe.

Cette propriété est commune à l'ellipse et à l'hyperbole.

188. *La tangente* TT' *fait des angles égaux avec les rayons vecteurs* PF, PF', *qui vont du point de contact* P *aux deux foyers* F *et* F' (*fig.* 62, 65).

On a

$$FT = \frac{b}{b'} FP, \quad \frac{FT}{FP} = \frac{b}{b'};$$

mais

$$\frac{FT}{FP} = \sin FPT.$$

Le sinus de l'angle que le rayon vecteur FP fait avec la tangente TT' est ainsi égal à $\frac{b}{b'}$; un calcul analogue conduirait à la même valeur pour le sinus de l'angle F'PT' que l'autre rayon vecteur F'P fait avec la tangente PT'. Ces deux angles sont donc égaux.

Cette propriété est vraie pour l'ellipse et l'hyperbole; mais

Fig. 65.



en examinant les *fig.* 62 et 65, on voit que la tangente à l'ellipse

est la bissectrice *extérieure* de l'angle formé par les rayons vecteurs allant du point de contact aux foyers, tandis que la tangente à l'hyperbole en est la bissectrice *intérieure*.

Donc *une ellipse et une hyperbole homofocales* (ayant même foyer) *se coupent à angle droit*, c'est-à-dire de telle sorte que leurs tangentes respectives aux points d'intersection soient perpendiculaires.

EXERCICES.

I. Démontrer analytiquement qu'une ellipse et une hyperbole homofocales se coupent à angle droit.

Les coordonnées x', y' de l'intersection des coniques

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1$$

satisfont à la relation

$$\frac{(a^2-a'^2)\,x'^2}{a^2a'^2}+\frac{(b^2-b'^2)\,y'^2}{b^2b'^2}=0,$$

obtenue en retranchant la deuxième équation de la première. Mais si les coniques sont homofocales $a^2-a'^2=b^2-b'^2$, et alors la relation devient

$$\frac{x'^2}{a^2a'^2}+\frac{y'^2}{b^2b'^2}=0;$$

ce qui est la condition (32) pour que les deux tangentes

$$\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}=1,\quad \frac{xx'}{a'^2}+\frac{yy'}{b'^2}=1$$

soient perpendiculaires.

II. Trouver la distance du centre à la tangente, estimée parallèlement à l'un des rayons vecteurs allant du point de contact aux foyers.

Elle s'obtient en divisant la distance $\frac{ab}{b'}$ du centre à la tangente par le sinus $\frac{b}{b'}$ de l'angle compris entre le rayon vecteur et la tangente; elle est donc égale à a.

III. Vérifier que la normale, qui est la bissectrice de l'angle compris entre les rayons vecteurs focaux, divise la distance des foyers en deux segments proportionnels aux rayons vecteurs adjacents.

La distance du pied de la normale au centre est e^2x' (180); ses distances aux foyers sont donc $c + e^2x'$, $c - e^2x'$, et par suite respectivement égales aux produits de $a + ex'$, $a - ex'$ par e.

IV. Mener à l'ellipse une normale par un point du petit axe.

Le cercle passant par le point donné et les deux foyers coupe l'ellipse en des points qui appartiennent aux normales cherchées.

189. Considérons deux tangentes PT, Pt (*fig.* 66) menées

Fig. 66.



à une conique à centre par le point P; puisque (187) le produit des distances FT, F'T' des foyers à une tangente PT est constant, nous aurons

$$FT.F'T' = Ft.F't',$$

ou

$$\frac{FT}{Ft} = \frac{F't'}{F'T'}.$$

Mais $\frac{FT}{Ft}$ est le rapport des sinus des angles partiels TPF, FPt déterminés par la droite PF dans l'angle total TPt; de même $\frac{F't'}{F'T'}$ est le rapport des sinus des angles partiels t'PF', F'PT' déterminés par la droite PF' dans ce même angle TPt : donc les angles TPF, t'PF' sont égaux.

La tangente menée en P à une section conique passant par ce point P et ayant F et F' pour foyers fait des angles égaux avec les rayons vecteurs FP, F'P (188); par suite de ce que nous venons de démontrer, cette tangente fait aussi des angles égaux avec les droites PT, Pt : donc *les deux tangentes* PT,

P*t menées à une conique par un point* P *d'une conique homofocale sont également inclinées sur la tangente menée en* P *à la deuxième conique.*

190. *Trouver le lieu des projections d'un foyer sur les tangentes.*

La longueur de la perpendiculaire abaissée du foyer sur la tangente peut s'exprimer en fonction des angles que cette perpendiculaire fait avec les axes en faisant dans la formule

$$p = \sqrt{a^2 \cos^2\alpha + b^2 \sin^2\alpha} - x' \cos\alpha - y' \sin\alpha$$

du n° 178, $x' = c$, $y' = 0$: on trouve ainsi, pour l'équation polaire du lieu,

$$\rho = \sqrt{a^2 \cos^2\alpha + b^2 \sin^2\alpha} - c \cos\alpha,$$

ou

$$\rho^2 + 2c\rho\cos\alpha + c^2\cos^2\alpha = a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha;$$

par suite

$$\rho^2 + 2c\rho\cos\alpha = b^2.$$

C'est l'équation polaire d'un cercle (95) ayant son centre sur l'axe des x à une distance $-c$ du foyer; ce cercle est ainsi concentrique à la conique : son rayon est égal à a.

Donc *la projection d'un foyer sur une tangente à l'ellipse ou à l'hyperbole se trouve sur le cercle ayant pour diamètre le grand axe de l'ellipse ou l'axe transverse de l'hyperbole.*

Réciproquement, *si par un point* F (*fig.* 62), *on mène un rayon vecteur* FT *à un cercle, et une perpendiculaire* TP *à* FT, *cette perpendiculaire* TP *sera tangente à une section conique ayant* F *pour foyer, et qui sera une ellipse ou une hyperbole, suivant que le point* F *sera à l'intérieur ou à l'extérieur du cercle.*

En se reportant au n° 188, Ex. II, on voit que la ligne CT, dont la longueur est a, est parallèle au rayon vecteur F′P aboutissant au foyer.

191. *Trouver l'angle sous lequel est vue du foyer la tangente menée à une section conique à centre par le point* (x, y).

Soient (x', y') le point de contact; ρ et ρ' les rayons vecteurs menés par le foyer aux points (x, y), (x', y'); θ et θ' les angles que ces rayons vecteurs font avec l'axe; on aura, en prenant le centre pour l'origine,

$$\cos\theta = \frac{x+c}{\rho}, \quad \sin\theta = \frac{y}{\rho}, \quad \cos\theta' = \frac{x'+c}{\rho'}, \quad \sin\theta' = \frac{y'}{\rho'}.$$

Donc

$$\cos(\theta - \theta') = \frac{(x+c)(x'+c) + yy'}{\rho\rho'}.$$

En substituant, dans cette expression, la valeur de yy' tirée de l'équation de la tangente

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1,$$

on trouve

$$\rho\rho'\cos(\theta - \theta') = xx' + cx + cx' + c^2 - \frac{b^2}{a^2}xx' + b^2$$
$$= e^2xx' + cx + cx' + a^2 = (a + ex)(a + ex'),$$

et, comme $\rho' = a + ex'$, on a en définitive (*)

$$\cos(\theta - \theta') = \frac{a + ex}{\rho}.$$

Cette valeur ne dépend que des coordonnées x et y du point (x, y) et ne renferme pas celles du point de contact; donc les angles sous lesquels sont vues, du foyer, les deux tangentes menées par le point (x, y) sont égaux. Par suite, *l'angle sous lequel une corde est vue du foyer a pour bissectrice la droite menée par le foyer au pôle de la corde.*

192. *La droite joignant le foyer au pôle d'une corde menée par ce foyer est perpendiculaire à cette corde.*

Ce théorème peut se déduire du précédent en observant que l'angle sous lequel est vue la corde est alors de 180 degrés, ou bien se démontrer directement de la manière suivante :

(*) O' BRIEN, *Coordinate Geometry*, p. 156.

La perpendiculaire, abaissée d'un point (x', y') sur la polaire de ce point

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1,$$

a pour équation

$$\frac{a^2 x}{x'} - \frac{b^2 y}{y'} = c^2.$$

Mais, quand (x', y') se trouve sur la directrice, on a $x' = \frac{a^2}{c}$, et l'équation de la polaire ainsi que celle de la perpendiculaire sont satisfaites par les coordonnées du foyer $x = c$, $y = 0$.

Lorsqu'une courbe est exprimée en coordonnées polaires, on appelle *sous-tangente polaire* le segment déterminé par la tangente et le pôle sur la perpendiculaire menée par le pôle au rayon vecteur. Le théorème que nous venons de démontrer peut alors s'énoncer de la manière suivante :

Le foyer étant pris pour pôle, la directrice est le lieu des extrémités des sous-tangentes polaires.

Nous prouverons plus loin (Chapitre XII) que les théorèmes énoncés dans ce numéro et le précédent sont encore vrais dans le cas de la parabole.

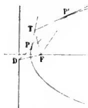
EXERCICES.

I. L'angle sous lequel est vu du foyer le segment déterminé sur une tangente mobile par deux tangentes fixes est constant.

Cet angle est (191) la moitié de celui sous lequel est vue la corde de contact des deux tangentes fixes.

II. Si une corde PP' coupe la directrice en D (*fig.* 67), la droite FD

Fig. 67.



est la bissectrice extérieure de l'angle PFP'.

En effet, T étant le pôle de PP', FT est la bissectrice intérieure de l'angle PFP' (191); mais D est le pôle de FT puisqu'il se trouve à l'intersection de PP' polaire de T, et de la directrice qui est la polaire de F; par suite DF est perpendiculaire à FT : donc DF est la bissectrice extérieure de l'angle PFP'.

(Les théorèmes suivants fondés sur l'analogie qui existe entre les équations de la tangente et de la polaire m'ont été communiqués par le Rév. W.-D. Sadleir.)

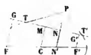
III. La perpendiculaire abaissée d'un point d'une ordonnée fixe de l'axe sur la polaire de ce point passe par un point fixe de l'axe.

Le segment déterminé sur l'axe par cette perpendiculaire a pour valeur e^2x' (180); il sera constant lorsque x' sera lui-même constant.

IV. Trouver les distances du centre et du foyer à la polaire du point (x', y').

V. Sur une corde TT' (*fig.* 68) on abaisse des perpendiculaires FG, F'G', CM, PN, des foyers F, F', du centre C d'une conique et du pôle P de

Fig. 68.



cette corde; prouver que CM.PN' $= b^2$. Ce théorème est analogue au suivant : le produit de la normale par la distance du centre à la tangente est constant (181).

VI. Prouver que $\text{PN}'.\text{NN}' = \dfrac{b^2}{a^2}(a^2 - e^2x'^2)$, x' étant l'abscisse du point P. Lorsque le point P est sur la courbe, cette expression donne pour la normale la valeur connue $\dfrac{bb'}{a}$ (181).

VII. Prouver que FG.F'G' $=$ CM.NN'. Lorsque le point P est sur la courbe, cette expression devient FG.F'G' $= b^2$.

193. ***Trouver l'équation polaire de l'ellipse ou de l'hyperbole en prenant le foyer pour pôle.***

La longueur du rayon vecteur allant du foyer à un point (x', y')

de la courbe est (182) $a - ex'$. D'ailleurs, θ étant l'angle que le rayon vecteur forme avec l'axe, on a

$$x' = \rho \cos\theta + c;$$

l'équation cherchée est donc

$$\rho = a - e\rho\cos\theta - ec,$$

ou

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta} = \frac{b^2}{a}\,\frac{1}{1+e\cos\theta}.$$

On appelle *paramètre* le double de l'ordonnée du foyer; sa valeur, qu'on représente par p, se déduit de l'équation précédente en y faisant $\theta = 90°$: on trouve ainsi

$$\frac{p}{2} = \frac{b^2}{a} = a(1-e^2),$$

et l'équation de la courbe prend la forme

$$\rho = \frac{p}{2}\,\frac{1}{1+e\cos\theta}.$$

EXERCICES.

I. La moyenne harmonique entre les deux segments déterminés par le foyer sur une corde focale (c'est-à-dire passant par le foyer) est constante et égale au demi-paramètre.

Les deux segments FP, FP' d'une corde focale PP' ne sont pas autre chose que les rayons vecteurs correspondants à θ et $\theta + 180°$; on aura donc

$$\mathrm{FP} = \frac{p}{2}\,\frac{1}{1+e\cos\theta}, \quad \mathrm{FP'} = \frac{p}{2}\,\frac{1}{1-e\cos\theta};$$

d'où

$$\frac{1}{\mathrm{FP}} + \frac{1}{\mathrm{FP'}} = \frac{4}{p}.$$

II. Le produit des segments déterminés par le foyer sur une corde focale est dans un rapport constant avec la corde entière.

Ce théorème n'est qu'une autre manière d'énoncer le précédent; mais on peut l'établir directement en calculant le produit FP.F'P' et la somme

FP + FP'. On a ainsi

$$\text{FP}.\text{FP}' = \frac{b^4}{a^2}\,\frac{1}{1-e^2\cos^2\theta}, \quad \text{FP}+\text{FP}' = \frac{2b^2}{a}\,\frac{1}{1-e^2\cos^2\theta};$$

d'où

$$\frac{\text{FP}.\text{FP}'}{\text{FP}+\text{FP}'} = \frac{1}{2}\,\frac{b^2}{a} = \frac{p}{4}.$$

III. Une corde focale est troisième proportionnelle à l'axe transverse et au diamètre parallèle à la corde.

La longueur R du demi-diamètre, faisant avec l'axe transverse un angle θ, est donnée par l'équation (161)

$$\text{R}^2 = \frac{b^2}{1-e^2\cos^2\theta};$$

par suite, la longueur de la corde FP + FP' est $\frac{2\text{R}^2}{a}$.

IV. La somme de deux cordes focales menées parallèlement à deux diamètres conjugués est constante.

Cela résulte du théorème précédent, et de ce que la somme des carrés des deux diamètres conjugués est constante (173).

V. La somme des inverses de deux cordes focales se coupant à angle droit est constante.

194. L'ellipse rapportée à son sommet a pour équation

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

ou

$$y^2 = \frac{2b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2 = px - \frac{b^2}{a^2}x^2.$$

Donc, dans une ellipse, le carré de l'ordonnée est *plus petit* que le rectangle du paramètre et de l'abscisse.

On trouverait de même, pour l'hyperbole rapportée à son sommet,

$$y^2 = px + \frac{b^2}{a^2}x^2.$$

Dans l'hyperbole, le carré de l'ordonnée est donc *plus grand* que le rectangle du paramètre et de l'abscisse.

Nous verrons plus loin que, dans la parabole, ces quantités sont *égales*.

C'est en raison de ces propriétés que les noms de *parabole*, *hyperbole* et *ellipse* furent donnés autrefois aux courbes qui nous occupent (*).

§ V. — Asymptotes.

195. Les propriétés que nous venons d'étudier sont communes à l'ellipse et à l'hyperbole; il n'en est pas de même des suivantes, relatives à l'hyperbole seulement, parce qu'elles dépendent des asymptotes, qui, dans l'ellipse, sont imaginaires.

Nous avons vu (136) que l'équation des asymptotes s'obtenait en égalant à zéro l'ensemble des termes du deuxième degré, le centre étant pris pour origine. L'équation de la courbe rapportée à deux diamètres conjugués étant

$$\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 1,$$

celle des asymptotes sera

$$\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 0,$$

ou

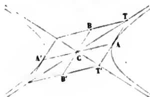
$$\frac{x}{a'} - \frac{y}{b'} = 0, \quad \frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} = 0.$$

Les asymptotes sont parallèles aux diagonales du parallélogramme ayant pour côtés adjacents les deux demi-diamètres conjugués. Soient CA et CB (*fig.* 69) les deux diamètres conjugués a' et b' auxquels est rapportée la courbe. L'équation de la diagonale CT est $\frac{y}{x} = \frac{b'}{a'}$; CT coïncide donc avec une asymptote. L'autre diagonale AB, ayant pour équation $\frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} = 1$, est parallèle à l'autre asymptote. (*Voir* au n° 167.)

(*) *Voir* Pappus, *Math. Coll.*, liv. VII.

On peut donc, étant donnés deux diamètres conjugués d'une hyperbole, trouver les asymptotes, ou bien déterminer le dia-

Fig. 69.



mètre conjugué d'un diamètre donné, connaissant les asymptotes. Si CA est le diamètre donné, on mènera par le point A une parallèle AB à une asymptote, de manière que cette parallèle AB soit divisée en deux parties égales par l'autre asymptote : la droite CB sera le diamètre conjugué de CA.

196. *Le segment déterminé par les asymptotes sur une tangente est divisé en deux parties égales au point de contact et est égal au diamètre parallèle de la tangente.*

Ce théorème n'est qu'un corollaire du précédent, puisque $AT = b' = AT'$; mais on peut le démontrer directement. Prenons pour axes le diamètre passant par le point de contact et son conjugué, l'équation des asymptotes sera

$$\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 0.$$

Pour $x = a'$, elle donne

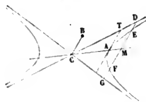
$$y = \pm b';$$

mais la tangente en A étant parallèle au diamètre conjugué, cette valeur b' de l'ordonnée n'est autre chose que le segment déterminé par l'asymptote sur la tangente.

197. *Si une droite* DG *coupe une hyperbole, les segments* DE, FG *déterminés sur cette droite par la courbe et les asymptotes* CD, CG *sont égaux.*

Prenons pour axes le diamètre CB, parallèle à DG, et son conjugué CA (*fig.* 70) : il résulte du numéro précédent que le

Fig. 70.



segment DG est divisé en deux parties égales par le diamètre CA ; il en est de même de la corde EF. Donc DE = FG.

Les longueurs de ces lignes peuvent se trouver facilement, car de l'équation des asymptotes

$$\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 0$$

nous déduisons

$$y(= \mathrm{DM} = \mathrm{MG}) = \pm \frac{b'}{a'} x,$$

et de l'équation de la courbe

$$\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 1$$

nous tirons

$$y(= \mathrm{EM} = \mathrm{FM}) = \pm b' \sqrt{\frac{x^2}{a'^2} - 1};$$

donc

$$\mathrm{DE}(= \mathrm{FG}) = b' \left(\frac{x}{a'} - \sqrt{\frac{x^2}{a'^2} - 1}\right)$$

et

$$\mathrm{DF}(= \mathrm{EG}) = b' \left(\frac{x}{a'} + \sqrt{\frac{x^2}{a'^2} - 1}\right).$$

198. De ces équations, il résulte que le rectangle DE.DF est constant et égal à b'^2 ; par suite, plus DF sera grand, plus DE sera petit. Mais à mesure que la droite DF s'éloigne du centre, sa longueur augmente, et en prenant x suffisamment grand

nous pouvons rendre DF plus grand que toute quantité donnée. Donc :

Plus une sécante sera éloignée du centre, plus la portion de cette sécante comprise entre l'asymptote et la courbe sera petite; et en augmentant la distance de la sécante au centre, on peut rendre cette portion plus petite que toute quantité donnée.

199. Si l'on prend les asymptotes pour axes, les coefficients g et h de l'équation générale, ainsi que les coefficients a et b disparaissent : les premiers, parce que le centre de la courbe est pris pour origine ; les seconds, parce que les axes rencontrent la courbe à l'infini (138, Ex. IV). L'équation de l'hyperbole prendra donc la forme

$$xy = k^2,$$

qui exprime que *l'aire du parallélogramme formé par les coordonnées est constante.*

L'équation d'une corde passant par (x', y'), (x'', y'') est alors (86)

$$(x - x')(y - y'') = xy - k^2,$$

ou

$$x'y + y''x = k^2 + x'y''.$$

En y faisant $x' = x''$, $y' = y''$, on aura pour l'équation de la tangente en (x', y')

$$x'y + y'x = 2k^2,$$

qui devient, en remplaçant k^2 par $x'y'$,

$$\frac{x}{x'} + \frac{y}{y'} = 2.$$

Les segments faits sur les asymptotes par une tangente ont ainsi pour valeur $2x'$, $2y'$; leur rectangle est égal à $4k^2$. Donc :

L'aire du triangle formé par une tangente et les asymptotes est constante et égale au double de l'aire du parallélogramme construit sur les coordonnées.

EXERCICES.

I. Les droites joignant à deux points fixes (x', y'), (x'', y'') d'une hyperbole un point quelconque (x''', y''') de la courbe, déterminent sur une asymptote un segment de longueur constante.

L'équation d'une de ces droites est

$$x'''y + y'x = y'x''' + k^2;$$

en y faisant $y = 0$, on trouve pour le segment qu'elle détermine sur l'axe des x à partir de l'origine, $x''' + x'$; on trouverait, de même, pour le segment déterminé par la deuxième droite $x''' + x''$. La différence $x' - x''$ entre ces deux quantités est le segment cherché. Sa valeur est indépendante de x''', c'est-à-dire de la position du point mobile.

II. Trouver les coordonnées x et y de l'intersection des tangentes menées aux points (x', y'), (x'', y'').

En résolvant par rapport à x et y les équations des tangentes

$$x'y + y'x = 2k^2, \quad x''y + y''x = 2k^2,$$

on trouve

$$x = \frac{2k^2(x' - x'')}{x'y'' - x''y'};$$

et en observant que

$$y' = \frac{k^2}{x'}, \quad y'' = \frac{k^2}{x''},$$

on a

$$x = \frac{2x'x''}{x' + x''}.$$

On trouverait de même

$$y = \frac{2y'y''}{y' + y''}.$$

200. *Exprimer la quantité k^2 en fonction des axes de la courbe.*

Puisque l'axe transverse est la bissectrice de l'angle formé par les asymptotes, les coordonnées du sommet s'obtiendront en faisant $x = y$ dans l'équation $xy = k^2$. On a ainsi pour le sommet

$$x = y = k;$$

mais, θ étant l'angle compris entre l'axe et l'asymptote, on a

$$a = 2k\cos\theta,$$

puisque a est la base d'un triangle isoscèle ayant k pour autre côté et θ pour angle à la base; d'ailleurs (165)

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

donc

$$k = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}.$$

L'équation de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes devient ainsi

$$xy = \frac{a^2+b^2}{4}.$$

201. *La distance du foyer à une asymptote est égale au demi-axe conjugué b.*

Cette distance est égale à $c\sin\theta$, et comme

$$c = \sqrt{a^2+b^2}, \quad \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

on a

$$c\sin\theta = b.$$

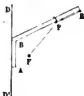
Cette propriété peut aussi se déduire, comme cas particulier, du théorème connu : « le produit des distances des foyers à une tangente est constant et égal à $-b^2$ »; car l'asymptote peut être considérée comme une tangente dont le point de contact est à l'infini (154), et les distances des deux foyers à cette asymptote sont égales.

202. *La distance du foyer à un point de la courbe est égale à la distance de ce point à la directrice estimée parallèlement à une asymptote.*

La distance du point au foyer est égale à e fois la distance du point à la directrice (186), et cette dernière est à la distance estimée parallèlement à l'asymptote dans le rapport de $\cos\theta$, c'est-à-dire de $\frac{1}{e}$ (167) à 1.

On peut déduire de là un procédé pour décrire l'hyperbole d'une manière continue. Une règle ABR coudée en B glisse le long de la droite fixe DD' (*fig.* 71); un fil, dont la longueur

Fig. 71.



est RB, est fixé aux deux points R et F; un anneau P maintient le fil tendu; le point P décrit une hyperbole dont F est le foyer, DD' la directrice, et dont l'asymptote est parallèle à BR, puisqu'on a toujours

$$PB = PF.$$



CHAPITRE XII.

DE LA PARABOLE.

§ I. — Réduction de l'équation générale.

203. L'équation du deuxième degré représente une parabole (137) lorsque ses trois premiers termes forment un carré parfait, c'est-à-dire lorsqu'elle est de la forme

$$(\alpha x + \beta y)^2 + 2gx + 2fy + c = 0.$$

On ne peut pas alors la transformer (140) de manière à faire disparaître à la fois les termes en x et y. Mais la forme même de l'équation indique le procédé à suivre pour la simplifier. Les quantités $\alpha x + \beta y$, $2gx + 2fy + c$ sont respectivement proportionnelles aux distances du point (x, y) aux droites ayant pour équations

$$\alpha x + \beta y = 0, \quad 2gx + 2fy + c = 0.$$

L'équation de la parabole exprime ainsi que le carré de la distance d'un point de la courbe à la première de ces droites est dans un rapport constant avec la distance de ce point à la deuxième droite. En prenant donc ces droites pour axes de coordonnées, l'équation de la courbe pourra se réduire à la forme $y^2 = px$, puisque les distances d'un point à deux axes sont proportionnelles aux coordonnées de ce point par rapport à ces axes.

La nouvelle origine est un point de la courbe, et comme à chaque valeur de x correspondent deux valeurs de y égales et de signes contraires, le nouvel axe des x est un diamètre dont les ordonnées sont parallèles au nouvel axe des y. Mais l'ordonnée menée à l'extrémité d'un diamètre est tangente à la courbe (145); donc le nouvel axe des y est la tangente

à l'origine. En se reportant à l'équation primitive, on voit ainsi que $\alpha x + \beta y$ est le diamètre passant par l'origine, et que $2gx + 2fy + c$ est la tangente au point où ce diamètre rencontre la courbe.

L'équation d'une parabole rapportée à un diamètre et à la tangente menée par l'extrémité de ce diamètre, est donc de la forme $y^2 = px$.

204. Les nouveaux axes auxquels nous avons été conduit dans le numéro précédent ne sont pas, en général, rectangulaires; mais il est toujours possible de ramener l'équation de la parabole à la forme $y^2 = px$ et d'avoir en même temps des axes rectangulaires. Pour le démontrer, introduisons dans l'équation générale de cette courbe une constante arbitraire k; elle deviendra alors

$$(\alpha x + \beta y + k)^2 + 2(g - \alpha k)x + 2(f - \beta k)y + c - k^2 = 0.$$

De même qu'au numéro précédent

$$\alpha x + \beta y + k = 0$$

représente un diamètre, et

$$2(g - \alpha k)x + 2(f - \beta k)y + c - k^2 = 0$$

la tangente à l'extrémité de ce diamètre. Si nous prenons ces droites pour axes, l'équation de la parabole deviendra $y^2 = px$, et nous pourrons déterminer k par la condition que ces deux droites soient perpendiculaires. Nous aurons ainsi (25)

$$\alpha(g - \alpha k) + \beta(f - \beta k) = 0;$$

d'où

$$k = \frac{\alpha g + \beta f}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Puisque nous ne trouvons qu'une seule équation du premier degré pour déterminer k, il n'existe qu'un *seul diamètre* formant avec ses ordonnées un angle droit. Ce diamètre s'appelle *axe* de la courbe.

205. On peut aussi ramener l'équation de la parabole à la forme $y^2 = px$ par la transformation des coordonnées. Lorsqu'il s'est

agi (Chapitre XI) de réduire l'équation générale du deuxième degré nous avons déplacé les axes parallèlement à eux-mêmes, puis nous les avons fait tourner autour de la nouvelle origine de manière à faire disparaître le terme en xy. Pour la parabole, nous effectuerons ces transformations dans l'ordre inverse (comme nous aurions, du reste, pu le faire pour l'ellipse et l'hyperbole); cette marche semble d'autant plus convenable que l'on ne peut pas, en déplaçant les axes parallèlement à eux-mêmes, faire disparaître à la fois le terme en x et le terme en y.

Prenons pour nouveaux axes la droite $\alpha x + \beta y$, et sa perpendiculaire $\beta x - \alpha y$. Puisque les nouvelles coordonnées X et Y représentent les distances d'un point de la parabole aux nouveaux axes, on aura (34)

$$\mathrm{Y} = \frac{\alpha x + \beta y}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad \mathrm{X} = \frac{\beta x - \alpha y}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}.$$

En faisant, pour abréger, $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$, les formules de transformation deviennent

$$\gamma \mathrm{Y} = \alpha x + \beta y, \quad \gamma \mathrm{X} = \beta x - \alpha y;$$

d'où

$$\gamma x = \alpha \mathrm{Y} + \beta \mathrm{X}, \quad \gamma y = \beta \mathrm{Y} - \alpha \mathrm{X}.$$

La substitution de ces valeurs dans l'équation de la courbe donne

$$\gamma^2 \mathrm{Y}^2 + 2(g\beta - f\alpha)\mathrm{X} + 2(g\alpha + f\beta)\mathrm{Y} + \gamma c = 0.$$

Ainsi, en faisant tourner les axes autour de l'origine, nous avons réduit l'équation de la courbe à la forme

$$b'y^2 + 2g'x + 2f'y + c' = 0.$$

Transportons maintenant les axes parallèlement à eux-mêmes et prenons le point (x', y') pour origine, elle devient

$$b'y^2 + 2g'x + 2(b'y' + f')y + b'y'^2 + 2g'x' + 2f'y' + c' = 0.$$

Le coefficient de x n'ayant pas changé, on ne peut chercher à le rendre nul; mais on peut déterminer x' et y' de telle sorte que

le coefficient de y et le terme absolu s'annulent. On aura alors

$$y' = -\frac{f'}{b'}, \quad x' = \frac{f'^2 - b'c'}{2g'b'}.$$

L'équation est ainsi ramenée à la forme $y^2 = px$, et p a pour valeur

$$p = -\frac{2g'}{b'} = \frac{2(f\alpha - g\beta)}{(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Lorsque la parabole est représentée par $y^2 = px$, on donne à p le nom de *paramètre* du diamètre pris pour axe de x; lorsque les axes sont rectangulaires, p est le *paramètre principal* (194).

EXERCICES.

I. Trouver le paramètre principal de la parabole

$$9x^2 + 24xy + 16y^2 + 22x + 46y + 9 = 0.$$

En suivant le procédé du n° 204, on trouve $k = 5$; l'équation peut alors s'écrire

$$(3x + 4y + 5)^2 = 2(4x - 3y + 8).$$

Les distances d'un point de la courbe aux droites

$$3x + 4y + 5 \quad \text{et} \quad 4x - 3y + 8$$

étant X et Y, nous aurons

$$5Y = 3x + 4y + 5, \quad 5X = 4x - 3y + 8;$$

donc

$$Y^2 = \frac{2}{5} X.$$

On peut aussi procéder comme au n° 205. Si l'on rapporte la courbe aux droites $3x + 4y$, $4x - 3y$ pour axes, on trouve

$$25Y^2 + 50Y - 10X + 9 = 0$$

ou

$$25(Y + 1)^2 = 10X + 16,$$

et en transportant les axes parallèlement à eux-mêmes au point $\left(-\frac{8}{5}, -1\right)$, on retombe sur l'équation

$$Y^2 = \frac{2}{5} X.$$

II. Trouver le paramètre de la parabole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2x}{a} - \frac{2y}{b} + 1 = 0.$$

RÉPONSE. $$p = \frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

On peut déduire cette valeur de p, des théorèmes suivants que nous démontrerons plus loin :

Le foyer d'une parabole est la projection de l'intersection de deux tangentes se coupant à angle droit sur leur corde de contact;

Le paramètre d'une conique s'obtient en divisant quatre fois le produit des segments déterminés par le foyer sur une corde focale par cette corde focale (193, Ex. I).

III. Si a et b sont les longueurs de deux tangentes à la parabole se coupant à angle droit, et si m est le quart du paramètre, prouver que

$$\frac{a^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{4}{3}}} + \frac{b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}} = \frac{1}{m^{\frac{2}{3}}}.$$

206. Si dans l'équation primitive de la courbe on a $g\beta = f\alpha$, le coefficient de x est nul dans l'équation transformée

$$\gamma^2 Y^2 + 2(g\beta - f\alpha)X + 2(g\alpha + f\beta)Y + \gamma c = 0,$$

qui, prenant alors la forme

$$b'y^2 + 2f'y + c' = 0,$$

peut s'écrire; en désignant par λ et μ ses racines,

$$b'(y-\lambda)(y-\mu) = 0.$$

Elle représente alors deux droites réelles ou imaginaires parallèles au nouvel axe des x.

Il est facile de vérifier que, dans ce cas, la condition générale (76) pour que l'équation représente deux droites est satisfaite. En effet cette condition se traduit par la relation

$$c(ab - h^2) = af^2 - 2hfg + bg^2,$$

et si l'on y remplace a, h, b respectivement par α^2, $\alpha\beta$, β^2, le

premier membre s'annule et le second se réduit à $(f\alpha - g\beta)^2$. On peut mettre la relation

$$f\alpha = g\beta$$

sous l'une ou l'autre des formes

$$f\alpha^2 = g\alpha\beta, \quad f\alpha\beta = g\beta^2,$$

et on voit alors que l'équation générale du second degré représente deux droites parallèles, lorsque ses coefficients satisfont à la fois à la relation $ab - h^2 = 0$, et à l'une ou l'autre des conditions $af = hg$, $fh = bg$.

***207.** Lorsque les axes primitifs sont obliques, on peut encore réduire l'équation de la parabole, comme au nº **205**, en prenant pour nouveaux axes la droite $\alpha x + \beta y$ et sa perpendiculaire, dont l'équation est alors (**26**)

$$(\beta - \alpha\cos\omega)x - (\alpha - \beta\cos\omega)y = 0.$$

Posant, pour abréger,

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos\omega,$$

les formules de transformation deviennent (**34**)

$$\gamma Y = (\alpha x + \beta y)\sin\omega, \quad \gamma X = (\beta - \alpha\cos\omega)x - (\alpha - \beta\cos\omega)y,$$

d'où

$$\gamma x \sin\omega = (\alpha - \beta\cos\omega)Y + \beta X \sin\omega,$$
$$\gamma y \sin\omega = (\beta - \alpha\cos\omega)Y - \alpha X \sin\omega.$$

En effectuant les substitutions, l'équation de la parabole devient

$$\gamma^2 Y^2 + 2\sin^2\omega(g\beta - f\alpha)X$$
$$+ 2\sin\omega[g(\alpha - \beta\cos\omega) + f(\beta - \alpha\cos\omega)]Y + \gamma c \sin^2\omega = 0;$$

si l'on déplace ensuite les axes parallèlement à eux-mêmes comme au nº **205**, on trouve, pour la valeur du paramètre principal p,

$$p = -\frac{2g'}{b'} = \frac{2(f\alpha - g\beta)\sin^2\omega}{(\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos\omega)^{\frac{3}{2}}}.$$

EXERCICE.

Trouver le paramètre principal de la parabole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2x}{a} - \frac{2y}{b} + 1 = 0.$$

Réponse. $$p = \frac{4a^2b^2\sin^2\omega}{(a^2+b^2+2ab\cos\omega)^{\frac{3}{2}}}.$$

208. L'équation $y^2 = px$ nous permet de trouver facilement la forme de la parabole. Cette courbe est symétrique par rapport à l'axe des y, puisqu'à chaque valeur de x correspondent

Fig. 72.



deux valeurs égales et de signes contraires pour y; elle n'a aucun point situé du côté des x négatifs, puisqu'en faisant x négatif, y devient imaginaire; les valeurs de y croissent en même temps que les valeurs positives de x. Cette courbe a donc la forme indiquée par la *fig.* 72.

La parabole ressemble à l'hyperbole, en ce sens qu'elle a des branches infinies; mais il y a une grande différence entre la nature des branches infinies de ces deux courbes. Celles de l'hyperbole tendent, à la limite, à coïncider avec deux droites divergentes, tandis que celles de la parabole ne jouissent pas de cette propriété. Si nous cherchons les deux points où la droite

$$x = ky + l$$

rencontre la parabole $y^2 = 2px$, nous obtenons l'équation du second degré

$$y^2 - pky - pl = 0,$$

dont les racines ne peuvent jamais devenir infinies tant que k et l restent finis.

Il n'y a donc aucune ligne, située à une distance finie, qui puisse rencontrer la parabole en deux points coïncidents et situés à l'infini. Le diamètre ($y = m$) qui rencontre la courbe à l'infini (142), la rencontre aussi en un point $\left(x = \frac{m^2}{p}\right)$, dont l'abscisse croît en même temps que m, mais ne peut devenir infinie tant que m reste fini.

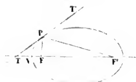
209. Le théorème suivant conduit à une conception plus claire de la forme de la parabole. *Si, dans une ellipse définie par un sommet* V *et le foyer correspondant* F (*fig.* 73), *on fait croître indéfiniment le grand axe, l'ellipse tend à se transformer en parabole.*

L'ellipse rapportée à son sommet a pour équation (194)

$$y^2 = \frac{2b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2.$$

Pour exprimer b en fonction de $VF = m$ (*fig.* 73) supposé

Fig. 73.



constant, nous avons

$$m = a - \sqrt{a^2 - b^2} \quad (182),$$

d'où

$$b^2 = 2am - m^2.$$

L'équation de l'ellipse prend alors la forme

$$y^2 = \left(4m - \frac{2m^2}{a}\right)x - \left(\frac{2m}{a} - \frac{m^2}{a^2}\right)x^2.$$

Lorsque a devient infini, elle se réduit a

$$y^2 = 4mx,$$

et représente une parabole.

Une parabole peut aussi être considérée comme une ellipse dont l'excentricité e est égale à l'unité, car on a

$$e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2};$$

et $\frac{b^2}{a^2}$, coefficient de x^2 dans l'équation de l'ellipse, s'annule lorsque a devient infini, les autres conditions étant d'ailleurs remplies.

On démontrerait de même qu'une hyperbole, définie par un sommet et le foyer correspondant, tend à se transformer en parabole lorsqu'on fait croître indéfiniment son axe transverse.

§ II. — Tangente et normale.

210. La corde qui joint deux points (x', y'), (x'', y'') de la courbe a pour équation (86)

$$(y - y')(y - y'') = y^2 - px,$$

ou

$$(y' + y'')y = px + y'y''.$$

En y faisant $x'' = x'$, $y' = y''$, on a pour l'équation de la tangente, au point (x', y'),

$$2y'y = p(x + x').$$

La sous-tangente TM (*fig.* 74) est divisée en deux parties égales par le sommet, c'est-à-dire qu'elle est double de l'abscisse, puisqu'en faisant $y = 0$ dans l'équation précédente, on trouve $x = -x'$.

Si l'on prend pour axes de coordonnées un diamètre et la tangente à son extrémité, l'équation de la parabole reste de la forme $y^2 = p'x$ (203); celles de la corde et de la tangente ne changent pas; la sous-tangente est donc encore, dans ce cas, double de l'abscisse.

Cette remarque permet de mener une tangente en un point P de la parabole (*fig.* 74); il suffit, en effet, pour la construire, de prendre VT = VM (PM étant l'ordonnée du point P), et de

joindre PT. On peut aussi, après avoir tracé cette tangente, trouver l'ordonnée PM′ du point P par rapport à un autre dia-

Fig. 74.



mètre T′M′ : il n'y a qu'à prendre V′M′ = V′T′, et à joindre PM′.

211. L'équation de la polaire d'un point (x', y') ayant la même forme que celle de la tangente (89) est

$$2y'y = p(x + x');$$

et en y faisant $y = 0$, on trouve $x = -x'$ pour le segment déterminé par cette polaire sur l'axe des x. Donc *le segment déterminé sur l'axe par les polaires de deux points est égal au segment déterminé sur cet axe par les perpendiculaires abaissées de ces points.*

212. L'équation de la normale ou de la perpendiculaire PN élevée en (x', y') P sur la tangente PT,

$$2yy' = p(x + x'),$$

est

$$p(y - y') + 2y'(x - x') = 0.$$

Fig. 75.



Le point N (*fig.* 75), où cette normale rencontre l'axe des x,

est donné par

$$x (= \mathrm{VN}) = x' + \frac{1}{2} p,$$

et, puisque $\mathrm{VM} = x'$, on a, pour la longueur MN de la *sous-normale* (181),

$$\mathrm{MN} = \frac{1}{2} p.$$

Donc, *dans la parabole, la sous-normale est constante et égale au demi-paramètre.*

La longueur de la normale PN a pour expression

$$\mathrm{PN} = \sqrt{\overline{\mathrm{PM}}^2 + \overline{\mathrm{MN}}^2} = \sqrt{y'^2 + \frac{1}{4} p^2} = \sqrt{p\left(x' + \frac{1}{4} p\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{pp'}.$$

§ III. — Diamètres.

213. Nous démontrerons ici de nouveau que, lorsqu'on prend pour axes un diamètre et la tangente à son extrémité, la parabole a pour équation $y^2 = p'x$, afin de trouver l'expression du paramètre p' en fonction du paramètre principal p.

Si l'on transporte parallèlement à eux-mêmes, au point (x', y') de la courbe, les axes rectangulaires auxquels correspond l'équation $y^2 = px$ de la parabole, on obtient

$$y^2 + 2yy' = px.$$

Conservons le même axe des x, mais prenons un nouvel axe des y faisant un angle θ avec lui, cette équation, en y remplaçant x et y respectivement par $x + y\cos\theta$, $y\sin\theta$ (n° 9), devient

$$y^2 \sin^2\theta + 2y'y\sin\theta = px + py\cos\theta,$$

et pour qu'elle se réduise à la forme $y^2 = px$, il faut qu'on ait

$$2y'\sin\theta = p\cos\theta, \quad \text{ou} \quad \tan\theta = \frac{p}{2y'};$$

cet angle θ est précisément celui que la tangente au point (x', y') fait avec l'axe des x, comme on peut le voir en se

reportant à son équation

$$2y'y = p(x + x').$$

L'équation de la parabole rapportée à un diamètre et à la tangente à l'extrémité est alors

$$y^2 = \frac{p}{\sin^2\theta}\,x = p'x.$$

La quantité p' est le *paramètre* correspondant au diamètre V'M', et, comme on a

$$p' = \frac{p}{\sin^2\theta},$$

le paramètre correspondant à un diamètre est inversement proportionnel au carré du sinus de l'angle que les ordonnées de ce diamètre font avec l'axe.

On peut, en partant de l'équation $\tang\theta = \frac{p}{2y'}$, exprimer le paramètre d'un diamètre en fonction des coordonnées de l'extrémité de ce diamètre, car on a

$$\sin\theta = \frac{p}{\sqrt{p^2 + 4y'^2}} = \sqrt{\frac{p}{p + 4x'}};$$

par suite,

$$p' = p + 4x.$$

§ IV. — Foyer et directrice.

214. On appelle *foyer* de la parabole le point situé sur l'axe de la courbe à une distance du sommet égale au quart du paramètre principal. Nous avons déjà entrevu (209) l'analogie de ce point avec le foyer dans l'ellipse; d'ailleurs une parabole peut être considérée comme une ellipse ayant un de ses foyers à l'infini. Afin de ne pas avoir d'expressions fractionnaires dans les numéros suivants, nous représenterons $\frac{1}{4}p$ par m.

Distance d'un point (x', y') de la parabole au foyer.

Le carré de la distance du foyer (m, o) à un point (x', y')

de la parabole a pour expression

$$(x'-m)^2+y'^2=x'^2-2mx'+m^2+4mx'=(x'+m)^2.$$

La distance de ce point au foyer est donc $x'+m$.

Nous pouvons ainsi exprimer plus simplement le résultat obtenu précédemment (213) : *le paramètre d'un diamètre est égal à quatre fois la distance de son extrémité au foyer.*

215. De même que dans l'ellipse et l'hyperbole, on appelle *directrice* la polaire du foyer de la parabole.

Puisque m est la distance du foyer au sommet de la parabole, sa polaire (211) est perpendiculaire à l'axe qu'elle rencontre en un point symétrique du foyer par rapport au sommet. La distance d'un point (x', y') de la courbe à la directrice est donc $x'+m$; par suite (214) *les points de la parabole sont à égale distance du foyer et de la directrice.*

Dans l'ellipse et l'hyperbole (186), les distances d'un point au foyer et à la directrice sont dans le rapport constant de e à 1. Il en est de même pour la parabole; mais alors $e=1$ (209).

Le procédé indiqué (202) pour décrire l'hyperbole d'un mouvement continu peut s'appliquer à la parabole; il suffit de prendre l'angle ABR égal à 90 degrés.

216. *Le point de contact (x', y') d'une tangente et le point où elle rencontre l'axe sont à égale distance du foyer.*

Car la distance du sommet au point où la tangente rencontre l'axe est égale à x' (210), et, par suite, la distance de ce point au foyer est $x'+m$.

217. *La tangente fait des angles égaux avec l'axe et avec le rayon vecteur mené du foyer au point de contact.*

Cela résulte de ce que la tangente, l'axe et le rayon vecteur forment un triangle isoscèle, ainsi que nous l'avons démontré au numéro précédent.

On peut aussi regarder ce théorème comme une simple extension de la propriété de l'ellipse (188) relative à l'égalité

des angles TPF, T'PF' (*fig.* 73, p. 273); car, si l'un des foyers F' s'éloigne à l'infini, la droite PF' devient parallèle à l'axe, et les angles PTF et TPF sont égaux.

La tangente menée à l'extrémité de l'ordonnée passant par le foyer fait avec l'axe un angle de 45 degrés.

218. *Trouver la distance du foyer à une tangente.*

La distance du point (m, o) à la tangente

$$yy' = 2m(x + x')$$

a pour valeur

$$\frac{2m(x' + m)}{\sqrt{y'^2 + 4m^2}} = \frac{2m(x' + m)}{\sqrt{4mx' + 4m^2}} = \sqrt{m(x' + m)}.$$

Donc (*fig.* 75, p. 275) FR (distance du foyer F à la tangente TP) est une moyenne proportionnelle à FV et FP.

Il résulte aussi de cette expression et du n° 212 que FR est la moitié de la normale, comme on aurait pu le voir géométriquement, en partant de l'égalité TF = FN.

219. *Exprimer la distance du foyer à une tangente en fonction de l'angle α que la direction de cette distance fait avec l'axe.*

Nous avons (*fig.* 75, p. 275)

$$\cos\alpha = \sin \text{FTR} = \sqrt{\frac{m}{x' + m}} \quad (213).$$

Donc (218)

$$\text{FR} = \sqrt{m(x' + m)} = \frac{m}{\cos\alpha}.$$

En prenant le foyer pour origine, l'équation de la tangente devient

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha + \frac{m}{\cos\alpha} = 0,$$

et permet d'exprimer la longueur de la perpendiculaire abaissée d'un autre point sur les tangentes en fonction de l'angle que cette perpendiculaire fait avec l'axe.

220. *Le lieu des projections du foyer sur les tangentes est une droite.*

Car en prenant le foyer pour pôle, on a immédiatement pour l'équation du lieu

$$\rho = \frac{m}{\cos\alpha}, \quad \rho\cos\alpha = m,$$

qui représente la tangente au sommet.

Réciproquement, si par un point F (*fig.* 75, p. 275), on mène un rayon vecteur FR à une droite VR, et une perpendiculaire RP au rayon vecteur, la ligne RP sera constamment tangente à la parabole ayant F pour foyer et V pour sommet.

On pourrait arriver à l'équation du lieu ci-dessus, en employant des coordonnées rectangulaires.

Nous verrons plus loin comment on peut résoudre d'une manière générale les questions de ce genre, questions dans lesquelles on omet une des conditions nécessaires pour déterminer une ligne, et où l'on demande de trouver son *enveloppe*, c'est-à-dire la courbe à laquelle cette ligne est constamment tangente.

221. *Trouver le lieu de l'intersection des tangentes qui se coupent à angle droit.*

L'équation d'une tangente étant (219)

$$x\cos^2\alpha + y\sin\alpha\cos\alpha + m = 0,$$

celle de la tangente qui lui est perpendiculaire s'en déduira en y remplaçant α par $90° + \alpha$, on a ainsi

$$x\sin^2\alpha + y\sin\alpha\cos\alpha + m = 0.$$

En ajoutant ces deux équations, l'angle α disparaît, et on trouve pour l'équation du lieu

$$x + 2m = 0.$$

C'est celle de la *directrice*, puisque la distance du foyer à cette droite est égale à $2m$.

222. *L'angle compris entre deux tangentes est la moitié de l'angle sous lequel est vue du foyer leur corde de contact.*

De ce que le triangle PFT (*fig.* 75, p. 275) est isoscèle, l'angle PTF que la tangente fait avec l'axe des x est la moitié de celui PFN que le rayon vecteur allant du foyer au point de contact fait avec ce même axe. D'ailleurs l'angle compris entre les deux tangentes est égal à la différence des angles que ces tangentes font avec l'axe des x; et l'angle sous lequel est vue la corde de contact est égal à la différence des angles que font avec l'axe les rayons vecteurs menés du foyer aux points de contact.

Le théorème du n° 221 peut être considéré comme un corollaire du précédent. Car si deux tangentes se coupent à angle droit, la corde de contact sera vue du foyer sous un angle de 180 degrés; d'après la définition même de la directrice, les deux tangentes devront alors se couper sur la directrice.

223. *La droite* FT *qui joint le foyer* F *au point d'intersection* T *de deux tangentes est la bissectrice de l'angle* PFP' *sous lequel on voit du foyer leur corde de contact* PP'.

Les équations des deux tangentes sont (219)

$$x\cos^2\alpha + y\sin\alpha\cos\alpha + m = 0,$$
$$x\cos^2\beta + y\sin\beta\cos\beta + m = 0;$$

et en les retranchant l'une de l'autre, on trouve, pour l'équation de la droite FT qui joint le foyer (c'est-à-dire l'origine) à leur point d'intersection,

$$x\sin(\alpha+\beta) - y\cos(\alpha+\beta) = 0.$$

Cette droite fait avec l'axe des x un angle $\alpha+\beta$; mais puisque α et β sont les angles que forment avec l'axe les perpendiculaires abaissées du foyer sur les tangentes, nous aurons (V étant le sommet) $VFP = 2\alpha$, $VFP' = 2\beta$. Donc la droite qui fait avec l'axe un angle $\alpha+\beta$ est la bissectrice de l'angle PFP'.

Ce théorème peut aussi se démontrer en calculant, comme

au n° 191, l'angle $\theta - \theta'$ sous lequel est vue du foyer la tangente menée à la parabole par un point (x, y). On trouve ainsi, pour déterminer cet angle, la relation

$$\cos(\theta - \theta') = \frac{x + m}{\rho},$$

qui, étant indépendante des coordonnées du point de contact, se rapporte à l'une et à l'autre des tangentes qu'on peut mener à la parabole par le point (x, y). (O. Brien, *Coordinate Geometry*, p. 156.)

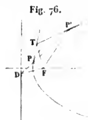
Corollaire I. — Si l'on considère le cas où l'angle PFP' est égal à 180 degrés, la corde de contact PP' passe par le foyer, les tangentes TP, TP' se coupent sur la directrice, et l'angle TFP est droit (192). Ce corollaire peut se démontrer directement en formant les équations de la polaire d'un point $(-m, y')$ de la directrice, et de la droite joignant ce point au foyer. Ces équations sont

$$y'y = 2m(x - m), \quad 2m(y - y') + y'(x + m) = 0;$$

les droites qu'elles représentent sont perpendiculaires entre elles.

Corollaire II. — Si une corde PP' coupe la directrice en D (*fig.* 76), la droite FD est la bissectrice extérieure de

Fig. 76.



l'angle PFP'. Pour la démonstration de ce corollaire, voir n° 192, Ex. II.

Corollaire III. — Le segment PQ (*fig.* 77) déterminé sur une tangente variable par deux tangentes fixes Rp, Rq est vu du foyer sous un angle QFP égal au supplément de l'angle PQR

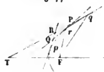
formé par les tangentes fixes; car l'angle QRT est la moitié de l'angle pFq (222), et l'angle PFQ est aussi la moitié de pFq (223) : donc

$$\widehat{PFQ} = \widehat{QRT} = 180^\circ - \widehat{PRQ}.$$

Corollaire IV. — Le cercle circonscrit au triangle formé par trois tangentes à une parabole passe par le foyer.

Le cercle passant par P, Q, R (*fig.* 77) passe aussi par F,

Fig. 77.



puisque l'angle PFQ est supplémentaire de l'angle PRQ.

224. *Équation polaire de la parabole, le foyer étant pris pour pôle.*

Fig. 78.



Le rayon vecteur $\rho\,(= FP)$ (*fig.* 78) a pour valeur (214)

$$\rho = x + m = VM + m = FM + 2m = \rho\cos\theta + 2m,$$

θ étant l'angle que fait avec l'axe le rayon vecteur allant au point $P(x, y)$. On tire de là

$$\rho = \frac{2m}{1 - \cos\theta},$$

équation qui peut du reste se déduire de celle du n° 193, en

y faisant $e = 1$ (209). Les propriétés étudiées dans les Exercices du nº 193 subsistent donc pour la parabole.

L'équation precédente suppose que θ est mesuré par rapport à la direction FM; lorsqu'on mesure cet angle par rapport à la direction opposée FV, elle devient

$$\rho = \frac{2m}{1+\cos\theta},$$

ou bien

$$\rho \cos^2 \tfrac{1}{2}\theta = m,$$

ou encore

$$\rho^{\frac{1}{2}} \cos \tfrac{1}{2}\theta = m^{\frac{1}{2}},$$

et rentre ainsi dans l'équation générale

$$\rho^n \cos n\theta = a^n,$$

dont nous étudierons ailleurs quelques propriétés.



CHAPITRE XIII.

THÉORÈMES ET PROBLÈMES SUR LES SECTIONS CONIQUES.

§ I. — Problèmes divers.

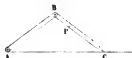
225. La méthode à employer pour résoudre analytiquement les problèmes relatifs aux sections coniques ne diffère pas de celle que nous avons suivie dans le cas du cercle et de la ligne droite, et ne saurait par suite présenter aucune difficulté au lecteur qui aura étudié avec soin les solutions données aux Chapitres III et VII. Nous nous bornerons donc à l'examen de quelques-uns des nombreux problèmes conduisant à des équations du second degré, et nous réserverons la fin de ce Chapitre à l'exposition de certaines propriétés des sections coniques, qui n'ont pu trouver place au Chapitre précédent.

EXERCICES.

I. Par un point fixe P (*fig.* 24, p. 57) situé dans un angle donné LOK, on mène une droite LK sur laquelle on prend un point Q tel, que PL = QK; trouver le lieu du point Q.

II. Deux règles égales AB et BC (*fig.* 79) sont reliées par un pivot

Fig. 79.



en B : l'une des extrémités A est fixe, tandis que l'autre C glisse sur la droite AC; trouver le lieu décrit par un point P pris sur BC.

III. Dans un triangle, on donne la base et le produit des tangentes des moitiés des angles à la base; trouver le lieu du sommet.

XII. Trouver le lieu des pôles par rapport à une conique A des tangentes à une autre conique B.

Soit (α, β) un point du lieu; $\lambda x + \mu y + \nu$ sa polaire par rapport à la conique A; λ, μ et ν sont alors (89) des fonctions du premier degré en α et β. Mais (151) la condition pour que $\lambda x + \mu y + \nu$ touche la conique B est du second degré en λ, μ, ν; donc le lieu cherché est une conique.

XIII. Dans une conique à centre, trouver le lieu de l'intersection de la perpendiculaire abaissée du foyer sur une tangente, avec le rayon vecteur allant du centre au point de contact.

Réponse. La directrice correspondante.

XIV. Trouver le lieu de l'intersection de la perpendiculaire abaissée du centre sur une tangente, avec le rayon vecteur mené du foyer au point de contact.

Réponse. Un cercle.

XV. Trouver le lieu de l'intersection des tangentes menées aux extrémités de deux diamètres conjugués.

Réponse. $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2.$$

Ce lieu se trouve facilement en élevant au carré et ajoutant les équations des deux tangentes, eu égard aux expressions du n° 172.

XVI. Partager un arc de cercle en trois parties égales.

Réponse. Les points de division sont sur une hyperbole (49, Ex. VII).

XVII. Dans un trapèze, on donne : une des bases parallèles en grandeur et en position, l'autre base en grandeur seulement et la somme des deux autres côtés; trouver le lieu de l'intersection des diagonales.

XVIII. Un des sommets d'un parallélogramme circonscrit à une ellipse glisse sur une directrice; prouver que le sommet opposé décrit l'autre directrice, et que les deux autres sommets sont sur un cercle ayant le grand axe de l'ellipse pour diamètre.

226. Les problèmes suivants se rapportent aux propriétés focales des sections coniques.

I. La distance d'un point d'une conique au foyer est égale à l'ordonnée de ce point prolongée jusqu'à sa rencontre avec la tangente menée par l'extrémité de l'ordonnée du foyer.

II. Par un foyer on mène une droite faisant un angle donné avec une tangente quelconque; trouver le lieu de l'intersection de cette droite avec la tangente.

III. Trouver le lieu des pôles d'une droite fixe par rapport à une série de coniques concentriques et homofocales.

Les coordonnées x et y du pôle de la droite

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$$

par rapport à la conique $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ sont données par les équations $mx = a^2$, $ny = b^2$ (169); les coniques étant homofocales, on connaît $a^2 - b^2 = c^2$: donc le lieu du pôle a pour équation

$$mx - ny = c^2,$$

qui est celle d'une droite perpendiculaire à la droite donnée.

Lorsque la droite donnée touche une des coniques, son pôle, par rapport à cette conique, est le point de contact; on a alors le théorème suivant : *Les tangentes menées à une conique* S *par les points* A *et* B, *où elle rencontre une tangente à une conique homofocale* S', *se coupent sur la normale correspondante à cette tangente* AB.

IV. Trouver le lieu des points de contact des tangentes menées à un système de coniques homofocales par un point du grand axe.

Réponse. Un cercle.

V. Les droites joignant chaque foyer à la projection de l'autre foyer sur une tangente se coupent sur la normale correspondante qu'elles divisent en deux parties égales.

VI. Démontrer qu'en prenant le foyer pour pôle, la corde passant par les points, dont les coordonnées angulaires sont $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$, a pour équation polaire

$$\frac{p}{2\rho} = e\cos\theta + \text{séc}\,\beta\cos(\theta - \alpha).$$

Cette équation, due à M. Trost (*), se déduit facilement de l'Ex. III du n° 44.

VII. La tangente au point dont la coordonnée angulaire est α a pour

(*) *Cambridge and Dublin, Math. Journal*, t. I, p. 68; — Walton, *Problèmes*, p. 375.

équation

$$\frac{p}{2\rho} = e\cos\theta + \cos(\theta - \alpha).$$

Cette relation est due à M. Davies (*).

VIII. Si, dans une conique ayant F pour foyer, on mène une corde PP' par un point fixe O, le produit

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\,\mathrm{PFO}.\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\,\mathrm{P'FO}$$

est constant.

Nous pourrions déduire cette propriété de l'équation de l'Ex. VI (**), mais nous préférerons en indiquer ici une démonstration géométrique donnée par M. Mac Cullagh, à qui, si nous ne nous trompons, est dû le théorème. Supposons que le point O soit pris sur PP' (*fig.* 76), et soit e' le rapport de FO à la distance du point O à la directrice. Puisque les distances de P et de O à la directrice sont proportionnelles à PD et OD, on a

$$\frac{\mathrm{FP}}{\mathrm{PD}} : \frac{\mathrm{FO}}{\mathrm{OD}} = \frac{e}{e'},$$

ou

$$\frac{\sin \mathrm{PDF}}{\sin \mathrm{PFD}} : \frac{\sin \mathrm{ODF}}{\sin \mathrm{OFD}} = \frac{e}{e'},$$

par suite (192)

$$\frac{\cos \mathrm{OFT}}{\cos \mathrm{PFT}} = \frac{e}{e'},$$

et comme (191) $\widehat{\mathrm{PFT}}$ et $\widehat{\mathrm{OFT}}$ sont respectivement la demi-somme et la demi-différence de $\widehat{\mathrm{PFO}}$ et $\widehat{\mathrm{P'FO}}$, il vient

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\,\mathrm{PFO}.\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\,\mathrm{P'FO} = \frac{e - e'}{e + e'};$$

et ce produit reste encore constant lorsque le point O, au lieu d'être fixe, se déplace en restant sur une conique ayant même foyer et même directrice que la conique donnée.

IX. Exprimer la condition pour que la corde qui joint deux points (x', y'), (x'', y'') de la courbe passe par un foyer.

Parmi les différentes expressions équivalentes servant à formuler cette condition, les plus usitées sont celles qu'on obtient en exprimant que

(*) *Philosophical Magazine*, 1842, p. 192; — WALTON, *Exemples*, p. 368.

(**) WALTON, *Exemples*, p. 377.

$\theta'' = \theta' + 180°$, θ' et θ'' étant les angles que font avec l'axe les droites qui joignent les points (x', y'), (x'', y'') au foyer. Les relations $\sin\theta' = -\sin\theta''$, $\cos\theta' = -\cos\theta''$ donnent ainsi respectivement

$$\frac{y'}{a - ex'} + \frac{y''}{a - ex''} = 0, \quad a(y' + y'') = e(x'y'' + y'x''),$$

$$\frac{x' - c}{a - ex'} + \frac{x'' - c}{a - ex''} = 0, \quad 2ex'x'' - (a + ce)(x' + x'') + 2ac = 0.$$

X. Si par les extrémités d'une corde focale (c'est-à-dire qui passe par le foyer) on mène des normales à la conique, la parallèle au grand axe menée par l'intersection de ces normales divise la corde en deux parties égales (*).

Puisque chaque normale est la bissectrice de l'angle formé par les rayons vecteurs issus du foyer, l'intersection de ces normales est le centre du cercle inscrit dans le triangle ayant pour côtés la corde focale et les droites qui joignent les extrémités de cette corde à l'autre foyer. Si a, b et c sont les longueurs des côtés d'un triangle ayant pour sommets (x', y'), (x'', y''), (x''', y'''), les coordonnées x et y du centre du cercle inscrit dans ce triangle seront (n° 7, Ex. VI)

$$x = \frac{ax' + bx'' + cx'''}{a + b + c}, \quad y = \frac{ay' + by'' + cy'''}{a + b + c}.$$

Dans le cas actuel, les coordonnées des sommets étant x', y', x'', y'', $-c$, 0, les longueurs des côtés opposés sont

$$a + ex'', \quad a + ex', \quad 2a - ex' - ex'';$$

on a donc

$$y = \frac{(a + ex')y'' + (a + ex'')y'}{4a},$$

expression qui, en tenant compte de la première équation de l'Exercice précédent, se réduit à

$$y = \frac{1}{2}(y' + y'');$$

ce qui démontre le théorème.

On trouverait de même

$$x = \frac{(a + ex'')x' + (a + ex')x'' - (2a - ex' - ex'')c}{4a},$$

(*) Cette démonstration est due à M. Larrose (*Nouvelles Annales de* TERQUEM, XIX, 85).

valeur qui se réduit à

$$x = \frac{(a+ec)(x'+x'') - 2ac}{2a},$$

eu égard à la deuxième équation de l'Exercice précédent.

On trouverait des expressions analogues pour les coordonnées de l'intersection des tangentes menées par les extrémités de la corde focale, puisque cette intersection est le centre d'un cercle exinscrit au triangle considéré plus haut : la droite qui joint l'intersection des normales à celle des tangentes, étant la bissectrice de l'angle du triangle opposé à la corde focale, passe par l'autre foyer.

XI. Trouver le lieu des intersections (x, y) des normales menées aux extrémités d'une corde focale.

Soient α et β les coordonnées du milieu de cette corde; on aura, d'après l'Exercice précédent :

$$\alpha = \tfrac{1}{2}(x'+x'') = \frac{a^2(x+c)}{a^2+c^2}, \quad \beta = \tfrac{1}{2}(y'+y'') = y.$$

On pourra donc facilement déduire le lieu du point (x, y) de celui de (α, β) dont l'équation polaire

$$\rho = \tfrac{1}{2}(\rho' - \rho'') = \frac{-b^2}{a} \cdot \frac{e\cos\theta}{1 - e^2\cos^2\theta}$$

devient, en prenant des coordonnées rectangulaires ayant leur origine au centre,

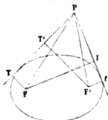
$$b^2\alpha^2 + a^2\beta^2 = -b^2c\alpha;$$

l'équation du lieu cherché est donc

$$a^2b^2(x+c)^2 + (a^2+c^2)^2y^2 = b^2c(a^2+c^2)(x+c).$$

XII. Si θ est l'angle compris entre les tangentes PT, Pt menées à une

Fig. 80.



ellipse par un point P (*fig* 80), et ρ, ρ' les distances de ce point aux

foyers F et F′, on a la relation

$$\cos\theta = \frac{\rho^2 + \rho'^2 - 4a^2}{2\rho\rho'}.$$

En effet (189)

$$\sin \mathrm{TPF}.\sin t\mathrm{PF} = \frac{\mathrm{FT}.\mathrm{F'T'}}{\mathrm{PF}.\mathrm{PF'}} = \frac{b^2}{\rho\rho'};$$

mais

$$\cos \mathrm{FPF'} - \cos \mathrm{TP}t = 2\sin \mathrm{TPF}.\sin t\mathrm{PF},$$

d'où

$$2\rho\rho'\cos \mathrm{FPF'} = \rho^2 - \rho'^2 - 4c^2.$$

XIII. Si par un point O on mène deux droites passant par les foyers d'une ellipse (ou tangentes à une conique homofocale), et coupant la courbe aux points R, R′, S, S′, on a la relation

$$\frac{1}{\mathrm{OR}} - \frac{1}{\mathrm{OR'}} = \frac{1}{\mathrm{OS}} - \frac{1}{\mathrm{OS'}}.$$ (M. M. Roberts.)

En se reportant à l'équation du second degré qui détermine (136) les rayons vecteurs menés par un point à une courbe du second degré, on reconnait que la différence des réciproques des racines est la même pour les deux directions θ qui correspondent à une même valeur de l'expression

$$(ac - g^2)\cos^2\theta + 2(ch - gf)\cos\theta\sin\theta + (bc - f^2)\sin^2\theta.$$

Cette quantité qu'on peut écrire

$$\mathrm{A}\cos^2\theta + 2\mathrm{H}\cos\theta\sin\theta + \mathrm{B}\sin^2\theta$$

ne change pas si l'on prend pour θ l'une ou l'autre des valeurs correspondant aux directions des droites également inclinées sur les deux droites représentées par

$$\mathrm{A}x^2 + 2\mathrm{H}xy + \mathrm{B}y^2 = 0.$$

Ces deux droites sont les tangentes menées à la courbe par le point O, et on sait qu'elles sont également inclinées sur les droites joignant le point O au foyer, ou tangentes à une conique homofocale (189).

227. Les problèmes suivants sont relatifs à la parabole; il est facile de distinguer ceux qui, dans le numéro précédent, peuvent aussi se rapporter à cette courbe.

EXERCICES.

I. Trouver les coordonnées x et y de l'intersection des deux tangentes menées par (x', y'), (x'', y'') à la parabole $y^2 = px$.

RÉPONSE. $y = \frac{y' + y''}{2}$, $x = \frac{y'y''}{p}$.

II. Trouver le lieu de l'intersection de la perpendiculaire abaissée du foyer sur une tangente avec le rayon vecteur mené du sommet au point de contact.

III. Les trois hauteurs du triangle formé par trois tangentes se coupent sur la directrice (*).

L'équation d'une de ces hauteurs est (32)

$$\frac{y'y''' - y'y''}{p}\left(x - \frac{y''y'''}{p}\right) + \frac{y''' - y''}{2}\left(y - \frac{y'' + y'''}{2}\right) = 0,$$

ou, en divisant par $y''' - y''$,

$$y'\left(x + \frac{p}{4}\right) - \frac{y'y''y'''}{p} + \frac{py}{2} - \frac{p(y' + y'' + y''')}{4} = 0.$$

La symétrie de cette équation montre que les trois hauteurs coupent la directrice à une distance de l'axe des x :

$$y = \frac{2y'y''y'''}{p^2} + \frac{y' + y'' + y'''}{2}.$$

IV. L'aire du triangle formé par trois tangentes est la moitié de celle du triangle qui a pour sommets les points de contact (**).

En substituant les coordonnées des sommets de ces deux triangles dans l'expression du n° 36, on trouve, pour l'aire du deuxième triangle,

$$\frac{1}{2p}(y' - y'')(y'' - y''')(y''' - y'),$$

et la moitié seulement de cette quantité pour l'aire du premier.

V. Trouver la valeur du rayon du cercle circonscrit à un triangle inscrit dans une parabole.

(*) STEINER, *Annales de Gergonne*, t. XIX, p. 59; — WALTON, p. 119.

(**) GREGORI, *Cambridge Journal*, t. II, p. 16; — WALTON, p. 137. *Voir aussi : Leçons d'Algèbre supérieure*, traduction française, p. 18, Ex. XII.

Le rayon R du cercle circonscrit au triangle ayant d, e, f pour côtés et Σ pour aire, a pour valeur $\frac{def}{4\Sigma}$; d'ailleurs si d est la longueur de la corde qui joint les points (x'', y''), (x''', y'''), et θ' l'angle que cette corde fait avec l'axe, on a évidemment $d \sin\theta' = y'' - y'''$. En partant des valeurs obtenues à l'Exercice précédent, on trouve

$$R = \frac{p}{2 \sin\theta' \sin\theta'' \sin\theta'''}.$$

On peut exprimer aussi ce rayon en fonction des cordes focales c', c'', c''' parallèles aux côtés du triangle, car la longueur de la corde focale c, faisant un angle θ avec l'axe est égale à $\frac{p}{\sin^2\theta}$ (193, Ex. II). On a ainsi

$$R^2 = \frac{c'c''c'''}{4p}.$$

Il résulte du n° **212** que c', c'', c''' sont les paramètres des diamètres correspondant aux cordes qui forment le triangle.

VI. Trouver la valeur du rayon R du cercle circonscrit au triangle formé par trois tangentes à une parabole, en fonction des angles θ', θ'', θ''' que ces tangentes font avec l'axe.

Réponse. $$R = \frac{p}{8 \sin\theta' \sin\theta'' \sin\theta'''}.$$

On a aussi

$$R = \frac{p'p''p'''}{64p},$$

p', p'', p''' étant les paramètres des diamètres qui passent par les points de contact (**212**).

VII. Trouver l'angle φ compris entre les deux tangentes menées par le point (x', y') à la parabole $y^2 = 4mx$.

L'équation des tangentes menées par (x', y') est (92)

$$(y'^2 - 4mx')(y^2 - 4mx) = [yy' - 2m(x + x')]^2,$$

et celle des parallèles menées à ces tangentes par l'origine

$$x'y^2 - y'xy + mx^2 = 0.$$

L'angle φ compris entre ces deux droites est défini par (74)

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\sqrt{y'^2 - 4mx'}}{x' + m}.$$

VIII. Trouver le lieu du sommet des angles φ dont les côtés sont tangents à la parabole.

Réponse. C'est l'hyperbole $y^2 - 4mx = (x+m)^2 \tang^2\varphi$. En mettant son équation sous la forme $y^2 + (x-m)^2 = (x+m)^2 \operatorname{séc}^2\varphi$, on voit que l'hyperbole (186) a même foyer et même directrice que la parabole, et que son excentricité est égale à sécφ.

IX. Trouver le lieu des projections des foyers sur la normale.

La distance du foyer (m, o) à la normale

$$2m(y-y') + y'(x-x') = o$$

a pour valeur

$$\frac{y'(x'+m)}{\sqrt{y'^2+4m^2}} = \sqrt{x'(x'+m)}.$$

Si θ est l'angle que la direction de cette distance fait avec l'axe (212), on a

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{m}{x'+m}}, \quad \cos\theta = \sqrt{\frac{x'}{x'+m}};$$

l'équation polaire du lieu est donc

$$\rho = \frac{m\cos\theta}{\sin^2\theta},$$

ce qui revient à $y^2 = mx$.

X. Trouver les coordonnées x et y de l'intersection des normales menées aux points (x', y'), (x'', y'') de la courbe.

Rép. $x = 2m + \frac{y'^2 + y'y'' + y''^2}{4m}, \quad y = -\frac{y'y''(y'+y'')}{8m^2}.$

Si α et β sont les coordonnées de l'intersection des tangentes correspondantes (Ex. I), on a aussi

$$x = 2m + \frac{\beta^2}{m} - \alpha, \quad y = -\frac{\alpha\beta}{m}.$$

XI. Trouver les points de la courbe dont les normales passent par un point donné (x', y').

En éliminant x entre l'équation de la normale et celle de la courbe, on trouve, pour déterminer les ordonnées de ces points,

$$2y^3 + (p^2 - 2px')y = p^2y'.$$

Les trois racines de cette équation sont liées par la relation

$$y_1 + y_2 + y_3 = o;$$

par conséquent la corde déterminée par deux de ces points fait avec l'axe le même angle que la droite qui joint le troisième au sommet.

XII. Trouver le lieu de l'intersection des normales menées aux extrémités des cordes passant par un point fixe (x', y').

Soient α, β les coordonnées du pôle de la corde; on a la relation $\beta y' = 2m(x' + \alpha)$, et en éliminant successivement α et β entre cette équation et celle de l'Ex. X, on trouve, pour le lieu cherché, l'équation

$$\begin{aligned} &2[2m(y - y') + y'(x - x')]^2 \\ &\quad = (4mx' - y'^2)(y'y + 2x'x - 4mx' - 2x'^2), \end{aligned}$$

qui représente une parabole dont l'axe est perpendiculaire à la polaire du point donné. Si les cordes étaient parallèles à une droite fixe, le lieu se réduirait à une ligne droite, comme cela est du reste évident d'après l'Ex. XI.

XIII. Trouver le lieu de l'intersection des normales qui se coupent à angle droit.

On a, dans ce cas,

$$\alpha = -m, \quad x = 3m + \frac{\beta^2}{m}, \quad y = \beta, \quad y^2 = m(x - 3m).$$

XIV. Trouver le paramètre d'une parabole connaissant les longueurs a et b de deux tangentes, et l'angle ω qu'elles font entre elles.

Menons le diamètre correspondant à la corde de contact; le paramètre p' de ce diamètre est $p' = \frac{y^2}{x}$, et le paramètre principal est

$$p = \frac{y^2 \sin^2\theta}{x} = \frac{\varpi^2 y^2}{4x^2},$$

ϖ étant la distance de l'intersection des tangentes à la corde de contact. Mais

$$2\varpi y = ab \sin\omega \quad \text{et} \quad 16x^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\omega,$$

donc

$$p = \frac{4a^2 b^2 \sin^2\omega}{(a^2 + b^2 + 2ab\cos\omega)^{\frac{3}{2}}} \qquad (\textit{voir } n^o \ 207).$$

XV. Démontrer, en partant de l'équation du cercle circonscrit au triangle formé par trois tangentes, que ce cercle passe par le foyer.

Le cercle circonscrit à un triangle a pour équation (124)

$$\beta\gamma \sin A + \gamma\alpha \sin B + \alpha\beta \sin C = 0.$$

et le terme absolu, qu'on trouve en remplaçant α, β,... par leurs va-

leurs développées $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p\ldots$, est

$$p'p''\sin(\beta-\gamma) + p''p\sin(\gamma-\alpha) + pp'\sin(\alpha-\beta).$$

Mais si α représente une tangente à une parabole ayant le foyer pour origine, on a (219) $p = \frac{m}{\cos\alpha}$; le terme absolu devient alors

$$\frac{m^2}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}[\sin(\beta-\gamma)\cos\alpha + \sin(\gamma-\alpha)\cos\beta + \sin(\alpha-\beta)\cos\gamma],$$

et il est identiquement nul.

XVI. Trouver le lieu de l'intersection des tangentes menées à la parabole, étant donnés : 1° le produit des sinus ; 2° le produit des tangentes ; 3° la somme, ou 4° la différence des cotangentes des angles que ces tangentes font avec l'axe.

Réponse. 1° un cercle; 2° une droite; 3° une droite; 4° une parabole.

228. Indiquons encore quelques problèmes pour terminer ce paragraphe.

EXERCICES.

I. L'hyperbole équilatère circonscrite à un triangle passe par l'intersection des hauteurs de ce triangle (*).

Prenons pour axes un côté du triangle et la hauteur correspondante. On sait quo l'équation de la conique passant par quatre points (151, Ex. I)

$$\mu\mu'x^2 + 2hxy + \lambda\lambda'y^2 - \mu\mu'(\lambda+\lambda')x - \lambda\lambda'(\mu+\mu')y + \lambda\lambda'\mu\mu' = 0$$

représente une hyperbole équilatère (les axes étant rectangulaires) lorsque $\lambda\lambda' = -\mu\mu'$ (174). Dans le cas actuel, trois points λ, λ' et μ étant donnés, cette condition permet de déterminer le quatrième μ'; l'hyperbole rencontro donc la hauteur au point fixe $y = -\frac{\lambda\lambda'}{\mu}$, qui est l'intersection des trois hauteurs du triangle (n° 32, Ex. VII).

(*) Brianchon et Poncelet; — Gergonne, *Annales*, t. XI, p. 205; — Walton, p. 283.

II. Quel est le lieu des centres des hyperboles équilatères passant par trois points donnés.

Réponse. Le cercle passant par les milieux des côtés du triangle que forment les trois points (*voir* n° 151. Ex. III).

III. Trouver la condition pour que, par rapport à une conique donnée par l'équation générale, le pôle de l'axe des x soit sur l'axe des y, et *vice versâ*.

Réponse. $hc = fg.$

IV. Trouver la condition pour que, dans une conique définie par l'équation générale (133), l'une des asymptotes passe par l'origine.

Réponse. $af^2 - 2fgh + bg^2 = 0.$

V. Le cercle circonscrit au triangle autopolaire par rapport à une hyperbole équilatère (99) passe par le centre de l'hyperbole (*).

La condition trouvée dans l'Exercice précédent étant remplie, l'équation du cercle passant par l'origine et par le pôle de chaque axe sera

$$h(x^2 + 2xy\cos\omega + y^2) + fx + gy = 0,$$

ou

$$x(hx + by + f) + y(ax + hy + g) - (a + b - 2h\cos\omega)xy = 0,$$

équation à laquelle satisferont évidemment les coordonnées du centre pourvu que l'on ait

$$a + b = 2h\cos\omega,$$

c'est-à-dire pourvu que la courbe directrice soit une hyperbole équilatère (74, 174).

Ce théorème n'est qu'un cas particulier du suivant, que nous démontrerons plus loin.

Lorsque deux triangles sont autopolaires par rapport à une conique, leurs six sommets sont situés sur une même conique (375, Ex. I).

VI. Le cercle passant par le centre d'une hyperbole équilatère et par deux points quelconques passe aussi par l'intersection des parallèles menées par chacun de ces points à la polaire de l'autre.

VII. Trouver le lieu des intersections des tangentes interceptant sur une droite fixe un segment de longueur constante.

Prenons cette droite pour axe des x. Les racines de l'équation du se-

(*) Brianchon et Poncelet; — Gergonne, *Annales*, t. XI, p. 210; — Walton, p. 304.

cond degré, obtenue en faisant $y = o$ dans l'équation des tangentes menées par (x', y') à une conique quelconque (92), représentent les segments (comptés à partir de l'origine) que déterminent ces tangentes sur l'axe des x. En exprimant que la différence de ces racines est constante, on trouve l'équation du lieu, qui est en général du quatrième degré.

Dans le cas où la droite fixe est tangente à la conique, on a $g^2 = ac$, l'équation du lieu devient divisible par y^2, et se réduit au deuxième degré.

On trouverait de même le lieu des intersections des tangentes qui déterminent sur une droite fixe et à partir d'un point donné, des segments dont la somme, le produit,..., est constant.

VIII. Trouver le lieu des centres des coniques inscrites dans un quadrilatère.

Prenons des axes quelconques, et soit

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = o$$

l'équation d'un des côtés du quadrilatère. Désignons par x et y les coordonnées du centre d'une des coniques, et par θ l'angle que forme son grand axe avec l'axe des x. L'angle compris entre ce grand axe et la perpendiculaire au côté du quadrilatère est $\alpha - \theta$, et l'on a, d'après le n° 178,

$$(x\cos\alpha + y\sin\alpha - p)^2 = a^2\cos^2(\alpha - \theta) + b^2\sin^2(\alpha - \theta),$$

ou, en développant et remplaçant, pour abréger (53), $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p$ par α,

$$\alpha^2 = (a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)\cos^2\alpha + 2(a^2 - b^2)\cos\theta\sin\theta\cos\alpha\sin\alpha$$
$$+ (a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)\sin^2\alpha.$$

On obtient ainsi quatre équations, entre lesquelles on peut éliminer a^2, b^2, θ ou plutôt les trois quantités $a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta$, $(a^2 - b^2)\cos\theta\sin\theta$ et $a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta$. Le lieu est donc donné par l'équation

$$\begin{vmatrix} \alpha^2 & \cos^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha \\ \beta^2 & \cos^2\beta & \cos\beta\sin\beta & \sin^2\beta \\ \gamma^2 & \cos^2\gamma & \cos\gamma\sin\gamma & \sin^2\gamma \\ \delta^2 & \cos^2\delta & \cos\delta\sin\delta & \sin^2\delta \end{vmatrix} = o,$$

c'est-à-dire par

$$A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + D\delta^2 = o,$$

A, B, C et D étant des constantes. Cette équation, du deuxième degré en apparence, est en réalité du premier. En effet, si, avant de développer

le déterminant, on y remplace les expressions α, β, γ, δ par leurs équivalentes en x et y, on voit que les termes en x^2, qui appartiennent aux éléments de la première colonne, ont respectivement $\cos^2\alpha$, $\cos^2\beta$, $\cos^2\gamma$, $\cos^2\delta$, c'est-à-dire les éléments d'une autre colonne, pour coefficients; et que, par suite, le terme en x^2 disparaît dans le développement. Il en est de même des termes en y^2 et en xy. Le lieu cherché est donc une ligne droite, et on peut la construire géométriquement, en observant que la polaire d'un point par rapport à une des coniques a pour équation

$$A\alpha\alpha' + B\beta\beta' + C\gamma\gamma' + D\delta\delta' = 0,$$

et que, par suite, la polaire de (α, β) passe par (γ, δ). D'ailleurs, quand une conique se réduit à une droite par l'évanouissement des termes du deuxième degré de son équation, la polaire d'un point est parallèle à cette droite, qui divise alors en deux parties égales la distance du point à sa polaire. Le lieu cherché partage donc en deux parties égales les droites menées par les points (α, β) et (γ, δ), (α, γ) et (γ, δ), (α, δ) et (β, γ), c'est-à-dire les diagonales du quadrilatère $\alpha\beta\gamma\delta$.

Réciproquement, si l'on se donne, sous une forme quelconque, les équations $\alpha = 0, \ldots$ de quatre droites, l'équation de la droite qui passe par les milieux des diagonales du quadrilatère qu'elles forment peut s'obtenir en déterminant les constantes de la relation

$$A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + D\delta^2 = 0,$$

de telle sorte que cette équation représente une ligne droite.

La solution que nous venons de donner a été indiquée par M. Serret (*).

IX. Trouver le lieu des centres des coniques inscrites dans un triangle, et dont les axes a et b vérifient la relation $a^2 + b^2 = k^2$.

Cette relation peut se mettre sous la forme

$$k^2 = (a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta) + (a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta),$$

et comme la première condition du problème fournit trois équations analogues à celles de l'Exercice précédent, on aura, pour le lieu cherché, l'équation

$$\begin{vmatrix} \alpha^2 & \cos^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha \\ \beta^2 & \cos^2\beta & \cos\beta\sin\beta & \sin^2\beta \\ \gamma^2 & \cos^2\gamma & \cos\gamma\sin\gamma & \sin^2\gamma \\ k^2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. IV, p. 145.

qui, pouvant se mettre sous la forme

$$A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + D = o,$$

représente un cercle. On peut voir en effet, en suivant la marche indiquée ci-dessus, que, dans le développement, le terme en xy disparaît et que les termes en x^2 et y^2 ont même coefficient. Mais quand un cercle a pour équation $A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 = o$, son centre est le point de concours des hauteurs du triangle $\alpha\beta\gamma$; le lieu cherché, dont l'équation ne diffère de la précédente que par une constante, est donc (81) un cercle ayant pour centre le point de concours des hauteurs du triangle circonscrit aux coniques.

X. Trouver le lieu des foyers des coniques circonscrites à un quadrilatère.

La distance ρ d'un des sommets (x', y') du quadrilatère au foyer a pour expression (186)

$$\rho = Ax' + By' + C.$$

En éliminant A, B et C entre cette équation et les trois autres fournies par les autres sommets, on a

$$\begin{vmatrix} \rho & x' & y' & 1 \\ \rho' & x'' & y'' & 1 \\ \rho'' & x''' & y''' & 1 \\ \rho''' & x^{\text{iv}} & y^{\text{iv}} & 1 \end{vmatrix} = o,$$

ou en développant

$$l\rho + m\rho' + n\rho'' + p\rho''' = o.$$

Si l'on se reporte au n° 36 pour trouver la signification géométrique des coefficients l, m, n et p, on voit que cette équation n'est que l'expression du théorème de Möbius

$$OA.BCD + OC.ABD = OB.ACD + OD.ABC,$$

dans laquelle O est le foyer, et BCD l'aire du triangle formé par les trois points B.C.D. (Comparer cette expression à la condition énoncée au n° 94.)

On voit ainsi que $l + m + n + p = o$. En substituant à $\rho, \rho', \ldots$ leurs valeurs $\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}, \ldots$, et faisant disparaître les radicaux, on trouve l'équation du lieu, qui est du sixième degré.

Lorsque les sommets du quadrilatère sont sur un cercle, le lieu se décompose en deux autres, qui sont respectivement du troisième degré, ainsi que l'ont fait voir MM. Sylvester et Burnside.

On a en effet, d'après le théorème de Feuerbach (94),

$$l\rho^2 + m\rho'^2 + n\rho''^2 + p\rho'''^2 = o;$$

et, par suite,

$$(l+m)(l\rho^2+m\rho'^2) = (n+p)(n\rho''^2+p\rho'''^2),$$

$$(l\rho+m\rho')^2 = (n\rho''+p\rho''')^2,$$

d'où

$$lm(\rho-\rho')^2 = np(\rho''+\rho''')^2,$$

équation qui se décompose évidemment en deux facteurs.

§ II. — De l'angle excentrique (*).

229. L'emploi d'une *seule variable* au lieu de *deux coordonnées* x' et y', pour définir la portion d'un point sur une courbe est toujours avantageux lorsqu'il est possible; aussi, dans la discussion de certaines propriétés de l'ellipse, substituerons-nous aux coordonnées courantes x' et y' les expressions

$$x' = a\cos\varphi, \quad y' = b\sin\varphi$$

analogues à celles que nous avons employées dans le cas du cercle (**102**). Ces substitutions sont évidemment compatibles avec l'équation

$$\left(\frac{x'}{a}\right)^2 + \left(\frac{y'}{b}\right)^2 = 1.$$

La signification géométrique de l'angle φ peut se déduire de la construction suivante :

Sur le grand axe AA' d'une ellipse (*fig.* 81) pris comme diamètre, décrivons un cercle; prolongeons l'ordonnée PL d'un

Fig. 81.

(*) L'emploi de cet angle a été aussi indiqué par M. O'Brien (*Cambridge Mathematical Journal*, t. IV, p. 99).

point P (x', y') de l'ellipse jusqu'à sa rencontre Q avec ce cercle, et joignons le centre C au point Q; l'angle QCL sera égal à φ. En effet, $CL = CQ \cos QCL$ ou $x' = a \cos\varphi$; d'ailleurs $PL = \frac{b}{a} QL$ (163), $QL = a \sin\varphi$, d'où $y' = b \sin\varphi$.

230. Si l'on mène par le point P une parallèle PN au rayon CQ, on a

$$PM : CQ :: PL : QL :: b : a,$$

et comme $CQ = a$, on a $PM = b$; d'ailleurs $PN = a$, ce qui donne le théorème suivant.

Le grand axe d'une ellipse détermine sur une droite NP *de longueur a, joignant un point* P *de l'ellipse à un point* N *du petit axe, un segment* PM *dont la longueur est égale à b.*

En prolongeant l'ordonnée PQ jusqu'en Q' où elle rencontre le cercle une deuxième fois, on démontrerait de même que la parallèle PN' menée au rayon CQ' par le point P est divisée en ce point en deux segments de longueur constante a et b. Donc si les extrémités M et N d'une droite MN de longueur constante glissent sur les côtés d'un angle droit, un point quelconque P de cette droite décrit une ellipse ayant pour axes MP et NP. (*Voir* nº 49, Ex. XII.)

On a construit sur ce principe un *compas elliptique* qui permet de décrire une ellipse d'un mouvement continu. Cet instrument se compose de deux règles fixes CA et CD à angle droit, et d'une règle mobile MN, de longueur constante et dont les extrémités peuvent glisser le long des règles fixes : un crayon fixé en un point de la règle mobile décrit une ellipse. Lorsque ce crayon se trouve au milieu de MN, la courbe est un cercle. (O'Brien, *Coordinate Geometry*, p. 112.)

231. L'emploi de l'angle φ fournit un moyen très-simple de construire géométriquement le diamètre conjugué d'un diamètre donné.

Si l'on observe qu'on a en général

$$\tan\theta = \frac{y'}{x'} = \frac{b}{a} \tan\varphi,$$

la relation (170)

$$\tang\theta \tang\theta' = -\frac{b^2}{a^2}$$

devient

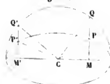
$$\tang\varphi \tang\varphi' = -1,$$

c'est-à-dire

$$\varphi - \varphi' = 90^\circ.$$

Pour construire le diamètre conjugué P'C du diamètre CP (*fig.* 82), il faut donc prolonger l'ordonnée PM du point P jus-

Fig. 82.



qu'à sa rencontre Q avec le cercle décrit sur le grand axe de l'ellipse comme diamètre, mener le rayon QC et le rayon CQ' qui lui est perpendiculaire; l'ordonnée Q'M' coupera l'ellipse au point P', extrémité du diamètre cherché.

On peut déduire de cette construction les expressions des coordonnées x' et y' de P', qui ont été données au n° 172. En effet des relations

$$\cos\varphi' = \sin\varphi, \quad \sin\varphi' = -\cos\varphi,$$

on tire respectivement

$$\frac{x''}{a} = \frac{y'}{b}, \quad \frac{y''}{b} = -\frac{x'}{a}.$$

Ces valeurs montrent que les triangles PCM, P'CM' sont équivalents.

EXERCICES.

1. Exprimer les longueurs de deux diamètres conjugués en fonction de l'angle φ.

Réponse. $a'^2 = a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi, \quad b'^2 = a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi.$

II. Trouver l'équation d'une corde en fonction des coordonnées φ et φ' de ses extrémités (*voir* n° 102).

RÉPONSE. $\frac{x}{a}\cos\frac{1}{2}(\varphi+\varphi')+\frac{y}{b}\sin\frac{1}{2}(\varphi+\varphi')=\cos\frac{1}{2}(\varphi-\varphi')$.

III. Trouver l'équation de la tangente, en fonction de la coordonnée φ du point de contact.

RÉPONSE. $\frac{x}{a}\cos\varphi+\frac{y}{b}\sin\varphi=1$.

IV. Exprimer la longueur D de la corde qui joint les deux points α et β.

On a

$$D^2=a^2(\cos\alpha-\cos\beta)^2+b^2(\sin\alpha-\sin\beta)^2,$$
$$D=2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\left[a^2\sin^2\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)+b^2\cos^2\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Mais (Ex. I) la quantité comprise entre parenthèses représente le demi-diamètre conjugué de celui qui passe par le point $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$; d'ailleurs (Ex. II, III) la tangente menée par le point $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ est parallèle à la corde qui joint les points α, β; par suite, en représentant par b' la longueur du demi-diamètre conjugué parallèle à la corde donnée, on a

$$D=2b'\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta).$$

V. Trouver l'aire Σ du triangle formé par les trois points α, β, γ.

Nous avons (36)

$$\begin{aligned}2\Sigma&=ab[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\beta-\gamma)+\sin(\gamma-\alpha)]\\&=ab[2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)-2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-2\gamma)]\\&=4ab\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)\sin\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha),\end{aligned}$$

d'où

$$\Sigma=2ab\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)\sin\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha).$$

VI. L'aire du triangle inscrit, dont les médianes ont pour point de concours le centre de la courbe, est constante.

VII. Trouver le rayon R du cercle circonscrit au triangle formé par les trois points α, β et γ.

Soient d, e, f les côtés et Σ l'aire de ce triangle, on a

$$R=\frac{def}{4\Sigma}=\frac{b'b''b'''}{ab},$$

b', b'', b''' étant les demi-diamètres parallèles aux côtés du triangle : si l'on désigne par c', c'', c''' les cordes menées par le foyer parallèlement à

ces côtés, on a aussi (**227**, Ex. V)

$$R^2 = \frac{c'c''c'''}{p}\ (^*).$$

VIII. Trouver l'équation du cercle circonscrit à ce triangle.

Réponse.

$$x^2 + y^2 - \frac{2(a^2 - b^2)x}{a} \cos\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\tfrac{1}{2}(\beta + \gamma)\cos\tfrac{1}{2}(\gamma + \alpha)$$
$$- \frac{2(b^2 - a^2)y}{b} \sin\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)\sin\tfrac{1}{2}(\beta + \gamma)\sin\tfrac{1}{2}(\gamma + \alpha)$$
$$= \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2) - \tfrac{1}{2}(a^2 - b^2)[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\beta + \gamma) + \cos(\gamma + \alpha)].$$

IX. L'aire du triangle formé par trois tangentes est (39)

$$ab \tan\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)\tan\tfrac{1}{2}(\beta - \gamma)\tan\tfrac{1}{2}(\gamma - \alpha).$$

X. L'aire du triangle formé par trois normales est

$$\frac{c^4}{4ab}\tan\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)\tan\tfrac{1}{2}(\beta - \gamma)\tan\tfrac{1}{2}(\gamma - \alpha)$$
$$\times[\sin(\beta + \gamma) + \sin(\gamma + \alpha) + \sin(\alpha + \beta)]^2.$$

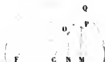
Les trois normales se coupent donc en un même point lorsqu'on a

$$\sin(\beta + \gamma) + \sin(\gamma + \alpha) + \sin(\alpha + \beta) = 0$$ (M. Burnside).

XI. Trouver le lieu de l'intersection O du rayon vecteur FP mené par le foyer F d'une ellipse à un point P de la courbe, avec le rayon CQ du cercle décrit sur le grand axe comme diamètre, le point Q se trouvant sur l'ordonnée QM du point P.

Soient x', y' les coordonnées du point P (*fig.* 83) (C étant pris pour

Fig. 83.



origine), x et y celles du point O, φ l'angle QCM : de la similitude des triangles FON, FPM, on déduit

$$\frac{y}{x + c} = \frac{y'}{x' + c} = \frac{b\sin\varphi}{a(e + \cos\varphi)}.$$

(*) Mac-Cullagh, *Dublin Exam. Papers*, 1836, p. 22.

L'équation polaire du lieu, en prenant le point C pour origine, s'obtiendra en remplaçant, dans l'équation précédente, x et y par $\rho\cos\varphi$, $\rho\sin\varphi$: on aura ainsi

$$\frac{\rho}{c+\rho\cos\varphi}=\frac{b}{a(e+\cos\varphi)},$$

ou

$$\rho=\frac{bc}{c+(a-b)\cos\varphi}.$$

Le lieu cherché est une ellipse (193) ayant C et F pour foyers.

XII. Trouver le lieu de l'intersection du rayon CQ avec la normale en P.

La normale a pour équation (180)

$$\frac{a^2x}{x'}-\frac{b^2y}{y'}=c^2,$$

ou bien

$$\frac{ax}{\cos\varphi}-\frac{by}{\sin\varphi}=c^2;$$

en y remplaçant x et y par $\rho\cos\varphi$ et $\rho\sin\varphi$, on a, pour l'équation du lieu,

$$(a-b)\rho=c^2,\quad \text{ou}\quad \rho=a+b,$$

qui est celle d'un cercle concentrique à l'ellipse et de rayon $a+b$.

XIII. Démontrer que

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\text{PFC}=\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi.$$

XIV. Par le sommet d'une ellipse, on mène un rayon vecteur à un point (x', y') de la courbe, et par le centre une parallèle à ce rayon vecteur : trouver le lieu de l'intersection de cette parallèle avec la tangente en (x', y').

La tangente de l'angle que le rayon vecteur fait avec l'axe étant égale à $\frac{y'}{x'+a}$, la parallèle menée par le centre a pour équation

$$\frac{y}{x}=\frac{y'}{x'+a}=\frac{b\sin\varphi}{a(1+\cos\varphi)}=\frac{b}{a}\,\frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi},$$

ou bien

$$\frac{y}{b}\sin\varphi+\frac{x}{a}\cos\varphi=\frac{x}{a}.$$

Le lieu de l'intersection de cette droite avec la tangente

$$\frac{y}{b}\sin\varphi+\frac{x}{a}\cos\varphi=1$$

est évidemment $\frac{x'}{a} = 1$, c'est-à-dire la tangente au sommet opposé de celui d'où part le rayon vecteur.

On trouverait de la même manière le lieu de cette intersection lorsque le rayon vecteur est mené non plus par le sommet, mais par un point quelconque de la courbe; il suffit pour cela de remplacer, dans ce qui précède, a et b par a' et b'. Le lieu est alors la tangente passant par le point diamétralement opposé de celui par lequel on a mené le rayon vecteur.

XV. Dans une ellipse, la longueur d'une corde menée tangentiellement à l'ellipse homofocale, ayant $\sqrt{a^2 - h^2}$, $\sqrt{b^2 - h^2}$ pour demi-axes, est égale à $\frac{2hb'^2}{ab}$, b' étant le demi-diamètre parallèle à la corde (M. BURNSIDE).

La condition pour que la corde qui passe par les deux points α et β soit tangente à l'ellipse homofocale est

$$\frac{a^2 - h^2}{a^2} \cos^2 \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) + \frac{b^2 - h^2}{b^2} \sin^2 \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) = \cos^2 \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta),$$

ou

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{h^2}{a^2 b^2}\left[b^2 \cos^2 \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) + a^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)\right]$$

$$= \frac{h^2}{a^2 b^2} b'^2 \quad \text{(Ex. IV)}.$$

La longueur de cette corde est par suite

$$2b' \sin \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{2hb'^2}{ab}.$$

Ce résultat permet d'étendre aux cordes tangentes à des coniques homofocales plusieurs théorèmes relatifs aux cordes menées par le foyer.

232. La méthode exposée dans les numéros précédents ne s'applique pas à l'hyperbole. Cependant on peut poser, lorsqu'il s'agit de cette dernière courbe,

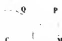
$$x' = a \operatorname{séc} \varphi, \quad y' = b \operatorname{tang} \varphi,$$

puisque

$$\left(\frac{x'}{a}\right)^2 - \left(\frac{y'}{b}\right)^2 = 1.$$

Pour représenter géométriquement l'angle φ (*fig.* 84), me-

Fig. 84.



nons par le pied M de l'ordonnée une tangente MQ au cercle décrit sur l'axe transverse comme diamètre; nous aurons

$$\widehat{QCM} = \varphi.$$

En effet

$$CM = x' = CQ \operatorname{séc} QCM;$$

d'ailleurs

$$QM = a \operatorname{tang}\varphi \quad \text{et} \quad PM = y' = b \operatorname{tang}\varphi.$$

Donc la tangente menée par le pied de l'ordonnée d'un point de l'hyperbole au cercle décrit sur l'axe transverse comme diamètre est dans un rapport constant avec cette ordonnée.

L'équation de l'hyperbole conjuguée étant

$$\left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{x}{a}\right) = 1,$$

un point (x'', y'') de cette hyperbole peut se représenter par

$$y'' = b \operatorname{séc}\varphi', \quad x'' = a \operatorname{tang}\varphi'.$$

Si θ est l'angle fait avec l'axe des x par un diamètre, on a

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{y'}{x'} = \frac{b}{a}\sin\varphi$$

pour l'hyperbole primitive : pour l'hyperbole conjuguée, on aurait de même

$$\operatorname{tang}\theta' = \frac{y''}{x''} = \frac{b}{a}\,\frac{1}{\sin\varphi'}.$$

Lorsque ces deux diamètres sont conjugués, la relation

$$\operatorname{tang}\theta \operatorname{tang}\theta' = \frac{b^2}{a^2}$$

devient

$$\sin\varphi = \sin\varphi',$$

ou simplement

$$\varphi = \varphi' \quad \text{(M. Turner)}.$$

§ III. — De la similitude dans les sections coniques.

233. Deux figures sont *semblables et semblablement placées*, ou *homothétiques* (*fig.* 85), lorsque les rayons vecteurs OP,

Fig. 85.



OQ, menés dans la première par un point O, sont dans un rapport constant avec les rayons vecteurs parallèles *op*, *oq* menés dans la seconde par un point *o*. Quand il existe deux points O et *o* jouissant de cette propriété, il y en a une infinité d'autres. En effet, prenons dans la première figure un point quelconque C, et joignons OC; dans la seconde figure, menons *oc* parallèle à OC, de telle sorte que le rapport *oc* : OC soit égal au rapport constant *op* : OP; les triangles POC, *poc* sont semblables; par suite, *cp* est parallèle à CP, et le rapport de *cp* à CP est égal au rapport constant *op* : OP. On prouverait de même qu'un autre rayon vecteur quelconque mené par *c* est proportionnel au rayon vecteur parallèle mené par C.

Lorsque deux *sections coniques à centre* sont *homothétiques*, tous les diamètres de l'une sont proportionnels aux diamètres de l'autre, puisque les rectangles OP.OQ, et *op*.*oq* sont proportionnels aux carrés des diamètres parallèles (149).

234. *Trouver la condition pour que deux coniques données par des équations générales soient homothétiques.*

Prenons, par une transformation de coordonnées, le centre de la première comme origine; le carré du demi-diamètre fai-

sant avec l'axe des x un angle θ, dans cette conique, est égal à une constante divisée par

$$a\cos^2\theta + 2h\cos\theta\sin\theta + b\sin^2\theta;$$

de même le carré du demi-diamètre qui lui est parallèle dans la seconde est égal au quotient d'une autre constante par

$$a'\cos^2\theta + 2h'\cos\theta\sin\theta + b'\sin^2\theta.$$

Le rapport de ces deux carrés ne peut être constant qu'à la condition d'être indépendant de θ, c'est-à-dire lorsque l'on a

$$\frac{a}{a'} = \frac{h}{h'} = \frac{b}{b'}.$$

Donc *deux coniques sont homothétiques lorsque les coefficients des termes du second degré de leurs équations sont égaux ou proportionnels.*

235. Les axes de deux coniques homothétiques sont parallèles, puisque le plus grand et le plus petit diamètre de l'une doivent être respectivement parallèles au plus grand et au plus petit diamètre de l'autre.

Si l'un des diamètres de l'une de ces coniques devient infini, il en est de même du diamètre parallèle de l'autre; ainsi *les asymptotes de deux hyperboles homothétiques sont parallèles.* Ceci résulte aussi du théorème démontré au numéro précédent, puisque (154) les directions des asymptotes sont déterminées par l'ensemble des termes du second degré de l'équation de la courbe.

Les coniques semblables ont même excentricité, puisqu'on a évidemment

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{m^2a^2 - m^2b^2}{m^2a^2};$$

par suite, on peut considérer les coniques semblables et semblablement placées, ou homothétiques, comme des coniques ayant leurs axes parallèles et même excentricité.

Deux hyperboles ayant leurs asymptotes parallèles sont homothétiques. En effet, leurs axes, étant les bissectrices des

angles formés par les asymptotes (155), sont parallèles; de plus, elles ont même excentricité, puisque l'excentricité ne dépend que de l'angle compris entre les asymptotes.

236. Toutes les paraboles ayant même excentricité ($e = 1$) sont homothétiques lorsque leurs axes sont parallèles. Du reste, l'équation d'une parabole rapportée à son sommet étant $y^2 = px$, ou

$$\rho = \frac{p \cos\theta}{\sin^2\theta},$$

il est évident que le rayon vecteur ρ' mené à une autre parabole par son sommet, et parallèlement à ρ, est avec celui-ci dans le rapport constant de p' à p.

EXERCICES.

I. Sur un rayon vecteur OP mené à une conique par un point fixe O, on prend une longueur OQ proportionnelle à OP; trouver le lieu du point Q.

Il suffit de remplacer ρ par $m\rho$ dans l'équation de la conique, pour obtenir celle du lieu, qui est une conique homothétique à la première.

Le point O s'appelle le *centre de similitude* des deux coniques : c'est évidemment (*voir* aussi n° 115) le point d'intersection des tangentes communes aux deux coniques, puisque les deux rayons vecteurs infiniment voisins OP, OP' menés à la première devenant égaux, il doit en être de même des deux rayons vecteurs correspondants OQ, OQ' menés à la seconde.

II. Si, par le centre de similitude de deux coniques homothétiques, on mene deux rayons vecteurs, les cordes qui joignent leurs extrémités sont paralleles ou se rencontrent sur la corde d'intersection des deux coniques.

Ce théorème se démontre comme celui du n° 116.

III. Les six centres de similitude de trois coniques homothétiques sont situés trois par trois sur une même droite (*fig.* 44, p. 157).

IV. Deux coniques homothétiques et concentriques déterminent sur une sécante des segments égaux.

Toute corde de la conique extérieure, qui est tangente à la conique intérieure, est divisée au point de contact en deux parties égales.

Ces théorèmes peuvent se démontrer comme ceux des n°s 196 et 197, qui n'en sont qu'un cas particulier. En effet, les asymptotes d'une hyperbole peuvent être considérées comme une conique semblable à l'hyper-

bole, puisqu'elles ont pour équation l'ensemble des termes du deuxième degré de l'équation de l'hyperbole.

V. Par le sommet V d'une ellipse, on mène une tangente qui rencontre une ellipse extérieure homothétique et concentrique, en T et T' : démontrer qu'une corde quelconque menée par le point V dans l'ellipse intérieure est égale à la demi-somme algébrique des cordes parallèles menées dans l'ellipse extérieure par les points T et T'.

237. Deux figures sont semblables, mais non semblablement placées, lorsque les rayons vecteurs proportionnels, au lieu d'être parallèles, font entre eux un angle constant θ, de telle sorte qu'en faisant tourner l'une d'elles de l'angle θ, on obtienne deux figures homothétiques.

Trouver la condition pour que deux coniques données par l'équation générale du second degré soient semblables, quoique non semblablement placées.

Il suffit pour cela de rapporter la première conique à un nouveau système d'axes faisant un angle θ avec le premier, et de voir si l'on peut trouver une valeur de θ qui rende les nouveaux coefficients a, b, h de cette équation proportionnels aux coefficients a', b', h' de la seconde, c'est-à-dire égaux à ma', mb', mh'.

Lorsque les axes primitifs sont rectangulaires, les quantités $a+b$, $ab-h^2$ ne changent pas quand on transforme les coordonnées (157); on aura donc

$$a+b=m(a'+b'),$$
$$ab-h^2=m^2(a'b'-h'^2),$$

et la condition cherchée sera

$$\frac{ab-h^2}{(a+b)^2}=\frac{a'b'-h'^2}{(a'+b')^2}.$$

En se basant sur le théorème du n° 158, on trouverait de même, dans le cas des axes obliques,

$$\frac{ab-h^2}{(a+b-2h\cos\omega)^2}=\frac{a'b'-h'^2}{(a'+b'-2h'\cos\omega)^2}.$$

Cette condition exprime (74, 154) que les angles compris

entre les asymptotes (réelles ou imaginaires) de ces coniques sont égaux.

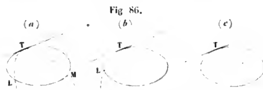
§ IV. — Du contact des sections coniques.

238. *Deux courbes de degré m et n se coupent en mn points.* En effet, l'équation à une seule variable, obtenue en éliminant x ou y entre les équations de ces courbes, est en général de degré mn. Cette équation est quelquefois d'un degré moindre, lorsque, dans l'élimination, un ou plusieurs des termes renfermant l'inconnue à ses plus hautes puissances viennent à disparaître; mais alors un ou plusieurs points d'intersection se trouvent à l'infini (**135**), et, en tenant compte de ces points, ainsi que des points imaginaires, on peut toujours considérer ces courbes comme se rencontrant en mn points. Par suite, *deux coniques se coupent toujours en quatre points:* et, comme on peut joindre quatre points 1, 2, 3, 4 par six droites 12, 34; 13, 24; 14, 23, ces coniques ont toujours trois couples de cordes d'intersection.

Nous étudierons d'abord le cas où plusieurs de ces points coïncident, réservant pour un autre Chapitre celui où il y a des points d'intersection à l'infini.

239. Lorsque deux des points d'intersection de deux coniques coïncident, les courbes se touchent, en ayant pour tangente commune la droite menée par ces deux points, et se rencontrent en deux autres points L, M, *fig.* 86 (a), réels ou imaginaires, mais distincts du point de contact T. Les coniques ont alors un *contact du premier ordre*. Lorsque trois des points d'intersection coïncident en T, les coniques ont un *contact du second ordre* et sont dites *osculatrices;* elles ne

Fig. 86.



peuvent alors se couper qu'en un seul autre point L, *fig.* 86 (b).

Enfin, si leurs quatre points d'intersection coïncident en T, elles ont un *contact du troisième ordre fig.* 86 (*c*); et, comme elles ne peuvent se couper qu'en quatre points, c'est là l'ordre de contact le plus élevé qu'elles puissent avoir.

Considérons, par exemple, les deux coniques suivantes :

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx = 0,$$
$$a'x^2 + 2h'xy + b'y^2 + 2g'x = 0;$$

elles passent par l'origine, sont tangentes (144) à l'axe des y, et l'équation

$$x[(ab' - a'b)x + 2(hb' - h'b)y + 2(gb' - g'b)] = 0$$

représente (181, Ex. II) la figure passant par leurs quatre points d'intersection. Le premier facteur correspond à la tangente commune (déterminée par les deux points d'intersection qui coïncident); le second à la droite LM menée par les deux autres points.

Lorsque $gb' = g'b$, la droite LM passe par l'origine, et les coniques ont un contact du second ordre.

Si, en outre, $hb' = h'b$, l'équation de LM se réduit à $x = 0$. LM coïncide avec la tangente, et le contact des coniques est du troisième ordre. Dans ce dernier cas, leurs équations peuvent se mettre sous la forme

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx = 0, \quad a'x^2 + 2hxy + by^2 + 2gx = 0,$$

et ne diffèrent que par le coefficient de x^2.

240. Deux coniques ont un *double contact* lorsque leurs quatre points d'intersection coïncident deux à deux. La condition pour que les deux coniques du numéro précédent, passant par l'origine et tangentes à l'axe des y, se touchent en un deuxième point s'obtiendra en exprimant que la droite LM leur est tangente, ou, plus simplement, que les droites joignant l'origine aux deux autres points d'intersection coïncident. En retranchant l'une de l'autre les équations des coniques, après les avoir multipliées respectivement par g et g', il vient

$$(ag' - a'g)x^2 + 2(hg' - h'g)xy + (bg' - b'g)y^2 = 0$$

pour l'équation de ces deux droites, qui coïncident lorsqu'on a

$$(ag' - a'g)(bg' - b'g) = (hg' - h'g)^2.$$

241. Puisqu'une conique peut être assujettie à cinq conditions (133), on peut tracer une conique tangente à une conique donnée et satisfaisant de plus à trois autres conditions; mais ces trois conditions se réduisent à deux si le contact devient du deuxième ordre, et à une seule s'il est du troisième. Ainsi on peut toujours trouver une *parabole* ayant un contact du troisième ordre à l'origine, avec la conique

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx = 0.$$

Il suffit, pour cela (239), de remplacer dans cette équation a par a', a' étant déterminé par la relation $a'b = h^2$.

L'équation du second degré devant remplir deux conditions pour représenter un cercle, il n'est pas possible, en général, de mener un cercle ayant un contact du troisième ordre avec une conique donnée (autrement dit, on ne peut assujettir à passer par quatre points un cercle qui est complétement déterminé par trois points); mais il est facile de trouver l'équation du cercle passant par trois points consécutifs d'une conique, c'est-à-dire ayant avec elle un contact du deuxième ordre.

Les axes coordonnés faisant entre eux un angle ω, l'équation d'une conique passant par l'origine T, et tangente à l'axe des y, sera

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx = 0,$$

et celle d'un cercle assujetti aux mêmes conditions (84, Ex. III),

$$x^2 + 2xy\cos\omega + y^2 - 2rx\sin\omega = 0.$$

En leur appliquant le critérium obtenu au n° 239 ($gb' = g'b$), on trouve pour le cercle ayant un contact de deuxième ordre

$$g = -rb\sin\omega,$$

d'où

$$r = \frac{-g}{b\sin\omega}\ (^*).$$

Ce *cercle osculateur* s'appelle aussi *cercle de courbure*. Son rayon r est le *rayon de courbure* de la conique au point T.

242. *Trouver le rayon de courbure en un point* P *d'une conique à centre.*

Soit

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1$$

l'équation de la conique rapportée au diamètre du point P et à son conjugué; pour appliquer les formules du numéro précédent qui supposent la courbe tangente à l'axe des y, transportons les axes parallèlement à eux-mêmes en P; si l'on remplace x par $x + a'$, l'équation de la conique devient

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{2x}{a'} = 0,$$

et le rayon de courbure r a pour valeur

$$r = \frac{b'^2}{a'\sin\omega},$$

ω étant l'angle formé par les axes. Le dénominateur $a'\sin\omega$ représentant la distance p du centre à la tangente, on a

$$r = \frac{b'^2}{p}, \quad \text{ou} \quad r = \frac{b'^3}{ab} \quad (175).$$

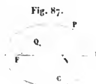
(*) Dans les problèmes suivants, nous déterminerons la grandeur du rayon de courbure r, sans nous occuper de son signe, qui indique, d'après l'usage adopté, la direction suivant laquelle ce rayon doit être mesuré, et celle des équations

$$x^2 + 2xy\cos\omega + y^2 \mp 2rx\sin\omega = 0$$

qu'il convient d'attribuer au cercle osculateur. On doit prendre le signe supérieur quand le centre est dans la direction positive de l'axe des x, et le signe inférieur dans le cas contraire. La formule du texte donne pour r une valeur positive ou négative, suivant que la conique est concave ou convexe vers les x positifs.

243. Si l'on représente par N (*fig.* 87) la longueur PN de la

Fig. 87.



normale en P, par ψ l'angle FPN compris entre la normale et le rayon vecteur FP issu du foyer, on a les valeurs

$$N = \frac{bb'}{a} \quad (181), \qquad \cos\psi = \frac{b}{b'} \quad (188),$$

d'où l'on déduit pour le rayon de courbure

$$r = \frac{N}{\cos^2\psi}.$$

On peut donc trouver le centre C et le rayon PC de courbure de la manière suivante : élever sur la normale PN, au point N où elle rencontre le grand axe, une perpendiculaire NQ qui coupe en Q le rayon vecteur FP issu du foyer; le centre de courbure C se trouve sur la perpendiculaire QC élevée en Q au rayon vecteur FP, et PC représente le rayon de courbure.

244. On peut encore construire le centre de courbure en s'appuyant sur le principe suivant : *lorsqu'un cercle rencontre une conique, les cordes d'intersection font des angles égaux avec l'axe*. En effet, les rectangles construits sur les segments des cordes étant égaux, il en est de même des diamètres parallèles de la conique (149), qui, par suite, sont également inclinés sur l'axe (162).

Dans le cas du cercle de courbure, la tangente en T (*fig.* 86) est une des cordes d'intersection, et la ligne TL est l'autre; il suffit donc, pour déterminer le point L, de mener par T une droite TL faisant avec l'axe le même angle que la tangente. Le cercle de courbure est ainsi déterminé par les points L et T et la tangente en T.

Cette construction fait voir, en outre, que le cercle oscula-

teur mené à l'un des sommets a un contact de troisième ordre avec la conique.

EXERCICES.

I. Trouver, en se servant de la notation de l'angle excentrique, la condition pour que les quatre points α, β, γ, δ d'une conique appartiennent à un même cercle (*).

Les cordes $\alpha\beta$ et $\gamma\delta$ ont pour équations

$$\frac{x}{a}\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)+\frac{y}{b}\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)=\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta),$$

$$\frac{x}{a}\cos\tfrac{1}{2}(\gamma+\delta)+\frac{y}{b}\sin\tfrac{1}{2}(\gamma+\delta)=\cos\tfrac{1}{2}(\gamma-\delta),$$

et comme elles sont également inclinées sur l'axe de la conique on a

$$\tang\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)+\tang\tfrac{1}{2}(\gamma+\delta)=0,$$

d'où

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=0, \quad \text{ou} \quad \alpha+\beta+\gamma+\delta=2m\varpi.$$

II. Trouver les coordonnées δ, X et Y du point où le cercle osculateur en (x', y') rencontre de nouveau la conique.

On a dans ce cas

$$\alpha=\beta=\gamma, \quad \delta=-3\alpha,$$

par suite

$$X=\frac{4x'^3}{a^2}-3x', \quad Y=\frac{4y'^3}{b^2}-3y'.$$

III. Il existe sur une conique trois points dont les cercles osculateurs passent par un point donné de la courbe; ces points se trouvent sur un cercle passant par le point donné et forment un triangle dont les médianes concourent au centre (**).

Soit δ le point donné, puisque c'est celui où un cercle osculateur rencontre la courbe, on aura, d'après l'Exercice précédent, $\alpha=-\dfrac{\delta}{3}$ pour le point de contact; et comme le sinus et le cosinus d'un angle δ ne changent pas lorsque cet angle augmente de 360 degrés, on pourra aussi bien prendre $\alpha=-\frac{1}{3}\delta+120°$, $\alpha=-\frac{1}{3}\delta+240°$; d'ailleurs les points correspondant à ces valeurs de α sont sur un même cercle (Ex. I). En considérant, dans les équations de l'Exercice précédent X et Y comme des quan-

(*) JOACHIMSTAL, *Crelle*, t. XXXVI, p. 95.

(**) STEINER, *Crelle*, t. XXXII, p. 300; — JOACHIMSTAL, *Crelle*, t. XXXVI, p. 95.

tités connues, on aura, pour déterminer x' et y', une équation du troisième degré, manquant de second terme: les sommes des trois valeurs de x' et y' sont donc respectivement nulles; donc (n° 7, Ex. IV), l'origine se trouve à l'intersection des médianes du triangle formé par les trois points. On en conclut aisément que les normales menées par les sommets du triangle sont les hauteurs du triangle, et par suite se coupent en un même point.

245. *Trouver le rayon de courbure de la parabole.* L'équation de la parabole rapportée à un diamètre et à une tangente étant $y^2 = p'x$, on trouve facilement, pour le rayon de courbure (241),

$$r = \frac{p'}{2 \sin \theta},$$

θ représentant l'angle formé par les axes. L'expression trouvée plus haut $\frac{N}{\cos^3 \psi}$ pour les coniques à centre s'applique également à la parabole, ainsi que la construction qui s'en déduit, puisqu'on a

$$N = \tfrac{1}{2} p' \sin \theta \quad (212, 213), \quad \text{et} \quad \psi = 90^\circ - \theta \quad (217).$$

EXERCICES.

I. Dans toutes les sections coniques, le rayon de courbure est égal au cube de la normale, divisé par le carré du demi-paramètre.

II. Exprimer le rayon de courbure d'une ellipse en fonction de l'angle que la normale fait avec l'axe.

III. Trouver la longueur des cordes du cercle de courbure qui passent 1° par le centre, 2° par le foyer d'une conique à centre.

Réponse. 1° $\frac{2b'^2}{a'}$, 2° $\frac{2b'^2}{a}$.

IV. La corde focale de courbure (*) d'une conique est égale à la corde de la conique menée par le foyer parallèlement à la tangente au point d'osculation.

V. Dans la parabole, la corde focale de courbure est égale au paramètre du diamètre passant par le point d'osculation.

(*) C'est-à-dire la corde du cercle osculateur passant par le foyer et le point d'osculation.

246. *Trouver les coordonnées x et y du centre de courbure d'une conique à centre.*

Ces coordonnées s'obtiennent évidemment en retranchant de celles du point (x', y') d'osculation les projections du rayon de courbure sur les axes correspondants; d'ailleurs le rapport de ce rayon à sa projection sur l'axe des y est le même que celui de la normale N à l'ordonnée y'. On a ainsi pour cette projection

$$\frac{b'^2}{p}\frac{y'}{N} = \frac{b'^2 y'}{b^2};$$

par suite, pour l'ordonnée du centre de courbure,

$$y = \frac{b^2 - b'^2}{b^2} y',$$

et, comme $b'^2 = b^2 + \frac{c^2}{b^2} y'^2$,

$$y = \frac{b^2 - a^2}{b^4} y'^3.$$

On trouverait de même

$$x = \frac{a^2 - b^2}{a^4} x'^3.$$

On serait arrivé au même résultat en faisant $\alpha = \beta = \gamma$ dans l'Ex. VIII du n° 231.

On peut encore trouver ces coordonnées en observant que le centre du cercle circonscrit à un triangle est le point de concours des perpendiculaires élevées sur le milieu des côtés. Le cercle osculateur est circonscrit au triangle formé par trois points consécutifs de la courbe; deux des côtés de ce triangle sont les tangentes consécutives, les perpendiculaires élevées en leurs milieux sont les normales correspondantes. Il suit de là que *le centre de courbure d'une courbe est l'intersection de deux normales consécutives à cette courbe.* En faisant, dans les équations du n° 181, Ex. IV, $x' = x'' = X$, $y' = y'' = Y$, on retombe sur les valeurs données ci-dessus.

247. *Trouver les coordonnées x, y du centre de courbure de la parabole.*

La projection $\frac{y'}{\sin^2\theta}$ du rayon de courbure sur l'axe des y s'obtient, comme précédemment, en multipliant le rayon de courbure $\frac{N}{\sin^2\theta}$ par $\frac{y'}{N}$, et en la retranchant de y', on trouve

$$y = -\frac{y'}{\text{tang}^2\theta} = -\frac{4y'^3}{p^2} \quad (212),$$

on a de même,

$$x = x' + \frac{p}{2\sin^2\theta} = x' + \frac{p + 4x'}{2} = 3x' + \tfrac{1}{2}p.$$

Ces valeurs pourraient se déduire du n° 227, Ex. X.

248. La *développée* d'une courbe est le lieu des centres de courbure de ses différents points. Pour trouver l'équation de cette développée, nous n'avons donc qu'à éliminer x' et y' entre l'expression des coordonnées du centre de courbure et l'équation de la courbe. Nous aurons ainsi, pour les coniques à centre,

$$\frac{x^{\frac{2}{3}}}{A^{\frac{2}{3}}} + \frac{y^{\frac{2}{3}}}{B^{\frac{2}{3}}} = 1,$$

en posant $\frac{c^2}{a} = A$, $\frac{c^2}{b} = B$; et, pour la parabole,

$$27py^2 = 16\left(x - \frac{1}{2}p\right)^3.$$

Cette dernière courbe porte le nom de *parabole semi-cubique*.



CHAPITRE XIV.

APPLICATION DE LA MÉTHODE DES NOTATIONS ABRÉGÉES AUX SECTIONS CONIQUES.

§ I. — Propriétés générales.

249. En raison de sa forme, l'équation $S = kS'$ (nº 40) représente une conique passant par les quatre points d'intersection, réels ou imaginaires, des deux coniques $S = o$, $S' = o$, et, comme on peut déterminer k de manière à ce qu'elle soit satisfaite par les coordonnées d'un cinquième point, elle représente une conique passant par cinq points (*).

Il en est évidemment encore de même lorsque l'une ou l'autre des expressions S et S' ou toutes les deux se décomposent en facteurs. Ainsi l'équation $S = k\alpha\beta$, étant vérifiée par les coordonnées des quatre points où les droites α, β rencontrent S, représente une conique passant par ces points, c'est-à-dire ayant α et β pour cordes d'intersection avec S. Afin de conserver à certaines propriétés relatives aux deux courbes toute leur généralité, nous considérerons, ainsi que nous l'avons déjà fait dans le cas du cercle (106), comme

(*) Cinq conditions étant nécessaires pour déterminer une conique, il est évident que l'équation la plus générale d'une conique assujettie à quatre conditions doit renfermer une indéterminée dont on pourra, du reste, déduire la valeur de la connaissance d'une cinquième condition. De même, l'équation la plus générale d'une conique assujettie à trois conditions renfermera deux indéterminées. Revoir, à ce sujet, les équations d'une conique passant par trois points ou tangente à trois droites (124, 129).

Lorsque les quatre conditions auxquelles on assujettit une conique ne contiennent qu'au premier degré les coefficients de son équation, cette conique passe par quatre points fixes, puisqu'en éliminant tous ces coefficients, sauf un, on peut ramener l'équation à la forme $S = kS'$.

corde d'intersection imaginaire celle des droites α ou β qui ne rencontre pas la courbe S en des points réels.

On verrait de même que $\alpha\gamma = k\beta\delta$ représente une conique circonscrite au quadrilatère $\alpha\beta\gamma\delta$ (122) (*).

Il est bien entendu que, dans ce qui précède, α peut représenter non-seulement la droite dont l'équation a été mise sous la forme $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ (comme au n° 53), mais encore celle qui est définie par l'équation générale du premier degré.

250. La condition pour que $S - kS' = 0$ représente deux droites s'obtient en remplaçant $g, b, \ldots$ par $a + ka$, $b + kb$ dans la relation

$$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0.$$

On arrive ainsi à une équation du troisième degré pour déterminer k; il y a donc trois valeurs de k pour lesquelles $S - kS' = 0$ représente deux droites. Si l'on désigne ces valeurs par k', k'', k''', les équations $S - k'S' = 0$, $S - k''S' = 0$, $S - k'''S' = 0$ représenteront les trois couples de cordes qui joignent les quatre points d'intersection de S et S' (238).

EXERCICES.

I. Trouver l'équation d'une conique passant par les points où une conique donnée S rencontre les axes.

Les axes $x = 0$, $y = 0$ sont, dans ce cas, les cordes d'intersection; l'équation cherchée sera donc $S = kxy$, k étant une indéterminée (*voir* 151, Ex. I).

II. Trouver l'équation de la conique passant par les cinq points $(1, 2)$, $(3, 5)$, $(-1, 4)$, $(-3, -1)$, $(-4, 3)$.

En partant des équations des côtés du quadrilatère ayant les quatre premiers points pour sommets, on pourra mettre l'équation de la conique sous la forme

$$(3x - 2y + 1)(5x - 2y + 13) = k(x - 4y + 17)(3x - 4y + 5),$$

(*) Si α et β sont deux des cordes d'intersection joignant quatre points d'une conique S, et si γ et δ en sont deux autres, il est indifférent de mettre l'équation générale des coniques passant par les quatre points, sous l'une ou l'autre des formes $S - k\alpha\beta$, $S - k\gamma\delta$, $\alpha\beta - k\gamma\delta$, où k est indéterminée; puisque, en vertu du principe énoncé, l'équation de S est elle-même de la forme $\alpha\beta - k\gamma\delta$.

et en écrivant qu'elle est vérifiée par les coordonnées du cinquième point $(-4, 3)$, on trouve $k = -\frac{221}{19}$, ce qui donne, toutes réductions faites, pour l'équation cherchée,

$$79x^2 - 320xy + 301y^2 + 1101x - 1665y + 1586 = 0.$$

251. Lorsqu'une des droites α, β est tangente à S, ou lorsque ces droites se coupent en un point de cette courbe, les deux coniques S et $S - k\alpha\beta$ sont tangentes, puisqu'alors deux de leurs points d'intersection coïncident. Ainsi, $T=0$ étant l'équation de la tangente menée à S par un de ses points (x', y'),

$$S = T(lx + my + n)$$

sera l'équation la plus générale des coniques tangentes à S en (x', y'); il faudra d'ailleurs trois autres conditions pour déterminer les coefficients l, m, n, et par suite la conique.

Si la droite $lx + my + n$ passe par (x', y'), trois des points d'intersection des coniques coïncident; l'équation la plus générale d'une conique osculatrice à S en (x', y') est donc $S = T(lx + my - lx' - my')$. On en déduit facilement l'équation du cercle osculateur en exprimant que le terme en xy s'évanouit et que les coefficients de x^2 et de y^2 sont égaux : on a ainsi deux conditions pour déterminer l et m.

Lorsque la droite $lx + my + n$ coïncide avec T, l'équation de la seconde conique prend la forme $S = kT^2$ et représente une conique ayant avec S un contact de troisième ordre, c'est-à-dire quatre points consécutifs communs (*comparer* à cette équation celle du n° 239).

EXERCICES.

I. Les axes de S sont parallèles à ceux de $S - kS'$, lorsqu'ils le sont à ceux de S'.

En effet, si l'on prend pour axes coordonnés des parallèles aux axes de S, les équations $S = 0$ et $S' = 0$ n'auront pas de terme en xy. Lorsque S' est un cercle, les axes de $S - kS'$ et de S sont parallèles. Dans le cas où $S - kS$ représente deux droites, les axes de $S - kS'$ ne sont autre chose que les bissectrices intérieure et extérieure de l'angle formé par ces droites, et on retombe sur le théorème du n° 244.

II. Si les axes de coordonnées sont parallèles aux axes de S et de $S - k\alpha\beta$, les équations de α et β sont de la forme

$$lx + my + n = 0, \quad lx - my + n' = 0.$$

III. Trouver l'équation du cercle osculateur à une conique à centre. Cette équation est de la forme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = \left(\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} - 1\right)(lm + my - lx' + my'),$$

et se réduit à

$$\lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) = \left(\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} - 1\right)\left(\frac{xx'}{a^2} - \frac{yy'}{b^2} - \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2}\right),$$

en exprimant que le terme en xy s'évanouit; les coefficients de x^2 et de y^2 devant être égaux, on aura $\lambda = \frac{b'^2}{b^2 - a^2}$, ce qui donne, pour le cercle osculateur cherché,

$$x^2 + y^2 - \frac{2(a^2 - b^2)x'^3 x}{a^4} - \frac{2(b^2 - a^2)y'^3 y}{b^4} + a'^2 - 2b'^2 = 0.$$

IV. Trouver l'équation du cercle osculateur à une parabole.

Réponse.

$$(p^2 + 4px')(y^2 - px) = [2yy' - p(x + x')](2yy' + px - 3px').$$

252. L'équation $S - k\alpha\beta = 0$ représentant, ainsi que nous l'avons vu, une conique menée par les quatre points P, Q, p, q (*fig.* 88), où α et β rencontrent S, il est évident que, si les droites α et β se rapprochent, les points P et p, Q et q se rapprochent aussi. Par suite, quand les droites α et β coïncident, les points P et p, Q et q coïncident aussi, et la seconde conique est tangente à la première en P et Q. Donc, *l'équation* $S + k\alpha^2 = 0$ *représente une conique ayant avec* S *un*

Fig. 88.



double contact suivant la droite α, qui est alors la corde de contact. Lorsque α ne rencontre pas S, α est imaginaire, mais représente toujours la corde de contact de S et $S - k\alpha^2$.

On verrait de même que $\alpha\gamma = k\beta^2$ représente une conique tangente aux droites α et γ, qui ont alors β pour corde de contact (123).

L'équation d'une conique ayant avec S un double contact aux points (x', y'), (x'', y'') peut encore se mettre sous la forme $S = kTT'$, en désignant par T et T' les équations des tangentes en ces points.

253. Lorsque la droite α est parallèle à une asymptote de la conique S, elle est aussi parallèle à une asymptote de $S = k\alpha\beta$, qui représente alors une courbe passant par quatre points, dont un à l'infini. Quand β est en outre parallèle à l'autre asymptote de S, $S = k\alpha\beta$ est une conique passant par deux des points à l'infini de la courbe S. On peut, du reste, reconnaître facilement sur les équations de forme différente les coniques ayant des points d'intersection à l'infini; il suffit, pour cela, de se rappeler que l'équation d'une droite à l'infini se réduit à une constante (67), c'est-à-dire à $o.x + o.y + C = o$, et que, par suite, on peut rendre à une équation l'homogénéité qui lui manque (69) en y remplaçant un ou plusieurs des facteurs constants par $o.x + o.y + C$. Ainsi l'équation $xy = k^2$ d'une conique rapportée à ses asymptotes (199) n'est qu'un cas particulier de l'équation $\alpha\gamma = \beta^2$ qui représente une conique rapportée à deux tangentes et à leur corde de contact (123, 252); car, en la mettant sous la forme $xy = (o.x + o.y + k)^2$, on voit que les droites x et y sont des tangentes ayant leur corde de contact à l'infini (154).

254. L'équation de la parabole $y^2 = px$ n'est elle-même qu'un cas particulier de l'équation générale $\alpha\gamma = \beta^2$; car elle peut s'écrire $x(o.x + o.y + p) = y^2$, ce qui montre que la courbe est tangente non-seulement à la droite x au point où elle rencontre y, mais encore à la droite p à l'infini, au point où elle coupe y. On arriverait à la même conclusion en partant de l'équation générale de la parabole, qui, étant mise

sous la forme

$$(\alpha x + \beta y)^2 + (2gx + 2fy + c)(0.x + 0.y + 1) = 0,$$

fait voir que la droite $2gx + 2fy + c$ et la droite à l'infini sont des tangentes ayant $\alpha x + \beta y$ pour corde de contact, et que *la parabole a une tangente située à l'infini;* d'ailleurs l'équation qui détermine les points à l'infini dans la parabole est un carré parfait (137), par suite les deux points de la courbe situés à l'infini coïncident, et la ligne à l'infini peut être considérée comme une tangente (83).

L'équation générale

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

n'est qu'une forme particulière de l'équation $\alpha\gamma = k\beta\delta$ (122); car les trois premiers termes représentent deux droites α et γ, qui passent par l'origine, et les trois derniers la droite β, située à l'infini, et la droite δ, $2gx + 2fy + c$. Les lignes α et γ rencontrent donc la courbe à l'infini, et δ représente la droite passant par les points où α et γ rencontrent la courbe à une distance finie.

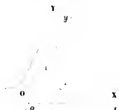
255. En se reportant encore au n° 253, on peut voir que $S = k\beta$ représente un système de coniques passant par les deux points situés à une distance finie où β rencontre S, et par les deux points à l'infini où S est rencontrée par $0.x + 0.y + k$. Comme il est d'ailleurs évident que les coefficients de x^2, y^2 et xy sont les mêmes dans $S = 0$ et $S - k\beta = 0$, ces équations sont celles de deux coniques semblables et semblablement placées (234). Donc, *deux coniques homothétiques se coupent toujours en deux points à l'infini, et ne peuvent, par suite, se rencontrer qu'en deux points situés à une distance finie.*

On peut arriver géométriquement au même résultat en considérant successivement les trois genres de coniques :

1° *Hyperboles.* — Les asymptotes de deux hyperboles homothétiques sont parallèles (285), c'est-à-dire qu'elles se coupent à l'infini; mais chaque asymptote rencontre sa courbe à l'infini : donc, deux hyperboles semblables et semblablement placées

se coupent en deux points situés à l'infini et qui se trouvent à la rencontre de leurs asymptotes. Ainsi les points de rencontre à l'infini, de OY et oy, de OX et ox (*fig.* 89), sont

Fig. 89.



communs aux deux courbes : on peut voir sur la *fig.* 89 un des points d'intersection situés à une distance finie, l'autre se trouve sur les deuxièmes branches des hyperboles.

2° *Ellipses.* — Les ellipses ne diffèrent des hyperboles qu'en ce que les asymptotes sont imaginaires au lieu d'être réelles; d'ailleurs, la direction des points à l'infini de deux ellipses semblables est déterminée par la même équation

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0 \quad (136,\ 234).$$

Bien que les racines de cette équation soient imaginaires, il n'en est pas moins vrai de dire qu'elles sont égales pour les deux ellipses, et, par suite, que ces ellipses peuvent être considérées comme se coupant en deux points imaginaires situés à l'infini. Cette manière de voir n'est, du reste, qu'une extension de ce que nous avons dit au n° 249 sur les cordes imaginaires d'intersection des courbes S et $S - k\alpha\beta$, au cas où une des droites α, β passe à l'infini.

3° *Paraboles.* — Toutes les paraboles ont une tangente à l'infini (254); la direction du point de contact, ne dépendant que des trois premiers termes de l'équation, est la même pour deux paraboles semblablement placées. Donc, *deux paraboles homothétiques se touchent à l'infini.*

Il résulte de ce qui précède que les points à l'infini, communs à deux coniques homothétiques, sont réels, imaginaires,

ou coïncident, suivant que ces coniques sont des hyperboles, des ellipses ou des paraboles.

256. L'équation $S = k$, c'est-à-dire $S = k(o.x + o.y + 1)^2$, est un cas particulier de $S = kx^2$; par suite (252), elle représente une conique ayant avec S un double contact suivant une droite à l'infini; et, comme $S - k$ ne diffère de S que par un terme constant, ces coniques sont non-seulement homothétiques (les trois premiers termes des deux équations étant identiques), mais encore concentriques, puisque les coordonnées du centre d'une conique sont indépendantes de la constante c (140). Donc, *deux coniques homothétiques et concentriques peuvent être considérées comme se touchant en deux points à l'infini.* D'ailleurs, les asymptotes de ces deux coniques non-seulement sont parallèles, mais coïncident : ces courbes passent donc par les deux mêmes points à l'infini, et ont mêmes tangentes en ces points.

Lorsque les courbes S, $S - h^2$ sont des paraboles, elles ont même tangente à l'infini, et, par suite, ont un contact de troisième ordre à l'infini (251); mais deux paraboles dont les équations ne diffèrent que par une constante sont égales, puisque les paraboles égales $y^2 = px$, $y^2 = p(x + n)$ restent encore égales quand on déplace les axes de coordonnées. D'ailleurs, l'expression du paramètre est indépendante du terme constant. Les paraboles S, $S - k^2$ sont donc égales, et l'on voit que *deux paraboles égales et semblablement placées peuvent être considérées comme ayant un contact du troisième ordre à l'infini.*

257. Tous les cercles sont semblables, puisque leurs équations ne diffèrent que par les termes du premier degré. Donc, *tous les cecles passent par les deux mêmes points imaginaires situés à l'infini*, et, par suite, ne peuvent se couper en plus de deux points à distance finie; de plus, *tous les cercles concentriques se touchent en deux points imaginaires à l'infini*, et, pour cette raison, ne peuvent se rencontrer en aucun point situé à une distance finie. Ceci permet de ne considérer beaucoup de théorèmes relatifs aux cercles que comme un cas par-

ticulier des théorèmes se rapportant aux coniques qui passent par deux points fixes.

258. Considérons encore l'équation $l^2\alpha^2 + m^2\beta^2 = n^2\gamma^2$, qui représente une section conique ayant le triangle $\alpha\beta\gamma$ pour triangle autopolaire (99). Elle peut se mettre sous l'une ou l'autre des formes :

$$n\gamma^2 - m^2\beta^2 = l^2\alpha^2; \quad n^2\gamma^2 - l^2\alpha^2 = m^2\beta^2; \quad l^2\alpha^2 + m^2\beta^2 = n^2\gamma^2.$$

La première montre que les droites $n\gamma + m\beta$, $n\gamma - m\beta$, qui se coupent en (β, γ), sont tangentes à la conique et ont α pour corde de contact; le point (β, γ) est donc le pôle de α. De même, d'après la deuxième forme, (γ, α) est le pôle de β; par suite (α, β) est le pôle de γ. Mais cette dernière conclusion peut aussi se tirer de la troisième forme, qui indique que les deux droites imaginaires $l\alpha \pm m\beta\sqrt{-1}$ sont tangentes à la conique suivant la corde de contact γ : car ces droites (tangentes menées par un point intérieur de la conique) se coupent en un point réel (α, β) qui est le pôle de γ.

On verrait, en suivant le même procédé, que l'équation

$$a\alpha^2 + 2h\alpha\beta + b\beta^2 = c\gamma^2$$

représente une conique par rapport à laquelle (α, β) est le pôle de γ, puisque son premier membre peut se décomposer en deux facteurs correspondant à des droites qui se coupent en (α, β).

259. Notons ici quelques théorèmes, qui ne sont que la traduction des équations précédentes, faite au moyen du principe énoncé au n° 34.

L'équation $\alpha\gamma = k\beta^2$ fait voir que : *Le produit des distances d'un point d'une conique à deux tangentes fixes est dans un rapport constant avec le carré de sa distance à leur corde de contact.*

L'équation $\alpha\gamma = k\beta\delta$ peut s'énoncer ainsi : *Le produit des distances d'un point d'une conique aux deux côtés opposés d'un quadrilatère inscrit est dans un rapport constant avec le produit de ses distances aux deux autres côtés.*

De ce dernier théorème on peut déduire le suivant : *Le rapport anharmonique du faisceau obtenu en joignant un point O quelconque d'une conique, à quatre points fixes, A, B, C, D, de cette conique est constant.*

On a, en effet, les valeurs (*fig.* 90)

$$\alpha = \frac{OA.OB \sin AOB}{AB}, \quad \gamma = \frac{OC.OD \sin COD}{CD}, \ldots;$$

en les substituant dans l'équation $\alpha\gamma = k\beta\delta$ et supprimant le

Fig. 90.



produit OA.OB.OC.OD qui se trouve dans les deux membres de l'équation, on trouve

$$\frac{\sin AOB \sin COD}{\sin BOC \sin AOD} = k\frac{AB.CD}{BC.AD}.$$

Le deuxième membre de l'équation est constant, et le premier exprime le rapport anharmonique du faisceau OA, OB, OC, OD.

Les conséquences de ce théorème sont si nombreuses et si importantes que nous consacrerons un Chapitre spécial à leur développement.

260. Lorsque $S = 0$ est l'équation d'un cercle, S représente (**90**) le carré de la tangente menée au cercle par un point (x, y); et alors l'équation $S - k\alpha\beta = 0$, qui est celle d'une conique ayant α et β pour cordes d'intersection avec le cercle, exprime que : *Si le carré de la tangente menée par un point à un cercle fixe est dans un rapport constant avec le produit des distances de ce point à deux droites fixes, ce point décrit une conique passant par les quatre points d'intersection des droites avec le cercle.*

Ce théorème subsiste quelles que soient la grandeur du cercle et la nature, réelle ou imaginaire, des points d'intersection des droites avec le cercle. Dans le cas où le cercle est infiniment petit, il peut s'énoncer de la manière suivante : *Le lieu décrit par un point tel que le carré de sa distance à un point fixe soit dans un rapport constant avec le produit de ses distances à deux droites fixes, est une section conique.* Les droites fixes doivent être alors considérées comme les cordes d'intersection imaginaire de la conique avec un cercle infiniment petit ayant le point fixe pour centre.

261. On peut tirer des déductions analogues de l'équation $S - k\alpha^2 = 0$, lorsque S représente un cercle. Ainsi donc : *Le lieu des points dont les distances à une droite fixe sont dans un rapport constant avec les tangentes menées de ce point à un cercle fixe, est une conique qui touche le cercle aux deux points où il est rencontré par la droite ;* et réciproquement : *Si un cercle a un double contact avec une conique, la tangente menée au cercle par un point de cette conique est dans un rapport constant avec la distance de ce point à la corde de contact.*

Dans le cas particulier où le cercle est infiniment petit, on retombe sur la propriété fondamentale du foyer et de la directrice, par suite : *Le foyer d'une conique peut être considéré comme un cercle infiniment petit touchant la conique en deux points imaginaires situés sur la directrice.*

262. En général : *Si dans l'équation d'une conique on remplace les coordonnées courantes par celles d'un point, le résultat de la substitution est proportionnel au produit des segments de la corde menée par ce point parallèlement à une direction donnée* (*).

Si l'on désigne par c' (134) le résultat de la substitution

(*) Ce théorème s'applique aux courbes de degré quelconque.

indiquée, ce produit a pour expression (148)

$$\frac{c'}{a\cos^2\theta + 2h\cos\theta\sin\theta + b\sin^2\theta},$$

et il est proportionnel à c', tant que θ reste constant.

EXERCICES.

I. Lorsque deux coniques ont un double contact, le carré de la perpendiculaire abaissée d'un point de la première sur la corde de contact est dans un rapport constant avec le produit des segments déterminés par la seconde sur cette perpendiculaire.

II. Si une parallèle à une droite donnée rencontre deux coniques aux points P, Q, p, q, le lieu des points O tels, que les produits OP.OQ et $Op.Oq$ soient dans un rapport constant, est une conique passant par les points d'intersection des coniques données.

III. Le diamètre du cercle circonscrit au triangle, formé par deux tangentes à une conique à centre et leur corde de contact, a pour valeur $\frac{b'b''}{p}$, en désignant par b', b'' les demi-diamètres parallèles aux tangentes, et par p la distance du centre à la corde de contact (M. Burnside).

Nous supposerons, pour simplifier, qu'on ait multiplié l'équation de la conique par une constante telle, que le résultat de la substitution des coordonnées du centre soit égal à l'unité.

Soient t', t'' les longueurs des tangentes, et S' le résultat de la substitution des coordonnées de leur point d'intersection, on a

$$t'^2 : b'^2 :: S' : 1, \quad t''^2 : b''^2 :: S' : 1.$$

Soit en outre ϖ la distance à la corde de contact du sommet du triangle, la remarque du n° 152 donne la relation

$$\varpi : p :: S' : 1,$$

par suite

$$\frac{t't''}{\varpi} = \frac{b'b''}{p},$$

et on sait, par la géométrie élémentaire, que le premier membre de cette équation représente le diamètre du cercle circonscrit au triangle.

IV. L'expression (242) du rayon de courbure peut se déduire soit du théorème précédent, en supposant que les deux tangentes coïncident, soit du théorème ci-après, dû à M. Roberts.

Si l'on représente par n et n' les longueurs de deux normales qui se coupent, par p et p' les distances du centre aux tangentes correspondantes, et par b' le demi-diamètre parallèle à leur corde de contact, on a la relation

$$np + n'p' = 2b'^2.$$

En désignant par S' le résultat de la substitution des coordonnées du milieu de la corde de contact dans l'équation de la conique, par ϖ, ϖ' les distances de ce milieu aux tangentes, et par 2β la longueur de la corde : on trouve, d'après les procédés employés dans l'Exercice précédent, $\beta^2 = b'^2 S'$, $\varpi = pS'$, $\varpi' = p'S'$; on peut voir d'ailleurs que $n\varpi + n'\varpi' = 2\beta^2$.

263. *Lorsque deux coniques ont un double contact avec une troisième, les cordes de contact et deux des cordes d'intersection concourent en un même point et forment un faisceau harmonique.*

Soit $S = 0$ l'équation de la troisième conique; celles des deux autres seront

$$S + L^2 = 0, \quad S + M^2 = 0;$$

en les retranchant membre à membre, on trouve

$$L^2 - M^2 = 0$$

pour l'équation de deux des cordes d'intersection : ces cordes $L + M = 0$, $L - M = 0$ passent par l'intersection des cordes de contact L et M et forment avec elles un faisceau harmonique (57).

EXERCICES.

I. Les cordes de contact de deux coniques avec leurs tangentes communes passent par l'intersection de leurs cordes communes. Ce théorème n'est qu'un cas particulier du précédent, dont il se déduit en supposant que la conique S se transforme en deux droites.

II. Les diagonales d'un quadrilatère inscrit passent par le même point que celles du quadrilatère circonscrit correspondant, et forment avec elles un faisceau harmonique.

Ce théorème peut se déduire du précédent en y considérant S comme une conique, $S + L^2$, $S + M^2$ comme des couples de droites; on peut aussi la démontrer de la manière suivante. Soient t_1, t_2; t_3, t_4 les deux

couples de tangentes, c_1 et c_2 les cordes de contact, c'est-à-dire les diagonales du quadrilatère inscrit correspondant. L'équation de S peut se mettre sous l'une ou l'autre des formes

$$t_1 t_2 - c_1^2 = 0, \quad t_3 t_4 - c_2^2 = 0,$$

qui ne peuvent différer que par un facteur constant λ. Les expressions $c_1^2 - \lambda c_2^2$, $t_1 t_2 - \lambda t_3 t_4$ sont donc identiques. La première $c_1^2 - \lambda c_2^2 = 0$ représente deux droites qui passent par l'intersection de c_1, c_2 en formant avec elles un faisceau harmonique; la deuxième $t_1 t_2 - \lambda t_3 t_4 = 0$ est celle d'un lieu passant par les points (t_1, t_3), (t_2, t_4), (t_1, t_4) et (t_2, t_3), et montre par suite que ces droites joignent respectivement les sommets du quadrilatère circonscrit (t_1, t_3), (t_2, t_4), (t_1, t_4), et (t_2, t_3).

III. Trouver les équations des diagonales du quadrilatère formé par les tangentes menées à une conique à centre par les points ayant pour angles excentriques 2α, 2β, 2γ, 2δ.

On a dans ce cas

$$t_1 = \frac{x}{a}\cos 2\alpha + \frac{y}{b}\sin 2\alpha - 1, \quad t_2 = \frac{x}{a}\cos 2\beta + \frac{y}{b}\sin 2\beta - 1,$$

$$c_1 = \frac{x}{a}\cos(\alpha + \beta) + \frac{y}{b}\sin(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta),$$

et par suite

$$t_1 t_2 - c_1^2 = -\sin^2(\alpha - \beta)\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right).$$

En appliquant la méthode de l'Exercice précédent, on trouve, pour les équations des diagonales,

$$\frac{c_1}{\sin(\alpha - \beta)} = \pm \frac{c_2}{\sin(\gamma - \delta)}.$$

264. ***Lorsque trois coniques ont un double contact avec une quatrième, six de leurs cordes d'intersection passent trois par trois par le même point*** et forment ainsi les côtés et les diagonales d'un quadrilatère.

Les équations des coniques étant alors

$$S + L^2 = 0, \quad S + M^2 = 0, \quad S + N^2 = 0,$$

celles de leurs cordes d'intersection seront, d'après le numéro

précédent :

$$L - M = 0, \quad M - N = 0, \quad N - L = 0;$$
$$L + M = 0, \quad M + N = 0, \quad N - L = 0;$$
$$L + M = 0, \quad M - N = 0, \quad N + L = 0;$$
$$L - M = 0, \quad M + N = 0, \quad N + L = 0;$$

ces cordes passent donc trois par trois par le même point.

On peut déduire de là, comme au numéro précédent, plusieurs théorèmes particuliers en supposant qu'une ou plusieurs des coniques se transforment en couples de droites.

Ainsi, par exemple, si S représente deux droites, ces droites sont les tangentes communes à $S + M^2$, $S + N^2$, et si L est une droite menée par l'intersection de ces tangentes, $S + L^2$ se réduit à deux droites passant par cette même intersection. Donc : *Si par l'intersection des tangentes communes à deux coniques, on mène un couple de droites, les cordes qu'elles déterminent sur chaque conique se coupent sur une des cordes communes aux deux coniques.* C'est l'extension du théorème donné au nº 116. De même : *Les tangentes menées aux points où ces droites rencontrent une conique se coupent sur une des cordes communes aux deux coniques.*

265. Lorsque les coniques $S + L^2$, $S + M^2$, $S + N^2$ se transforment toutes en couples de droites, ces droites forment un hexagone circonscrit à S, et les cordes d'intersection en sont les diagonales : le théorème du nº 264 devient alors le théorème de Brianchon : *Les trois diagonales opposées d'un hexagone circonscrit à une conique se coupent en un même point.* Par diagonales *opposées* nous entendons (en supposant que les côtés soient numérotés 1, 2, 3, 4, 5 et 6) les droites qui joignent (1,2) à (4,5), (2,3) à (5,6) et (3,4) à (6,1). En changeant l'ordre des côtés, on peut former avec les mêmes droites six hexagones différents auxquels le théorème précédent reste toujours applicable.

On aurait pu démontrer le théorème de Brianchon, d'après la méthode indiquée au nº 263, Ex. II, en observant que si

$$t_1 t_4 - c_1^2 = 0, \quad t_2 t_5 - c_2^2 = 0, \quad t_3 t_6 - c_3^2 = 0$$

sont des formes équivalentes de l'équation $S = o$, $c_1 = c_2 = c_3$ représentent trois diagonales concourantes (*).

266. *Lorsque trois coniques ont une corde commune, les trois cordes d'intersection non communes se coupent en un même point.*

Soient $S = o$, $L = o$ les équations d'une des coniques et de la corde commune, les équations des deux autres coniques seront

$$S + LM = o, \quad S + LN = o,$$

et on aura, pour leurs cordes d'intersection,

$$L(M - N) = o;$$

la corde $M - N$, non commune aux trois coniques, passe par l'intersection de M et N.

D'après la remarque du n° 257, ce théorème n'est qu'une extension de celui du n° 108 : les axes radicaux de trois cercles se coupent en un même point, puisque les trois cercles ont une corde commune (la droite à l'infini) et que les axes radicaux sont des cordes d'intersection non communes.

Le théorème du n° 264 peut aussi être regardé comme une extension du même théorème, puisque trois coniques qui ont un double contact avec une quatrième peuvent être considérées comme ayant quatre centres radicaux par chacun desquels passent trois de leurs cordes d'intersection non communes.

On pourrait encore énoncer de la manière suivante le théorème démontré ci-dessus : *La corde d'intersection des coniques passant par quatre points, avec une conique fixe menée par deux de ces points, passe par un point fixe.*

(*) M. Todhunter a fait observer avec raison, qu'en l'absence de règle precise pour déterminer quelle est celle des diagonales de $t_1 t_4 t_2 t_5$ definie par $c_1 = + c_2$, la demonstration qui vient d'être donnee ne prouve qu'une chose, à savoir : que les droites joignant (1, 2) à (4, 5), et (2, 3) à (5, 6) se coupent, soit sur la droite (3, 4), (6, 1), soit sur la droite (1, 3), (4, 6). Mais, dans ce dernier cas, les triangles 123, 456 sont homologues (60, Ex. III), et les points 14, 25, 36 sont en ligne droite; en supposant alors que cinq des côtes de l'hexagone soient fixes et tangents à une conique, le sixième côté, au lieu d'être tangent à la conique, passe par un point fixe.

EXERCICES.

I. Si par deux des points d'intersection A et B de deux coniques (*fig.* 91), on mène des droites AP, BQ rencontrant les coniques en P, Q,

Fig. 91.



p, q, les cordes PQ, pq se coupent sur la corde CD commune aux deux coniques.

Les droites OA, OB peuvent en effet être considérées comme une troisième conique.

II. Lorsque deux droites menées par le point de contact de deux coniques les rencontrent en P, p, Q, q, les cordes PQ, pq se coupent sur la corde d'intersection des deux coniques.

Ce théorème peut être considéré comme un cas particulier de celui du n° 264, puisque l'intersection des tangentes communes à deux coniques qui se touchent se réduit au point de contact (117, Cor.).

267. L'équation ($\alpha\gamma = k\beta\delta$) d'une conique circonscrite à un quadrilatère peut nous servir à démontrer le théorème de Pascal : *Les trois points de concours des côtés opposés d'un hexagone inscrit dans une conique sont en ligne droite.*

Désignons les sommets de l'hexagone par a, b, c, d, e, f, et les droites joignant les points a et b, b et c,... par ab, bc.... La conique étant circonscrite au quadrilatère $abcd$, son équation peut se mettre sous la forme

$$ab.cd - bc.ad = 0.$$

On peut aussi l'écrire

$$de.fa - ef.ad = 0,$$

puisque la conique est circonscrite au quadrilatère $defa$. En combinant ces équations, on a

$$ab.cd - de.fa = (bc - ef)ad.$$

Le premier membre de cette équation qui, en raison de sa forme, est celle d'une figure circonscrite au quadrilatère formé par les droites ab, de, cd, af, peut se décomposer en deux facteurs, et représente, par suite, les diagonales de ce quadrilatère. Et, comme ad est évidemment la diagonale qui joint les sommets a et d, $bc - ef$ doit être l'autre diagonale menée par les points (ab, de), (cd, af); il est d'ailleurs évident, d'après son équation, qu'elle passe par le point (bc, ef). Ces trois points sont donc en ligne droite.

268. On peut, comme pour le théorème de Brianchon, obtenir un certain nombre de théorèmes relatifs à ces six points, en les prenant dans divers ordres. Ainsi, la conique étant circonscrite au quadrilatère $bcef$, son équation peut s'écrire

$$be.cf - bc.ef = 0.$$

En l'identifiant avec la première équation du numéro précédent, il vient

$$ab.cd - be.cf = (ad - ef)bc.$$

Les trois points (ab, cf), (cd, be), (ad, ef) sont donc sur la droite $ad - ef = 0$.

On trouverait de même, en identifiant la deuxième et la troisième forme de l'équation de la conique, que les trois points (de, cf), (fa, be), (ad, bc) sont sur une même droite $bc - ad = 0$. D'ailleurs les trois droites

$$bc - ef = 0, \quad ef - ad = 0, \quad ad - bc = 0$$

se coupent en un même point (41). De là le théorème de Steiner : *Les trois lignes de Pascal, obtenues en prenant les sommets de l'hexagone dans les ordres successifs : abcdef, adcfeb, afcbed, passent par un même point.* On trouvera de plus amples développements à ce sujet dans une Note placée à la fin de ce volume.

EXERCICES.

I. Si l'on prend trois points a, b, c sur une droite, et trois points a', b', c' sur une autre, les intersections $(bc', b'c)$, $(ca', c'a)$, $(ab', a'b)$ sont en en ligne droite.

Ce théorème n'est qu'un cas particulier de celui de Pascal, et subsiste encore lorsqu'une des droites est à l'infini; les lignes ba' et ca', cb' et ab', ac' et bc' forment alors trois couples de droites parallèles.

II. Quatre droites déterminent quatre triangles (qu'on obtient en ne considérant successivement que trois d'entre elles); les quatre intersections des hauteurs de ces triangles sont en ligne droite.

Car, en désignant par a, b, c d, les quatre droites données, et par a', b', c', d' quatre droites perpendiculaires, nous pouvons appliquer le théorème précédent aux trois points d'intersection de a, b, c avec d, et aux trois points situés à l'infini sur a', b, c' (*).

III. Le théorème de Steiner : « Le point de rencontre des hauteurs du triangle circonscrit à une parabole se trouve sur la directrice », peut se déduire de celui de Brianchon.

Désignons, en effet, par a, b, c les trois tangentes, par a', b', c' les tangentes perpendiculaires, et par ∞ la ligne a l'infini, qui est aussi une tangente (254). Les six droites a, b, c, c', ∞, a' étant des tangentes, les droites (ab, $c'\infty$), (bc, $a'\infty$), (cc', aa') se coupent en un même point. Or les deux premières sont des hauteurs du triangle, et la dernière est la directrice sur laquelle se coupent les couples de tangentes perpendiculaires (221). Cette démonstration est due à M. John C. Moore.

IV. On donne cinq tangentes d'une conique : trouver le point de contact de l'une d'elles.

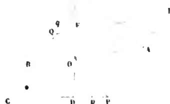
ABCDE étant le pentagone formé par les tangentes, les diagonales AC, BE se coupant en O, la droite DO passera par le point de contact situé sur AB. Cette solution se déduit du théorème de Brianchon, en supposant infiniment voisins deux des côtés de l'hexagone ; on sait, en effet, qu'une tangente est coupée au point de contact par la tangente infiniment voisine (139).

269. Le théorème de Pascal permet de construire par points une conique dont on connaît cinq points A, B, C, D, E (*fig.* 92),

(*) Cette démonstration m'a été communiquée à la fois par MM. de Morgan et Burnside. Le théorème lui-même peut se déduire de celui de Steiner (227, Ex. III), puisque les quatre points de concours des hauteurs se trouvent sur la directrice de la parabole tangente aux quatre droites données. On en conclurait, en se basant sur le Corollaire IV du n° 123, que les cercles circonscrits aux quatre triangles passent par un même point, le foyer de la parabole. Dans le cas de cinq droites, les foyers des cinq paraboles tangentes à quatre d'entre elles se trouvent sur un cercle (Auguste Miquel). *Voir* CATALAN, *Théorèmes et Problèmes de Géométrie élémentaire*, p. 93.

puisqu'on peut alors, en menant une droite quelconque AP par un des points donnés, déterminer le point F où elle ren-

Fig. 92.



contre de nouveau la courbe, et, par suite, autant de points de la conique qu'on voudra. En effet, d'après ce théorème, F étant un sixième point de la courbe, les points d'intersection (AB, DE) ou O, (BC, EF) ou Q, (CD, AF) ou P sont en ligne droite, et les points O et P sont connus par hypothèse. Si donc on joint O et P, E et Q (Q étant l'intersection de BC avec OP), le point F se trouvera à la rencontre de QE avec AP. En d'autres termes, F *est le sommet du triangle* FPQ *dont les côtés passent par les points fixes* A, E, O, *et dont les deux autres sommets* P *et* Q *glissent le long de deux droites fixes* CD *et* CB. (*Voir* aussi n° 47, Ex. III). C'est sous cette forme que le théorème a été donné par Mac Laurin.

EXERCICES.

I. Trouver le centre d'une conique dont on connaît cinq points.

Menons AP parallèle à BC (*fig.* 92), et déterminons le point F; AF et BC sont alors deux cordes parallèles; en joignant leurs milieux, on aura un diamètre. On déterminerait de même un autre diamètre, et par suite le centre, en menant QE parallèle à CD.

II. Mener une tangente à une conique par un des cinq points qui la définissent. Le point F coïncide alors avec A, et QF prend la position qA : pA est donc la tangente cherchée.

III. Trouver, en coordonnées trilinéaires (62), le lieu du sommet d'un triangle dont les deux autres sommets glissent sur deux droites fixes, et dont les côtés passent par trois points fixes. (C'est, ainsi que nous venons de le voir, le mode de génération des coniques indiqué par Mac Laurin.)

Soient α, β, γ les côtés du triangle formé par les points fixes,

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0, \quad l'\alpha + m'\beta + n'\gamma = 0$$

les équations des droites fixes, $\alpha = \mu\beta$ celle de la base. La droite joignant (β, γ) à l'intersection de la base avec la premiere droite fixe aura pour équation

$$(l\mu + m)\beta + n\gamma = 0;$$

de même la droite qui joint (α, γ) à l'intersection de la base avec la deuxième droite fixe sera

$$(l'\mu + m')\alpha + n'\mu\gamma = 0.$$

En éliminant μ entre ces deux équations, on trouve, pour le lieu cherché,

$$lm'\alpha\beta = (m\beta + n\gamma)(l'\alpha + n'\gamma).$$

C'est uno conique passant par les points

$$(\beta, \gamma), \quad (\gamma, \alpha), \quad (\alpha, l\alpha + m\beta + n\gamma), \quad (\beta, l'\alpha + m'\beta + n'\gamma).$$

§ II. — Des équations rapportées a deux tangentes et a leur corde de contact.

270. Lorsqu'une conique est rapportée à deux tangentes L, M et à leur corde de contact R, on peut déterminer la position d'un point de la courbe par une seule variable (comme nous l'avons déjà fait au n° 229), et arriver ainsi à formuler plus simplement un certain nombre de démonstrations.

L'équation de la conique étant alors (252) $LM = R^2$, $\mu L = R$ représente une droite passant par le point LR et par un point de la courbe que nous appellerons le point μ; en combinant cette équation avec celle de la conique, on trouve $M = \mu R$ et $\mu^2 L = M$ pour les équations des droites qui joignent le point μ aux points MR et LM, et deux quelconques de ces trois équations déterminent un point de la conique.

L'équation de la corde joignant deux points μ et μ' de la courbe sera

$$\mu\mu' L - (\mu + \mu')R + M = 0,$$

puisqu'elle est évidemment satisfaite par l'une ou l'autre des hypothèses

$$(\mu L = R, \ \mu R = M), \quad (\mu' L = R, \ \mu' R = M).$$

Si μ et μ' coïncident, cette équation devient celle de la tangente

$$\mu^2 L - 2\mu R + M = 0,$$

qui renferme l'indéterminée μ au second degré. Réciproquement, si l'équation d'une droite ($\mu^2 L - 2\mu R + M = 0$) renferme une indéterminée μ au second degré, la droite qu'elle représente est constamment tangente à la conique $LM = R^2$.

271. *Trouver l'équation de la polaire d'un point.*

Soit

$$\mu^2 L' - 2\mu R' + M' = 0$$

le résultat de la substitution des coordonnées d'un point dans l'une ou l'autre des équations des tangentes menées par ce point. Comme on a au point de contact (270) $\mu^2 = \frac{M}{L}$, $\mu = \frac{R}{L}$, les coordonnées du point de contact satisfont à la relation

$$ML' - 2RR' + LM' = 0,$$

qui est par conséquent l'équation de la polaire cherchée.

Si le point était défini par l'intersection des deux droites $aL = R$, $bR = M$, on trouverait, en suivant la même méthode, pour l'équation de sa polaire,

$$abL - 2aR + M = 0.$$

272. Si l'on élimine R entre les équations de deux tangentes

$$\mu^2 L - 2\mu R + M = 0, \quad \mu'^2 L - 2\mu' R + M' = 0,$$

on trouve $\mu\mu' L = M$ pour l'équation de la droite qui joint LM à l'intersection de ces tangentes. Si donc on se donne le produit de deux μ, $\mu\mu' = a$, l'intersection des tangentes correspondantes à μ et μ' sera sur la droite fixe $aL = M$, et la corde qui les joint passera par le point fixe ($aL + M$, R), ainsi qu'il est facile de le voir en remplaçant $\mu\mu'$ par a dans l'équation de la corde.

De plus, puisque l'équation de la droite joignant un point μ au point LM est $\mu^2 L = M$, les points $+\mu$ et $-\mu$ sont sur une même droite qui passe par LM.

Enfin lorsque $LM = R^2$, $LM = R'^2$ représentent deux coniques ayant L et M pour tangentes communes, la ligne qui joint le point $+\mu$ d'une de ces coniques à l'un des points $\pm\mu$ de l'autre passe par l'intersection LM des tangentes communes, puisque l'équation $\mu^2 L = M$ est indépendante de R et de R'. On dit alors que le point $+\mu$ de l'une des coniques *correspond directement* au point $+\mu$, et *inversement* au point $-\mu$ de l'autre; et que la corde joignant deux points de l'une des coniques correspond à la corde menée par les points correspondants de l'autre.

Nous aurons occasion d'appliquer ces remarques dans les Exercices suivants.

EXERCICES.

I. Les cordes correspondantes de deux coniques se coupent sur une des cordes d'intersection des deux coniques.

Les coniques $LM - R^2$, $LM - R'^2$ ont $R^2 - R'^2$ pour cordes communes. Mais les cordes correspondantes, ayant pour équations

$$\mu\mu' L - (\mu + \mu') R + M = 0, \quad \mu\mu' L - (\mu + \mu') R' + M = 0,$$

se rencontrent évidemment sur $R - R'$; elles se coupent sur $R + R'$, lorsque μ et μ' sont de signes différents dans la deuxième équation.

II. Trouver le lieu du sommet d'un triangle circonscrit à une conique, et dont les deux autres sommets glissent sur des droites fixes.

Prenons pour lignes de référence les deux tangentes menées à la conique par l'intersection des droites fixes et leur corde de contact : les équations de ces droites seront alors

$$aL - M = 0, \quad bL - M = 0,$$

et celle de la conique

$$LM - R^2 = 0.$$

Mais nous avons prouvé (272) que lorsque deux tangentes se coupent sur $aL - M$, le produit des μ des points de contact est égal à a; donc si un des côtés du triangle est tangent en μ, les autres le sont aux points $\frac{a}{\mu}$, $\frac{b}{\mu}$, et ont par suite pour équations

$$\frac{a^2}{\mu^2} L - 2\frac{a}{\mu} R + M = 0, \quad \frac{b^2}{\mu^2} L - 2\frac{b}{\mu} R + M = 0.$$

En éliminant μ entre ces deux équations, on trouve, pour le lieu cherché,

$$LM = \frac{4ab}{(a+b)^2} R^2;$$

c'est une conique, ayant avec la conique donnée un double contact suivant la corde R (*).

III. Un triangle est inscrit dans une conique, deux de ses côtés passent par deux points fixes : trouver l'enveloppe du troisième côté.

Prenons pour R la droite menée par les points fixes, et soit $LM = R^2$ l'équation de la conique, les droites qui joignent les points fixes à LM seront représentées par

$$aL + M = 0, \quad bL + M = 0.$$

On sait (272) que le produit des μ des extrémités d'une corde passant par $(aL + M, R)$ est égal à a. Si donc le sommet opposé au troisième côté est pris pour μ, les extrémités de ce côté seront $\frac{a}{\mu}$ et $\frac{b}{\mu}$, il aura pour équation

$$abL - (a+b)\mu R + \mu^2 M = 0,$$

et sera, par suite, constamment tangent (270) à la conique

$$LM = \frac{(a+b)^2}{4ab} R^2,$$

qui a un double contact avec la conique donnée, suivant la droite qui joint les points fixes.

IV. Inscrire, dans une section conique, un triangle dont les côtés passent par trois points donnés.

En prenant, comme dans l'Exercice précédent, pour R la droite qui passe par deux des points fixes, on aura, pour l'équation d'un des côtés du triangle, μ indiquant le sommet opposé,

$$abL - (a+b)\mu R + \mu^2 M = 0.$$

Si l'on exprime que ce côté passe par le troisième point fixe $cL - R = 0$,

(*) Le même raisonnement s'applique également au cas où le point LM étant à l'intérieur de la conique, les tangentes L et M sont imaginaires. On peut aussi démontrer, par les procédés qui seront indiqués au paragraphe suivant, que lorsque l'équation de la conique est de la forme $L^2 + M^2 = R^2$, le lieu est représenté par $L^2 + M^2 = k^2R^2$.

$dR - M = o$, on obtient l'équation

$$ab - (a + b)\mu c + \mu^2 cd = o,$$

qui suffit pour déterminer μ.

Et comme on a $\mu L = R$, $\mu^2 L = M$, les coordonnées de μ satisfont à la relation

$$abL - (a + b)cR + cdM = o.$$

La question admet donc deux solutions, qu'on obtient en prenant successivement pour sommets du triangle les deux points où cette dernière droite rencontre la conique. Nous indiquerons plus loin (297, Ex. VII) la construction géométrique de cette droite.

V. La base d'un triangle touche une conique donnée; ses extrémités glissent sur deux tangentes fixes, et les deux autres côtés passent par deux points fixes : trouver le lieu du sommet.

Soient L et M les deux tangentes fixes, $LM = R^2$ l'équation de la conique. Le point d'intersection de la droite L avec une tangente $(\mu^2 L - 2\mu R + M)$ aura ses coordonnées L, R, M respectivement proportionnelles à o, 1, 2μ; et l'équation de la droite qui la joint à un point fixe (L′, R′, M′) sera (65)

$$LM' - L'M = 2\mu(LR' - L'R).$$

De même, l'équation de la droite qui joint le point fixe (L″, R″, M″) à l'intersection (2, μ, o) de M avec la même tangente sera

$$2(RM'' - R''M) = \mu(LM'' - L''M).$$

En éliminant μ, on trouve, pour le lieu du sommet, l'équation

$$(LM' - L'M)(LM'' - L''M) = 4(LR' - L'R)(RM'' - R''M),$$

qui représente une conique passant par les deux points donnés.

273. La corde qui joint les points $\mu \operatorname{tang}\varphi$, $\mu \cot\varphi$ (φ étant un angle constant) est constamment tangente à une conique ayant un double contact avec la conique donnée; car (270) l'équation de cette corde

$$\mu^2 L - \mu R(\operatorname{tang}\varphi + \cot\varphi) + M = o,$$

en vertu de la relation $\operatorname{tang}\varphi + \cot\varphi = 2 \operatorname{coséc} 2\varphi$, représente la tangente en μ à la conique $LM \sin^2 2\varphi = R^2$.

On prouverait de même que le lieu de l'intersection des tangentes en $\mu \operatorname{tang}\varphi$, $\mu \cot\varphi$ est la conique $LM = R^2 \sin^2 2\varphi$.

EXERCICE.

Dans l'Exercice V du n° 272, on remplace les deux tangentes fixes par une conique ayant un double contact avec la conique donnée et passant par les deux points fixes : trouver le lieu du sommet.

Soient

$$LM - R^2 = o, \quad LM \sin^2 2\varphi - R^2 = o,$$

les équations des deux coniques : la droite qui touche la dernière au point μ, rencontre la première aux points $\mu \operatorname{tang}\varphi$, $\mu \cot\varphi$; d'ailleurs μ' et μ'' étant les points fixes, les équations des deux côtés sont

$$\mu\mu' L \operatorname{tang}\varphi - (\mu' + \mu \operatorname{tang}\varphi) R + M = o,$$
$$\mu\mu'' L \cot\varphi - (\mu'' + \mu \cot\varphi) R + M = o,$$

et en éliminant μ, on trouve, pour l'équation du lieu,

$$(M - \mu' R)(\mu'' L - R) = \operatorname{tang}^2\varphi\,(M - \mu'' R)(\mu' L - R).$$

274. *Le rapport anharmonique du faisceau obtenu en joignant un point quelconque μ d'une conique à quatre points fixes μ', μ'', μ''', μ^{iv} de cette conique est constant* (259).

Les droites qui joignent les quatre points fixes μ', μ'',... de la conique à un cinquième point μ ont pour équations

$$\mu'(\mu L - R) + (M - \mu R) = o, \quad \mu'''(\mu L - R) + (M - \mu R) = o,$$
$$\mu''(\mu L - R) + (M - \mu R) = o, \quad \mu^{\text{iv}}(\mu L - R) + (M - \mu R) = o;$$

le rapport anharmonique du faisceau qu'elles forment ayant pour valeur (58)

$$\frac{(\mu' - \mu'')}{(\mu' - \mu''')}\,\frac{(\mu''' - \mu^{\text{iv}})}{(\mu'' - \mu^{\text{iv}})},$$

est indépendant de la position du point μ.

Nous appellerons, pour abréger, *rapport anharmonique de quatre points d'une conique* le rapport anharmonique du faisceau obtenu en joignant ces quatre points à un point quelconque de la courbe.

275. *Le rapport anharmonique des points suivant lesquels une tangente mobile est coupée par quatre tangentes fixes est constant.*

Supposons que les tangentes fixes soient celles des points μ', μ'', μ''', μ^{iv}, et que la tangente mobile soit celle du point μ. Le rapport anharmonique en question est le même que celui du faisceau formé en joignant les quatre points d'intersection au point LM. Mais les droites de ce faisceau ont pour équations (272)

$$\mu'\mu L - M = 0, \quad \mu''\mu L - M = 0, \quad \mu'''\mu L - M = 0, \quad \mu^{\text{iv}}\mu L - M = 0,$$

et forment ainsi un système *homographique* (59) avec celui du numéro précédent. Elles ont par conséquent même rapport anharmonique. Ainsi donc, le rapport anharmonique de quatre tangentes est le même que celui de leurs points de contact.

276. L'expression du rapport anharmonique de quatre points d'une conique μ', μ'', μ''', μ^{iv} (274) ne change pas lorsque tous ces points changent de signe; donc (272) *le rapport anharmonique de quatre des points* (μ', μ'', μ''', μ^{iv}) *déterminés sur une conique par quatre droites issues du point* LM *est égal au rapport anharmonique des quatre autres points* ($-\mu'$, $-\mu''$, $-\mu'''$, $-\mu^{\text{iv}}$) *déterminés par ces droites sur la conique.*

Pour la même raison, *le rapport anharmonique de quatre points d'une conique est égal au rapport anharmonique des quatre points correspondants d'une autre conique.* De plus, la valeur du rapport anharmonique (274) ne changeant pas quand on y remplace μ par $\mu \tang \varphi$, ou $\mu \cotang \varphi$: *Lorsque deux coniques* S *et* S' *ont un double contact, le rapport anharmonique de quatre des points déterminés sur* S *par quatre tangentes à* S' *est égal au rapport anharmonique des quatre autres points déterminés par ces tangentes, ainsi qu'à celui des quatre points de contact sur* S'. Ce dernier théorème est dû à M. Townsend.

277. Réciproquement, lorsque l'on donne trois cordes aa', bb', cc' d'une conique, l'enveloppe d'une quatrième corde dd', telle que le rapport anharmonique de $abcd$ soit égal à celui de $a'b'c'd'$, est une conique ayant double contact avec la co-

nique donnée. Soient, en effet, a, b, c, a', b', c' les valeurs de μ pour les six points fixes, μ et μ' celles relatives aux extrémités de la corde mobile; l'équation

$$\frac{(a-b)(c-\mu)}{(a-c)(b-\mu)} = \frac{(a'-b')(c'-\mu')}{(a'-c')(b'-\mu')}$$

pourra se mettre sous la forme

$$A\mu\mu' + B\mu + C\mu' + D = o,$$

A, B, C et D étant des constantes. En éliminant μ' entre cette équation et celle de la corde

$$\mu\mu' L - (\mu + \mu')R + M = o,$$

il vient successivement

$$\mu(B\mu + D)L + R[\mu(A\mu + C) - (B\mu + D)] - M(A\mu + C) = o,$$

$$\mu^2(BL + AR) + \mu[DL + (C - B)R - AM] - (DR + CM) = o;$$

par suite (270), la corde mobile est constamment tangente à la conique

$$[DL + (C - B)R - AM]^2 + 4(BL + AR)(DR + CM) = o.$$

Cette équation pouvant se mettre sous la forme

$$4(BC - AD)(LM - R^2) + [DL + (B + C)R + AM]^2 = o,$$

la conique qu'elle représente a un double contact avec la conique donnée $LM - R^2 = o$.

Dans le cas particulier où $B = C$, la relation qui existe entre μ et μ' devient

$$A\mu\mu' + B(\mu + \mu') + D = o,$$

et (51) exprime que la corde $\mu\mu' L - (\mu + \mu')R + M$ passe par un point fixe.

§ III. — Des équations rapportées aux côtés d'un triangle autopolaire.

278. L'équation d'une conique rapportée aux côtés d'un triangle autopolaire étant (258)

$$l^2\alpha^2 + m^2\beta^2 = n^2\gamma^2,$$

on peut représenter un point de la courbe par une seule indéterminée φ. En posant $l\alpha = n\gamma\cos\varphi$, $m\beta = n\gamma\sin\varphi$, on a, comme aux nos 102, 231, pour la corde qui joint deux points, φ et φ', l'équation

$$l\alpha\cos\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi') + m\beta\sin\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi') = n\gamma\cos\tfrac{1}{2}(\varphi-\varphi'),$$

qui devient, dans le cas de la tangente,

$$l\alpha\cos\varphi + m\beta\sin\varphi = n\gamma.$$

Si, pour plus de symétrie, on représente la conique par

$$a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 = 0,$$

la tangente en $(\alpha', \beta', \gamma')$ sera, ainsi qu'on peut le voir en partant de l'équation précédente,

$$a\alpha\alpha' + b\beta\beta' + c\gamma\gamma' = 0.$$

L'équation de la polaire d'un point $(\alpha', \beta', \gamma')$ sera nécessairement de la même forme (89). En la comparant avec

$$\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma = 0,$$

on voit que le pôle de cette dernière ligne a pour coordonnées $\frac{\lambda}{a}, \frac{\mu}{b}, \frac{\nu}{c}$; et puisque le pôle d'une tangente est situé sur la courbe, la condition pour que la droite $\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma$ soit tangente à la conique peut s'écrire

$$\frac{\lambda^2}{a} + \frac{\mu^2}{b} + \frac{\nu^2}{c} = 0.$$

Lorsque cette condition est remplie, la conique est évidemment tangente aux quatre droites $\lambda\alpha \pm \mu\beta \pm \nu\gamma$, et les lignes de référence sont les diagonales du quadrilatère formé par ces droites (146, Ex. III). On verrait de même que la condition $a\alpha'^2 + b\beta'^2 + c\gamma'^2 = 0$ exprime que la conique passe par les quatre points $(\alpha', \pm\beta', \pm\gamma')$.

EXERCICES.

I. Trouver le lieu du pôle d'une droite donnée $\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma$ par

rapport aux coniques passant par quatre points fixes $(\alpha', \pm\beta', \pm\gamma)$.

RÉPONSE. $$\frac{\lambda\alpha'^2}{\alpha}+\frac{\mu\beta'^2}{\beta}+\frac{\nu\gamma'^2}{\gamma}=0.$$

II. Trouver le lieu du pôle d'une droite donnée $\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma=0$ par rapport aux coniques tangentes aux quatre droites fixes $l\alpha \pm m\beta \pm n\gamma$.

RÉPONSE. $$\frac{l^2\alpha}{\lambda}+\frac{m^2\beta}{\mu}+\frac{n^2\gamma}{\nu}=0.$$

Le lieu des centres des coniques est donné par les mêmes formules, puisque le centre est le pôle de la droite à l'infini

$$\alpha\sin A+\beta\sin B+\gamma\sin C=0.$$

III. Quelle est l'équation du cercle ayant le triangle de référence pour triangle autopolaire?

RÉPONSE. $\alpha^2\sin 2A+\beta^2\sin 2B+\gamma^2\sin 2C=0$ (128, Ex. II).

Il est facile de voir que le centre de ce cercle se trouve au point de concours des hauteurs du triangle, puisque le carré du rayon est égal au rectangle construit sur les segments que ce cercle détermine sur une quelconque des hauteurs, rectangle qui a le signe + lorsque le triangle a un angle obtus, et le signe — dans le cas contraire. Dans ce dernier cas, le cercle est imaginaire.

279. La détermination des propriétés des foyers est une des applications les plus remarquables de l'équation qui fait l'objet de ce paragraphe, car si $x=0$, $y=0$ représentent les côtés d'un angle droit dont le sommet est au foyer, et γ la directrice, la conique a pour équation

$$x^2+y^2=e^2\gamma^2,$$

qui n'est qu'un cas particulier de celle que nous étudions.

Il résulte de cette équation que les deux droites imaginaires $x^2+y^2=0$ sont des tangentes menées par le foyer, et puisque ces droites sont les mêmes quel que soit γ, on voit que : *Toutes les coniques qui ont un même foyer ont deux tangentes imaginaires communes passant par ce foyer.* Donc : *Toutes les coniques homofocales ont quatre tangentes imaginaires communes et peuvent être considérées comme inscrites dans le*

même quadrilatère. Les tangentes imaginaires $(x^2+y^2=0)$ menées par le foyer se confondent avec les droites qui le joignent aux deux points d'un cercle, imaginaires et situés à l'infini (257). De là une conception générale des foyers : *Si par chacun des deux points d'un cercle, imaginaires et situés à l'infini, on mène des tangentes à une conique, on forme un quadrilatère ayant deux sommets réels et deux sommets imaginaires ; les premiers coïncident avec les foyers de la conique, les seconds peuvent être considérés comme les foyers imaginaires de la courbe.*

EXERCICE.

Déterminer les foyers de la conique représentée par l'équation générale.

Il suffit, pour cette détermination, d'exprimer que la droite

$$x-x'+(y-y)\sqrt{-1}$$

est tangente à la courbe. En remplaçant, dans la formule du n° 151, λ, μ et ν respectivement par 1, $\sqrt{-1}$, $-(x'+y'\sqrt{-1})$, et en égalant séparément à zéro les expressions réelle et imaginaire, on voit que les foyers sont déterminés par l'intersection des deux hyperboles

$$C(x^2-y^2)+2Fy-2Gx+A-B=0,\quad Cxy-Fx-Gy+H=0,$$

qui sont équilatères et concentriques à la conique donnée. En mettant leurs équations sous la forme

$$(Cx-G)^2-(Cy-F)^2=G^2-AC-F^2+BC=\Delta(a-b),$$
$$(Cx-G)(Cy-F)=FG-CH=\Delta h,$$

on trouve, pour les coordonnées x, y du foyer,

$$(Cx-G)^2=\tfrac{1}{2}\Delta(R+a-b),\quad (Cy-F)^2=\tfrac{1}{2}\Delta(R+b-a),$$

en conservant à R et Δ les significations indiquées aux n°s 151 et 157, Ex. III.

Lorsque la conique est une parabole, on a $C=0$, les équations ci-dessus se réduisent au premier degré, et il vient

$$(F^2+G^2)x=FH+\tfrac{1}{2}(A-B)G,\quad (F^2+G^2)y=GH+\tfrac{1}{2}(B-A)F.$$

280. Les tangentes menées par (γ, x) à la courbe sont évidemment $e\gamma+x$ et $e\gamma-x$; dans le cas de la parabole, où $e=1$, elles forment les bissectrices intérieure et extérieure

de l'angle $(x.\gamma)$. Donc: *Les tangentes menées à la parabole par un point de la directrice se coupent à angle droit.*

En général, on peut prendre $x = e\gamma\cos\varphi$, $y = e\gamma\sin\varphi$, et l'on a

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang}\varphi;$$

φ est donc l'angle que le rayon vecteur issu du foyer fait avec l'axe des x. Cette remarque permet de trouver l'enveloppe d'une corde vue du foyer sous un angle constant; en effet la corde passant par les deux points φ et φ' a pour équation

$$x\cos\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi') + y\sin\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi') = e\gamma\cos\tfrac{1}{2}(\varphi-\varphi'),$$

et comme $\varphi - \varphi'$ est constant, elle est constamment tangente à la conique

$$x^2 + y^2 = e^2\gamma^2\cos^2\tfrac{1}{2}(\varphi-\varphi'),$$

qui a même foyer et même directrice que la conique donnée.

281. L'équation de la droite qui joint le foyer à l'intersection de deux tangentes s'obtient en retranchant l'une de l'autre les équations

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - e\gamma = 0,$$
$$x\cos\varphi' + y\sin\varphi' - e\gamma = 0,$$

ce qui donne

$$x\sin\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi') - y\cos\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi') = 0;$$

cette droite, faisant un angle $\frac{1}{2}(\varphi+\varphi')$ avec l'axe des x, est par conséquent la bissectrice de l'angle formé par les rayons vecteurs allant du foyer aux points de contact φ et φ'.

La droite qui joint au foyer le point où la corde de contact rencontre la directrice a pour équation

$$x\cos\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi') + y\sin\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi') = 0;$$

elle est perpendiculaire à la précédente.

Trouver le lieu de l'intersection des tangentes dont la corde de contact est vue du foyer sous un angle donné 2δ.

Par une élimination analogue à celle du n° 102, Ex. II, on trouve pour ce lieu l'équation

$$(x^2 + y^2)\cos^2\delta = e^2\gamma^2,$$

qui est celle d'une conique ayant même foyer, même directrice que la conique donnée, et $\frac{e}{\cos\delta}$ pour excentricité.

Lorsque la courbe est une parabole, l'angle formé par les tangentes se trouve donné; car la tangente $x\cos\varphi + y\sin\varphi - \gamma$ est la bissectrice de l'angle compris entre les droites $x\cos\varphi + y\sin\varphi$ et γ. Par suite l'angle compris entre les tangentes est la moitié de celui que forment les droites $x\cos\varphi + y\sin\varphi$ et $x\cos\varphi' + y\sin\varphi'$, c'est-à-dire qu'il est égal à $\frac{1}{2}(\varphi - \varphi')$. Donc : *L'angle compris entre deux tangentes à une parabole est la moitié de l'angle sous lequel leur corde de contact est vue du foyer;* de plus : *Le lieu de l'intersection des tangentes à la parabole faisant entre elles un angle donné est une hyperbole ayant même foyer, même directrice et dont l'excentricité est égale à la sécante de l'angle donné.* L'angle des asymptotes de cette hyperbole est le double de l'angle donné (167).

282. *Deux coniques ont toujours un triangle autopolaire commun.*

En effet (146, Ex. I), lorsque deux coniques se coupent aux points A, B, C, D, le triangle formé en joignant les points E, F, O de concours de chacun des couples de cordes d'intersection, est autopolaire par rapport à l'une et à l'autre des coniques. Si alors on désigne par α, β, γ les côtés de ce triangle, les équations des coniques pourront s'écrire

$$a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 = 0, \quad a'\alpha^2 + b'\beta^2 + c'\gamma^2 = 0.$$

Nous discuterons du reste plus tard les procédés analytiques à employer pour réduire à cette forme les équations des coniques.

Si les coniques se coupent en quatre points imaginaires, les droites α, β, γ sont encore réelles. On sait, en effet, que lorsqu'une équation à coefficients réels est satisfaite par les coor-

données $x' + x''\sqrt{-1}$, $y' + y''\sqrt{-1}$, elle l'est également par $x' - x''\sqrt{-1}$, $y' - y''\sqrt{-1}$: d'ailleurs la droite qui joint ces points est réelle. Les quatre points imaginaires communs aux deux coniques sont donc $(x' \pm x''\sqrt{-1}, y' \pm y''\sqrt{-1})$, $(x''' \pm x^{\text{IV}}\sqrt{-1}, y''' \pm y^{\text{IV}}\sqrt{-1})$: et il y a deux cordes communes réelles et quatre imaginaires. Ces dernières, ayant des équations de la forme $L \pm M\sqrt{-1}$, $L' \pm M'\sqrt{-1}$, se coupent en des points réels LM, $L'M'$. Les sommets du triangle autopolaire EFO sont donc tous réels.

Lorsque les coniques se coupent en deux points réels et deux points imaginaires, deux des cordes communes sont réelles (ce sont celles qui joignent les deux points réels ou les deux points imaginaires) et quatre imaginaires. Chacune de ces dernières passant par un des points réels ne peut avoir un deuxième point réel. Par suite, un des trois points E, F, O est réel, les deux autres sont imaginaires; le triangle autopolaire a donc alors un de ses côtés réel et deux imaginaires.

EXERCICES.

1. Un triangle est tangent à une conique S; deux de ses sommets glissent sur une conique S' : trouver le lieu décrit par le troisième sommet.

Soient $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ l'équation de S, $ax^2 + by^2 - cz^2 = 0$ celle de S'. Les coordonnées de l'intersection des tangentes en α et γ à S sont (102, Ex. 1) $\cos\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)$, $\sin\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)$, $\cos\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)$: les conditions du problème donnent la relation

$$a\cos^2\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma) + b\sin^2\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma) = c\cos^2\tfrac{1}{2}(\alpha-\gamma),$$

ou

$$(a+b-c) + (a-b-c)\cos\alpha\cos\gamma + (b-c-a)\sin\alpha\sin\gamma = 0.$$

On aurait de même

$$(a+b-c) + (a-b-c)\cos\beta\cos\gamma + (b-c-a)\sin\beta\sin\gamma = 0:$$

d'où

$$(a+b-c)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) = (b+c-a)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\gamma,$$
$$(a+b-c)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) = (a+c-b)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\gamma;$$

et puisque le point dont on cherche le lieu a pour coordonnées

$$\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta),\quad \sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta),\quad \cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta),$$

l'équation du lieu sera

$$\frac{x^2}{(b+c-a)^2}+\frac{y^2}{(c+a-b)^2}=\frac{z^2}{(a+b-c)^2}.$$

Cette solution est due à M. Burnside.

II. Un triangle est inscrit dans une conique $x^2+y^2=z^2$; deux de ses côtés sont tangents à la conique $ax^2+by^2=cz^2$: trouver l'enveloppe du troisième côté.

Réponse.

$$(ca+ab-bc)^2x^2+(ab+bc-ca)^2y^2=(bc+ca-ab)^2z^2.$$

§ IV. — Des courbes enveloppes.

283. Lorsque l'équation d'une droite renferme une indéterminée μ d'un degré quelconque, à une série de valeurs de μ correspond une série de droites toutes tangentes à une certaine courbe, qu'on appelle *courbe enveloppe* (ou *enveloppe*) du système formé par ces droites. Ainsi la droite $\mu^2 L - 2\mu R + M$, où μ est indéterminé, est constamment tangente à la courbe $LM - R^2$ (270). La démonstration directe de ce théorème suffira pour indiquer la méthode générale à suivre dans la détermination des courbes enveloppes.

Les deux droites correspondant aux deux valeurs μ et $\mu+h$ de l'indéterminée ont pour équations

$$\mu^2 L - 2\mu R + M = 0,\quad (\mu+h)^2 L - 2(\mu+h)R + M = 0,$$

et leur point d'intersection sera déterminé par les conditions

$$\mu^2 L - 2\mu R + M = 0,\quad 2(\mu L - R) + hL = 0,$$

qui ne sont autre chose que l'équation de la première droite, et le résultat qu'on obtient en divisant par h la différence entre les équations des deux droites.

Ces deux droites sont d'autant plus voisines que h est plus petit. Lorsque h devient nul, elles sont consécutives dans

le système et se coupent en un point déterminé par les équations

$$\mu^2 L - 2\mu R + M = 0, \quad \mu L - R = 0,$$

ou, ce qui revient au même, par les suivantes :

$$\mu L - R = 0, \quad \mu R - M = 0.$$

Mais un point d'une courbe peut être considéré comme l'intersection de deux tangentes consécutives à cette courbe (147); l'intersection des deux droites consécutives appartient donc à l'enveloppe, dont l'équation s'obtient, par suite, en éliminant l'indéterminée μ entre les équations précédentes, ce qui donne

$$LM = R^2.$$

On démontrerait de même, dans le cas où L, M et R représentent des courbes au lieu de droites, que la courbe définie par $\mu^2 L - 2\mu R + M$ est constamment tangente à la courbe $LM - R^2$.

L'enveloppe de la droite $L\cos\varphi + M\sin\varphi - R$, où φ est indéterminé, peut se trouver directement de la même manière, ou bien se déduire du résultat précédent en posant

$$\tang\tfrac{1}{2}\varphi = \mu;$$

car alors on a

$$\cos\varphi = \frac{1-\mu^2}{1+\mu^2}, \quad \sin\varphi = \frac{2\mu}{1+\mu^2},$$

et l'équation proposée se ramène à la forme

$$\mu^2(L - R) + 2\mu M + (L - R),$$

où μ entre au second degré.

284. On pourrait encore arriver au même résultat de la manière suivante. La droite

$$\mu^2 L - 2\mu R + M$$

est évidemment tangente à une courbe de la *seconde classe* (Note du n° 145), puisque, par un point donné, on ne peut

mener que deux droites du système, celles définies par les valeurs de μ tirées de l'équation

$$\mu^2 L' - 2\mu R' + M' = 0,$$

dans laquelle L', R' et M' expriment ce que deviennent L, R et M lorsqu'on y remplace les coordonnées courantes par celles du point donné. D'ailleurs les valeurs de μ sont égales, et ce point est l'intersection de deux tangentes consécutives lorsque ses coordonnées satisfont à la relation $LM = R^2$. Plus généralement, lorsqu'une indéterminée μ entre algébriquement au degré n dans l'équation d'une droite, cette ligne est tangente à une courbe de la $n^{ième}$ classe dont l'équation s'obtient en exprimant que l'équation en μ a des racines égales.

EXERCICES.

I. Les sommets d'un triangle glissent sur trois droites fixes α, β, γ, tandis que deux de ses côtés passent par deux points fixes $(\alpha', \beta', \gamma')$ et $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$: trouver l'enveloppe du troisième côté.

Soit $\alpha + \mu\beta = 0$ l'équation de la droite joignant (α, β) au sommet qui glisse sur γ, celles des côtés passant par les points fixes seront alors

$$\gamma'(\alpha + \mu\beta) - \gamma(\alpha' + \mu\beta') = 0, \quad \gamma''(\alpha + \mu\beta) - \gamma(\alpha'' + \mu\beta'') = 0,$$

et on aura, pour le troisième côté,

$$(\alpha' + \mu\beta')\gamma''\alpha + (\alpha'' + \mu\beta'')\mu\gamma'\beta - (\alpha' + \mu\beta')(\alpha'' + \mu\beta'')\gamma = 0,$$

puisqu'il passe par l'intersection du premier avec α et du second avec β. En ordonnant, suivant les puissances de μ, on trouve, pour l'enveloppe,

$$(\alpha\beta'\gamma'' + \beta\gamma'\alpha'' - \gamma\alpha'\beta'' - \gamma\alpha''\beta')^2 = 4\alpha'\beta''(\alpha\gamma'' - \alpha''\gamma)(\beta\gamma' - \beta'\gamma).$$

On pourrait aussi résoudre ce problème, en ordonnant suivant les puissances de a l'équation trouvée au n° 50, Ex. III.

II. Trouver l'enveloppe d'une droite telle, que le produit de ses distances à deux points fixes soit constant $(= b^2)$.

Prenons pour axes la droite qui joint les points fixes et la perpendiculaire élevée en son milieu : les coordonnées de ces points seront $y = 0$, $x = \pm c$; d'ailleurs $y - mx + n = 0$ représentant la droite mobile, on aura, pour exprimer les conditions du problème,

$$(n + mc)(n - mc) = b^2(1 + m^2)$$

ou

$$n^2 = b^2 + b^2 m^2 + c^2 m^2;$$

mais

$$n^2 = y^2 - 2mxy + m^2 x^2;$$

donc

$$m^2(x^2 - b^2 - c^2) - 2mxy + y^2 - b^2 = 0;$$

par suite, l'enveloppe a pour équation

$$x^2 y^2 = (x^2 - b^2 - c^2)(y^2 - b^2)$$

ou bien

$$\frac{x^2}{b^2 + c^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

III. Trouver l'enveloppe d'une droite telle, que la somme (b^2) des carrés de ses distances à deux points fixes ($0, \pm c$) soit constante.

Réponse.
$$\frac{2x^2}{b^2 - 2c^2} + \frac{2y^2}{b^2} = 1.$$

IV. Trouver l'enveloppe d'une droite telle, que la différence des carrés de ses distances à deux points fixes soit constante.

Réponse. Une parabole.

V. Par un point fixe O, on mène une droite OP qui rencontre en P une droite fixe AP : trouver l'enveloppe de la droite PQ faisant avec PO un angle OPQ constant ($= 90° - \beta$).

Soient OA $= p$, et OQ les perpendiculaires abaissées du point O sur les droites AP et PQ, θ et β les angles AOP et POQ faits par OP avec OA et OQ, on aura

$$OP = p \sec\theta, \quad OQ = p \sec\theta \cos\beta.$$

Si l'on prend OA pour axe des x, O pour origine, l'équation de PQ sera

$$x \cos(\theta + \beta) + y \sin(\theta + \beta) = p \sec\theta \cos\beta,$$

ou

$$x \cos(2\theta + \beta) + y \sin(2\theta + \beta) = 2p \cos\beta - x \cos\beta - y \sin\beta,$$

c'est-à-dire de la forme

$$L \cos\varphi + M \sin\varphi = R.$$

L'enveloppe cherchée sera donc

$$x^2 + y^2 = (x \cos\beta + y \sin\beta - 2p \cos\beta)^2,$$

c'est-à-dire une parabole ayant O pour foyer.

VI. Trouver l'enveloppe de la ligne $\frac{A}{\mu} + \frac{B}{\mu'} = 1$, les indéterminées étant liées par la relation $\mu + \mu' = C$.

En remplaçant μ' par $C - \mu$, et chassant les dénominateurs, on trouve, pour l'enveloppe, l'équation

$$A^2 + B^2 + C^2 - 2AB - 2AC - 2BC = 0,$$

qui peut se mettre sous la forme

$$\pm\sqrt{A} \pm \sqrt{B} \pm \sqrt{C} = 0.$$

Exemples. — 1° On donne, dans un triangle, un angle et la somme c des côtés qui le comprennent : trouver l'enveloppe du troisième côté.

Ce côté a pour équation

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1;$$

et comme $a + b = c$, on a pour l'enveloppe

$$x^2 + y^2 - 2xy - 2cx - 2cy + c^2 = 0,$$

c'est-à-dire une parabole tangente aux côtés x et y.

2° On donne de position deux diamètres conjugués d'une ellipse, et la somme c^2 de leurs carrés : trouver l'enveloppe de l'ellipse.

Si dans l'équation

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1$$

on introduit la condition $a'^2 + b'^2 = c^2$, on trouve pour l'enveloppe

$$x \pm y \pm c = 0.$$

L'ellipse est donc tangente à quatre droites fixes.

285. *Lorsque les coefficients de l'équation d'une droite $\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma$ sont liés par une équation du second degré en λ, μ et ν,*

$$A\lambda^2 + B\mu^2 + C\nu^2 + 2F\mu\nu + 2G\nu\lambda + 2H\lambda\mu = 0,$$

cette droite a pour enveloppe une conique.

En effet, si l'on élimine ν entre l'équation de la droite et celle qui relie les coefficients, on trouve

$$(A\gamma^2 - 2G\gamma\alpha + C\alpha^2)\lambda^2 + 2(H\gamma^2 - F\gamma\alpha - G\gamma\beta + C\alpha\beta)\lambda\mu + (B\gamma^2 - 2F\gamma\beta + C\beta^2)\mu^2 = 0,$$

ce qui donne pour l'enveloppe

$$(A\gamma^2 - 2G\gamma\alpha + C\alpha^2)(B\gamma^2 - 2F\gamma\beta + C\beta^2)$$
$$= (H\gamma^2 - F\gamma\alpha - G\gamma\beta + C\alpha\beta)^2;$$

en développant et divisant par γ^2, il vient

$$(BC - F^2)\alpha^2 + (CA - G^2)\beta^2 + (AB - H^2)\gamma^2$$
$$+ 2(GH - AF)\beta\gamma + 2(HF - BG)\gamma\alpha + 2(FG - CH)\alpha\beta = 0,$$

équation d'une conique.

On peut encore énoncer ce théorème de la manière suivante :

Une équation tangentielle du second degré en λ, μ et ν représente une conique dont l'équation en coordonnées trilinéaires se déduit de l'équation tangentielle, en employant le même procédé que pour passer de l'équation en coordonnées trilinéaires à celle en coordonnées tangentielles.

On peut voir, en effet, comme au n° 151, que la condition pour que $\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma$ soit tangente à

$$a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + 2f\beta\gamma + 2g\gamma\alpha + 2h\alpha\beta = 0$$

est exprimée par l'équation

$$(bc - f^2)\lambda^2 + (ca - g^2)\mu^2 + (ab - h^2)\nu^2$$
$$+ 2(gh - af)\mu\nu + 2(hf - bg)\nu\lambda + 2(fg - ch)\lambda\mu = 0,$$

qui n'est autre chose que l'équation tangentielle de la conique.

Réciproquement, la conique $a\alpha^2 + \ldots = 0$ est l'enveloppe de la ligne dont les coefficients λ, μ, ν satisfont à la condition précédente. Car si, dans l'équation

$$(BC - F^2)\alpha^2 + \ldots = 0$$

donnée plus haut, on remplace A, B,... par $bc - f^2$, $ca - g^2$,..., elle devient

$$(abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2)$$
$$\times (a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + 2f\beta\gamma + 2g\gamma\alpha + 2h\alpha\beta) = 0.$$

EXERCICES.

I. On peut déduire, comme cas particulier de ce qui précède, les théorèmes des nos 127 et 130, c'est-à-dire que les lignes qui satisfont aux conditions

$$\frac{F}{\lambda}+\frac{G}{\mu}+\frac{H}{\nu}=0,\quad \sqrt{F\lambda}+\sqrt{G\mu}+\sqrt{H\nu}=0$$

ont respectivement pour enveloppes

$$\sqrt{F\alpha}+\sqrt{G\beta}+\sqrt{H\gamma}=0,\quad \frac{F}{\alpha}+\frac{G}{\beta}+\frac{H}{\gamma}.$$

II. Trouver la condition pour que la droite $\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma$ rencontre la conique représentée par l'équation générale en deux points réels.

Réponse. Cette droite rencontre la conique en des points réels ou imaginaires, suivant que la quantité $(bc-f^2)\lambda^2+\ldots$ est négative ou positive; elle est tangente lorsque cette quantité s'annule.

III. A quelle condition les tangentes menées par le point $(\alpha', \beta', \gamma')$ sont elles réelles?

Réponse. Ces tangentes sont réelles lorsque la quantité

$$(BC-F^2)\alpha'^2+\ldots$$

est négative; autrement dit, lorsque les quantités

$$abc+2fgh+\ldots \quad \text{et} \quad a\alpha'^2+b\beta'^2+\ldots$$

sont de signes contraires. Les tangentes sont imaginaires, ou, ce qui revient au même, le point $(\alpha', \beta', \gamma')$ est à l'intérieur de la conique lorsque ces quantités sont de même signe.

286. On démontrerait, comme au no 76, que la condition

$$ABC+2FGH-AF^2-BG^2-CH^2=0$$

exprime que l'équation

$$A\lambda^2+B\mu^2+C\nu^2+2F\mu\nu+2G\nu\lambda+2H\lambda\mu=0$$

peut se décomposer en deux facteurs et se mettre sous la forme

$$(\alpha'\lambda+\beta'\mu+\gamma'\nu)(\alpha''\lambda+\beta''\mu+\gamma''\nu)=0.$$

Cette dernière étant satisfaite lorsqu'on égale à zéro l'un ou l'autre des facteurs, elle exprime (51) que la droite

$$\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma$$

passe par l'un ou l'autre des deux points fixes qu'ils représentent.

En remplaçant, comme au numéro précédent, A, B,... par $bc - f^2$, $ca - g^2, \ldots$, on voit facilement que la quantité

$$\mathrm{ABC} + 2\,\mathrm{FGH} + \ldots$$

n'est autre chose que le carré de $abc + 2fgh + \ldots$

EXERCICE.

Lorsqu'une conique passant par deux points donnés a un double contact avec une conique fixe, leur corde de contact passe par un point fixe.

Soient $S = 0$ l'équation de la conique fixe, $S = (\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma)^2$ celle de l'autre conique; en y remplaçant les coordonnées courantes par celles des points donnés

$$(\alpha', \beta', \gamma'),\ (\alpha'', \beta'', \gamma''),$$

on a

$$S' = (\lambda\alpha' + \mu\beta' + \nu\gamma')^2 \quad S'' = (\lambda\alpha'' + \mu\beta'' + \nu\gamma'')^2,$$

d'où

$$(\lambda\alpha' + \mu\beta' + \nu\gamma')\sqrt{S''} = \pm(\lambda\alpha'' + \mu\beta'' + \nu\gamma'')\sqrt{S'},$$

ce qui exprime que la corde de contact passe par l'un ou l'autre des deux points fixes définis par cette équation, puisque S' et S'' sont constants.

287. *Trouver l'équation d'une conique ayant un double contact avec deux coniques données* S *et* S'.

Soient E et F deux des cordes d'intersection de S et S', de telle sorte que

$$S - S' = EF,$$

l'équation de la conique cherchée sera

$$\mu^2 E^2 - 2\mu(S + S') + F^2 = 0,$$

puisqu'elle peut se mettre sous l'une des deux formes

$$(\mu E + F)^2 = 4\mu S, \quad (\mu E - F)^2 = 4\mu S'.$$

Comme μ entre au second degré, on peut mener *deux* coni-

ques en prenant pour auxiliaires les deux cordes d'intersection E, F; et, puisqu'il y a trois couples de cordes, on peut former *trois systèmes* de deux coniques ayant un double contact avec deux coniques données. Lorsque S' se transforme en deux droites, il n'y a plus que deux couples de cordes distinctes, et, par suite, deux systèmes de coniques à double contact; quand S et S' se transforment toutes deux en droites, il n'y a plus qu'un seul système.

EXERCICE.

Trouver l'équation d'une conique tangente à quatre droites données.

Soient A, B, C, D les quatre côtés du quadrilatère formé par les droites, E, F les diagonales, AC — BD = EF; on aura pour la conique cherchée

$$\mu^2 E^2 - 2\mu(AC + BD) + F^2 = 0.$$

Si l'on représente par L, M et N les diagonales, les côtés le seront par $L \pm M \pm N$, et l'équation de la conique prend la forme plus symétrique

$$\mu^2 L^2 - \mu(L^2 + M^2 - N^2) + M^2 = 0,$$

qui montre que cette conique est tangente à

$$\begin{aligned}(L^2 + M^2 - N^2)^2 - 4L^2M^2\\ = (L + M + N)(M + N - L)(L + N - M)(M + L - N).\end{aligned}$$

On pourrait encore mettre cette dernière équation sous la forme

$$N^2 = \frac{L^2}{\cos^2\varphi} + \frac{M^2}{\sin^2\varphi}$$ (*voir* n° 278).

288. La conique ayant un double contact avec *deux cercles* C et C' a pour équation

$$\mu^2 - 2\mu(C + C') + (C - C')^2 = 0.$$

Les cordes de contact de la conique avec les cercles

$$C - C' + \mu = 0, \quad C - C' - \mu = 0,$$

sont parallèles et situées à égale distance de l'axe radical des deux cercles.

En mettant l'équation de la conique sous la forme

$$\sqrt{C} \pm \sqrt{C'} = \sqrt{\mu},$$

on voit que : *Le lieu d'un point tel que la somme (ou la différence) des tangentes menées de ce point à deux cercles soit constante, est une conique ayant un double contact avec les deux cercles.*

En supposant les deux cercles infiniment petits, on déduit de là la propriété fondamentale des foyers d'une conique.

Lorsqu'on prend μ égal au carré du segment déterminé par les cercles sur une de leurs tangentes communes, l'équation représente deux de ces tangentes communes.

EXERCICES.

I. Trouver, d'après ce qui précède, les tangentes communes aux cercles indiqués aux Exercices des nos 113 et 114.

RÉPONSE.

$$1^\circ \quad \sqrt{C} + \sqrt{C'} = 4, \quad \sqrt{C} + \sqrt{C'} = 2;$$

$$2^\circ \quad \sqrt{C} + \sqrt{C'} = 1, \quad \sqrt{C} + \sqrt{C'} = \sqrt{-79}.$$

II. On donne trois cercles C, C' et C'' : L et L' sont les tangentes communes à C', C''; M et M' à C'', C; N et N' à C, C'; si L, M et N passent par un même point, L', M' et N' passent aussi par un même point (*).

Soient

$$\sqrt{C'} + \sqrt{C''} = t, \quad \sqrt{C''} + \sqrt{C} = t', \quad \sqrt{C} + \sqrt{C'} = t''$$

les équations des couples de tangentes communes. La condition pour que L, M et N passent par un même point est $t' \pm t = t''$; lorsqu'elle est remplie, L', M' et N' passent aussi par un même point.

III. Les trois cordes communes, non concourantes, de trois coniques ayant un double contact avec une quatrième conique déterminent sur les

(*) Ce procédé a été employé par M. Steiner pour la solution du problème de Malfatti : *Inscrire dans un triangle trois cercles tangents entre eux, et successivement à deux des côtés de ce triangle*, solution qu'il formule de la manière suivante : inscrire un cercle dans chacun des triangles formés par un côté, et les bissectrices des angles adjacents du triangle donné; trois des tangentes communes à ces cercles se coupant en un même point, il en est de même des trois autres qui sont communes aux cercles cherchés. M. Hart a donné une démonstration géométrique de cette solution dans le *Quarterly Journal of Mathematics*, t. I, p. 219. Cette solution peut s'étendre au cas où l'on remplace les cercles par des coniques ayant un double contact avec une conique donnée.

trois premières six points qui appartiennent à une conique. Dans le cas particulier où trois de ces points sont en ligne droite, il en est de même des trois autres.

Soient

$$S - L^2 = 0, \quad S - M^2 = 0, \quad S - N^2 = 0$$

les trois coniques, les cordes communes sont représentées par

$$L + M, \quad M + N, \quad N + L,$$

et l'équation

$$S + MN + NL + LM = (S - L^2) + (L + M)(L + N)$$

démontre le théorème.

§ V. — ÉQUATION GÉNÉRALE DU SECOND DEGRÉ.

289. Il est toujours possible de représenter une conique par une équation de la forme

$$a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + 2f\beta\gamma + 2g\gamma\alpha + 2h\alpha\beta = 0.$$

En effet, cette équation est du second degré, et renferme cinq paramètres arbitraires, qu'on peut déterminer de manière que la courbe qu'elle définit passe par cinq points donnés, et coïncide, par suite, avec une conique donnée. Cette équation suppose les coordonnées trilinéaires; mais on en déduit facilement l'équation en coordonnées cartésiennes en y remplaçant α, β par x, y, et en y faisant $\gamma = 1$, ce qui revient à supposer la droite γ à l'infini (69-76, Note).

On peut toujours de même représenter une courbe de degré n par une fonction homogène du même degré en α, β et γ, car il est facile de voir que l'équation *complète* de degré n entre deux variables, et l'équation *homogène* de même degré entre trois variables ont le même nombre de termes, et peuvent, par suite, être assujetties au même nombre de conditions.

290. Les coordonnées d'un point pris sur la droite qui joint les deux points $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ pouvant (66) s'exprimer par

$$l\alpha' + m\alpha'', \quad l\beta' + m\beta'', \quad l\gamma' + m\gamma'',$$

on obtiendra les coordonnées des points où cette droite rencontre une courbe, en substituant ces valeurs aux coordonnées courantes α, β et γ dans l'équation de la courbe, et en déterminant le rapport $\frac{l}{m}$ au moyen de la relation déduite de cette substitution (*). Ainsi (92), les points où cette droite rencontre une conique sont donnés par

$$\begin{aligned} &l^2(a\alpha'^2 + b\beta'^2 + c\gamma'^2 + 2f\beta'\gamma' + 2g\gamma'\alpha' + 2h\alpha'\beta') \\ &\quad + 2lm[a\alpha'\alpha'' + b\beta'\beta'' + c\gamma'\gamma'' + f(\beta'\gamma'' + \beta''\gamma') \\ &\qquad + g(\gamma'\alpha'' + \gamma''\alpha') + h(\alpha'\beta'' + \alpha''\beta')] \\ &\quad + m^2(a\alpha''^2 + b\beta''^2 + c\gamma''^2 + 2f\beta''\gamma'' + 2g\gamma''\alpha'' + 2h\alpha''\beta'') = 0, \end{aligned}$$

équation du second degré que nous pouvons écrire, pour abréger,

$$l^2 S' + 2lm P + m^2 S'' = 0.$$

Lorsque le point $(\alpha', \beta', \gamma')$ est sur la courbe, on a $S' = 0$, et l'équation se réduit au premier degré. En la résolvant par rapport à $l : m$, on trouve

$$S''\alpha' - 2P\alpha'', \quad S''\beta' - 2P\beta'', \quad S''\gamma' - 2P\gamma''$$

pour les coordonnées de l'intersection de la conique avec la droite qui joint $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ au point $(\alpha', \beta', \gamma')$ pris sur cette conique. Elles se réduisent à α', β', γ' quand $P = 0$. Lors donc que α'', β'' et γ'' satisfont à la relation

$$\begin{aligned} &a\alpha\alpha' + b\beta\beta' + c\gamma\gamma' + f(\beta\gamma' + \beta'\gamma) \\ &\quad + g(\gamma'\alpha + \gamma\alpha') + h(\alpha'\beta + \alpha\beta') = 0, \end{aligned}$$

cette droite rencontre la courbe en deux points qui coïncident en $(\alpha', \beta', \gamma')$; autrement dit le point $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ est situé sur la tangente en $(\alpha', \beta', \gamma')$, qui a pour équation $P = 0$.

291. La symétrie de cette équation en α, β, γ; α', β', γ' montre (89) que, dans le cas où $(\alpha', \beta', \gamma')$ ne se trouve pas sur la courbe, elle représente la polaire de ce point. On peut

(*) Cette méthode est due à Joachimsthal.

aussi observer (91) que $P = 0$ exprime que la droite joignant $(\alpha', \beta', \gamma')$ à $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ est divisée harmoniquement par la courbe.

L'équation de la polaire peut aussi s'écrire :

$$\alpha'(a\alpha + h\beta + g\gamma) + \beta'(h\alpha + b\beta + f\gamma) + \gamma'(g\alpha + f\beta + c\gamma) = 0;$$

les facteurs de α', β', γ' sont respectivement proportionnels aux coefficients différentiels de l'équation de la conique pris successivement par rapport à α, β, γ. Si l'on pose, pour abréger,

$$S_1 = \frac{dS}{d\alpha}, \quad S_2 = \frac{dS}{d\beta}, \quad S_3 = \frac{dS}{d\gamma},$$

on a pour la polaire

$$\alpha' S_1 + \beta' S_2 + \gamma' S_3 = 0.$$

Lorsque β' et γ' sont nuls, cette équation se réduit à $S_1 = 0$. Donc *la polaire de l'intersection de deux des lignes de référence a pour équation la dérivée de l'équation de la conique, prise par rapport à la troisième.*

L'équation de la polaire étant symétrique en α, β, γ et α', β', γ' peut aussi se mettre sous la forme

$$\alpha S'_1 + \beta S'_2 + \gamma S'_3 = 0$$

(S'_1 désignant, suivant l'usage, ce que devient S_1 lorsqu'on y remplace α, β, γ par α', β', γ').

292. Lorsqu'une conique se réduit à deux droites, la polaire d'un point quelconque passe par l'intersection de ces droites : et il est facile de voir géométriquement que cette polaire forme avec les deux droites et la ligne qui joint le point donné à leur intersection un faisceau harmonique. En effet, le rayon vecteur mené par le point est divisé harmoniquement par la conique, c'est-à-dire les deux droites, et la polaire. On peut aussi le voir en partant des formules du numéro précédent : la polaire de (α', β') par rapport aux deux droites α et β ayant pour équation $\beta'\alpha + \alpha'\beta = 0$ a pour conjuguée harmonique $\beta'\alpha - \alpha'\beta$, c'est-à-dire la droite qui joint (α', β') à (α, β).

Lorsque l'équation générale représente deux droites, les polaires des trois points (β, γ), (γ, α), (α, β),

$$a\alpha + h\beta + g\gamma = 0, \quad h\alpha + b\beta + f\gamma = 0, \quad g\alpha + f\beta + c\gamma = 0,$$

passent par un même point. Si l'on élimine α, β et γ entre ces trois équations pour exprimer (n° 38) que ces droites sont concourantes, on trouve la condition pour que l'équation générale représente deux droites. Cette condition, à laquelle nous sommes déjà arrivés par d'autres méthodes, peut s'écrire sous forme de déterminant :

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en développant,

$$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0.$$

Nous désignerons dorénavant par Δ le premier membre de cette équation, qu'on appelle *le discriminant* (*) de l'équation de la conique.

293. Trouver les coordonnées α', β', γ' du pôle d'une droite $\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma$ par rapport à la conique représentée par l'équation générale.

On a, en se reportant au n° 291, les équations

$$a\alpha' + h\beta' + g\gamma' = \lambda, \quad h\alpha' + b\beta' + f\gamma' = \mu, \quad g\alpha' + f\beta' + c\gamma' = \nu,$$

(*) En général, on nomme *discriminant* d'une fonction homogène de plusieurs variables le premier membre de l'équation qui résulte de l'élimination de ces variables entre les équations que l'on obtient en égalant à zéro les dérivées du premier ordre de la fonction proposée, prises successivement par rapport à chacune de ces variables. Ainsi, par exemple, la condition pour qu'une équation algébrique $S(x)$ ait des racines égales, est le discriminant de cette équation. Car, après avoir rendu cette équation homogène, par l'introduction d'une deuxième variable y, cette condition s'obtient en éliminant x et y entre $\frac{dS}{dx} = 0$ et $\frac{dS}{dy} = 0$. (*Voir* les *Leçons d'Algèbre supérieure*, par G. Salmon; huitième leçon de la traduction française. Paris; libraire Gauthier-Villars.)

qui, résolues par rapport à α', β', γ', donnent

$$\Delta\alpha' = \lambda(bc - f^2) + \mu(fg - ch) + \nu(hf - bg),$$
$$\Delta\beta' = \lambda(fg - ch) + \mu(ca - g^2) + \nu(gh - af),$$
$$\Delta\gamma' = \lambda(hf - bg) + \mu(gh - af) + \nu(ab - h^2).$$

Si l'on emploie les lettres A, B, C... (*) dans le sens indiqué au n° 151, on voit que les coordonnées du pôle sont respectivement proportionnelles aux quantités

$$A\lambda + H\mu + G\nu, \quad H\lambda + B\mu + F\nu, \quad G\lambda + F\mu + C\nu.$$

Le pôle de la tangente à une conique étant un point de cette tangente, on trouvera la condition pour que la droite $\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma$ soit tangente à la conique, en exprimant que les coordonnées qu'on vient d'obtenir satisfont à la relation

$$\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma = 0.$$

On trouve ainsi, comme au n° 285,

$$A\lambda^2 + B\mu^2 + C\nu^2 + 2F\mu\nu + 2G\nu\lambda + 2H\lambda\mu = 0.$$

En écrivant cette équation sous la forme $\Sigma = 0$, on voit que les coordonnées du pôle sont les dérivées Σ_1, Σ_2, Σ_3 de Σ prises successivement par rapport à λ, μ et ν. Ainsi, de même que la polaire d'un point a pour équation

$$\alpha S'_1 + \beta S'_2 + \gamma S'_3 = 0,$$

de même la condition pour que la droite $\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma$ passe par le pôle de $\lambda'\alpha + \mu'\beta + \nu'\gamma$ (ou, en d'autres termes, l'équation tangentielle de ce pôle) peut s'écrire

$$\lambda\Sigma'_1 + \mu\Sigma'_2 + \nu\Sigma'_3 = 0;$$

par suite, la condition pour que deux droites $\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma$, $\lambda'\alpha + \mu'\beta + \nu'\gamma$ soient conjuguées par rapport à la conique, c'est-à-dire que le pôle de l'une se trouve sur l'autre, peut

(*) A, B, C,... sont les *déterminants mineurs* du déterminant indiqué au n° 292.

évidemment se mettre sous l'une ou l'autre des formes équivalentes :

$$\lambda'\Sigma_1 + \mu'\Sigma_2 + \nu'\Sigma_3 = 0, \quad \lambda\Sigma'_1 + \mu\Sigma'_2 + \nu\Sigma'_3 = 0.$$

D'ailleurs (d'après la manière dont on est arrivé à sa valeur) Σ est le résultat de l'élimination de α', β', γ' et ρ entre les équations

$$a\alpha' + h\beta' + g\gamma' + \rho\lambda = 0, \quad h\alpha' + b\beta' + f\gamma' + \rho\mu = 0,$$
$$g\alpha' + f\beta' + c\gamma' + \rho\nu = 0, \quad \lambda\alpha' + \mu\beta' + \nu\gamma' = 0.$$

et peut être représenté par le déterminant :

$$\begin{vmatrix} a & h & g & \lambda \\ h & b & f & \mu \\ g & f & c & \nu \\ \lambda & \mu & \nu & 0 \end{vmatrix}$$

EXERCICES.

I. Trouver les coordonnées du pôle de $\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma$ par rapport à $\sqrt{l\alpha} + \sqrt{m\beta} + \sqrt{n\gamma}$.

L'équation tangentielle étant (130)

$$l\mu\nu + m\nu\lambda + n\lambda\mu = 0,$$

les coordonnées du pôle sont

$$\alpha' = m\nu + n\mu, \quad \beta' = n\lambda + l\nu, \quad \gamma' = l\mu + m\lambda.$$

II. Trouver le lieu du pôle de $\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma$ par rapport à une conique définie par trois tangentes α, β, γ et une autre condition (*).

En résolvant les équations précédentes en l, m et n, on trouve que les valeurs de ces quantités sont respectivement proportionnelles à

$$\lambda(\mu\beta' + \nu\gamma' - \lambda\alpha'), \quad \mu(\nu\gamma' + \lambda\alpha' - \mu\beta'), \quad \nu(\lambda\alpha' + \mu\beta' - \nu\gamma').$$

Si l'on combine l'équation $\sqrt{l\alpha} + \sqrt{m\beta} + \sqrt{n\gamma} = 0$, qui représente une conique tangente aux trois droites α, β et γ, avec la quatrième condition, on peut établir une relation entre l, m et n, et en déduire l'équation du lieu cherché, en y remplaçant l, m et n par leurs valeurs obtenues plus haut.

(*) Ce genre de solution est emprunté à M. HEARN : *Researches on Conic Sections.*

Dans le cas particulier où λ, μ et ν représentent les côtés a, b et c du triangle de référence, on obtient ainsi le lieu du pôle de la droite située à l'infini $a\alpha + b\beta + c\gamma$, c'est-à-dire le lieu du centre de la conique.

Si l'on se donne comme quatrième condition d'avoir une conique tangente à la droite $A\alpha + B\beta + C\gamma$, c'est-à-dire

$$\frac{l}{A} + \frac{m}{B} + \frac{n}{C} = 0 \quad (130),$$

la conique étant alors tangente aux quatre droites α, β, γ, $A\alpha + B\beta + C\gamma$, le lieu du pôle de $\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma$ est la droite

$$\frac{\lambda(\mu\beta + \nu\gamma - \lambda\alpha)}{A} + \frac{\mu(\nu\gamma + \lambda\alpha - \mu\beta)}{B} + \frac{\nu(\lambda\alpha + \mu\beta - \nu\gamma)}{C} = 0.$$

Si la conique est assujettie, comme quatrième condition, à passer par le point $(\alpha', \beta', \gamma')$, on doit satisfaire à la relation

$$\sqrt{l\alpha'} + \sqrt{m\beta'} + \sqrt{n\gamma'} = 0,$$

et le lieu du pôle de la droite $\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma$ par rapport à la conique tangente à α, β, γ et passant par $(\alpha', \beta', \gamma')$ est

$$\sqrt{\lambda\alpha'(\mu\beta + \nu\gamma - \lambda\alpha)} + \sqrt{\mu\beta'(\nu\gamma + \lambda\alpha - \mu\beta)}$$
$$+ \sqrt{\nu\gamma'(\lambda\alpha + \mu\beta - \nu\gamma)} = 0,$$

c'est-à-dire une conique tangente aux droites

$$\mu\beta + \nu\gamma - \lambda\alpha, \quad \nu\gamma + \lambda\alpha - \mu\beta, \quad \lambda\alpha + \mu\beta - \nu\gamma.$$

Si, dans ce dernier cas, on cherche le lieu du centre, ces trois droites sont celles qui joignent les milieux des côtés du triangle de référence.

III. Trouver les coordonnées du pôle de $\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma$ par rapport à $l\beta\gamma + m\gamma\alpha + n\alpha\beta$.

L'équation tangentielle est alors (127)

$$l^2\lambda^2 + m^2\mu^2 + n^2\nu^2 - 2mn\mu\nu - 2nl\nu\lambda - 2lm\lambda\mu = 0,$$

et les coordonnées du pôle ont pour expression

$$\alpha' = l(l\lambda - m\mu - n\nu), \quad \beta' = m(m\mu - n\nu - l\lambda),$$
$$\gamma' = n(n\nu - l\lambda - m\mu),$$

d'où

$$m\gamma' + n\beta' = -2lmn\lambda, \quad n\alpha' + l\gamma' = -2lmn\mu,$$
$$l\beta' + m\alpha' = -2lmn\nu;$$

en opérant comme ci-dessus, on trouve que les valeurs de l, m et n sont

respectivement proportionnelles à

$$\alpha'(\mu\beta'+\nu\gamma'-\lambda\alpha'),\quad \beta'(\nu\gamma'+\lambda\alpha'-\mu\beta'),\quad \gamma'(\lambda\alpha'+\mu\beta'-\nu\gamma').$$

La condition pour que la conique circonscrite à $\alpha\beta\gamma$ passe par un quatrième point $(\alpha', \beta', \gamma')$ étant donnée par

$$\frac{l}{\alpha'}+\frac{m}{\beta'}+\frac{n}{\gamma'}=0,$$

le lieu du pôle de $\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma$ par rapport à une conique passant par quatre points est

$$\frac{\alpha}{\alpha'}(\mu\beta+\nu\gamma-\lambda\alpha)+\frac{\beta}{\beta'}(\nu\gamma+\lambda\alpha-\mu\beta)+\frac{\gamma}{\gamma'}(\lambda\alpha+\mu\beta-\nu\gamma)=0,$$

ce qui, dans le cas où la droite est à l'infini, représente une conique passant par les milieux des côtés des triangles que l'on peut former avec les quatre points.

La condition pour qu'une conique soit tangente à la droite $A\alpha+B\beta+C\gamma$ étant exprimée par

$$\sqrt{Al}+\sqrt{Bm}+\sqrt{Cn}=0,$$

le lieu du pôle de $\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma$ par rapport à une conique passant par trois points et tangente à cette droite est donné par l'équation

$$\sqrt{A\alpha(\mu\beta+\nu\gamma-\lambda\alpha)}+\sqrt{B\beta(\nu\gamma+\lambda\alpha-\mu\beta)}+\sqrt{C\gamma(\lambda\alpha+\mu\beta-\nu\gamma)}=0,$$

qui représente en général une courbe du quatrième degré.

294. Lorsqu'un point $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ appartient à la tangente menée à la courbe par le point fixe $(\alpha', \beta', \gamma')$, la droite passant par $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ rencontre la courbe en deux points qui coïncident, et l'équation en $l:m$ (290), qui détermine les points où cette droite rencontre la courbe doit avoir ses racines égales.

Pour trouver l'équation de toutes les tangentes qu'on peut mener à la courbe par $(\alpha', \beta', \gamma')$, il suffit de remplacer, dans l'équation de la courbe, les coordonnées courantes α, β, γ par $l\alpha+m\alpha'$, $l\beta+m\beta'$, $l\gamma+n\gamma'$, et d'écrire la condition pour que l'équation résultante en $l:m$ ait des racines égales. On trouve ainsi, pour l'équation des deux tangentes menées à la conique par un point donné $(\alpha', \beta', \gamma')$,

$$SS'=P^2,$$

en faisant, pour abréger,

$$S = a\alpha^2 + b\beta^2 + \ldots,\quad S' = a\alpha'^2 + b\beta'^2 + \ldots,\quad P = a\alpha\alpha' + \ldots$$

On peut encore mettre cette équation sous une autre forme en observant que la droite qui joint à $(\alpha', \beta', \gamma')$ un point $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ de la tangente menée par $(\alpha', \beta', \gamma')$, est tangente à la courbe. Il suffit, après avoir exprimé que la droite

$$\alpha(\beta'\gamma'' - \beta''\gamma') + \beta(\gamma'\alpha'' - \gamma''\alpha') + \gamma(\alpha'\beta'' - \alpha''\beta') = 0,$$

qui passe par ces deux points (65), est tangente à la courbe, d'y considérer α'', β'', γ'' comme coordonnées courantes; ce qui revient, en d'autres termes, à remplacer dans la condition

$$A\lambda^2 + B\mu^2 + C\nu^2 + 2F\mu\nu + 2G\nu\lambda + 2H\lambda\mu = 0,$$

indiquée au n° 285, λ, μ et ν par $\beta\gamma' - \beta'\gamma$, $\alpha'\gamma - \gamma'\alpha$, $\alpha\beta' - \alpha'\beta$.

L'équation du couple de tangentes, obtenue de cette manière, ne diffère pas, au fond, de celle qui a été donnée plus haut; en se reportant, en effet, aux valeurs de A, B, C,... du n° 285, il est facile de voir qu'on a la relation

$$\begin{aligned}(a\alpha^2 + b\beta^2 + \ldots)(a\alpha'^2 + b\beta'^2 + \ldots) - (a\alpha\alpha' + \ldots)^2 \\ = A(\beta\gamma' - \beta'\gamma)^2 + \ldots.\end{aligned}$$

EXERCICE.

Trouver le lieu des sommets des angles droits circonscrits à la conique donnée par l'équation générale. (*Voir* n° 169, Ex. IV.)

L'équation du couple des tangentes menées par un point (147) peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned}&A(y - y')^2 + B(x - x')^2 + C(xy' - yx')^2 \\ &- 2F(x - x')(xy' - yx') \\ &+ 2G(y - y')(xy' - x'y) - 2H(x - x')(y - y') = 0,\end{aligned}$$

et représente deux droites perpendiculaires lorsque la somme des coefficients de x^2 et de y^2 est nulle. Le lieu cherché, qui a pour équation

$$C(x^2 + y^2) - 2Gx - 2Fy + A + B = 0,$$

est le cercle directeur de la conique. Lorsque cette conique est une para-

bole, on a $C = 0$, et le lieu se réduit à la droite

$$Gx + Fy = \tfrac{1}{2}(A + B),$$

qui est la directrice de cette parabole.

295. Il résulte de ce qui précède que les couples de tangentes menés par (β, γ), (γ, α), (α, β) ont respectivement pour équations

$$B\gamma^2 + C\beta^2 - 2F\beta\gamma = 0, \quad C\alpha^2 + A\gamma^2 - 2G\gamma\alpha = 0,$$
$$A\beta^2 + B\alpha^2 - 2H\alpha\beta = 0,$$

comme on peut du reste le voir directement, en mettant l'équation de la courbe sous la forme

$$(a\alpha + h\beta + g\gamma)^2 + (C\beta^2 + B\gamma^2 - 2F\beta\gamma) = 0.$$

Si $\beta - k\gamma$, $\beta - k'\gamma$ représentent les deux tangentes menées par (β, γ), on a, d'après les équations précédentes, $kk' = \frac{B}{C}$; on a de même pour les expressions correspondantes relatives aux autres couples de tangentes, $\frac{C}{A}$, $\frac{A}{B}$; et le produit de ces trois quantités est égal à l'unité. On voit donc, en se reportant à la signification de la constante k (54), que si A, B, C, D, E, F sont les sommets d'un hexagone circonscrit, on a la relation

$$\frac{\sin EAB \cdot \sin FAB \cdot \sin FBC \cdot \sin DBC \cdot \sin DCA \cdot \sin ECA}{\sin EAC \cdot \sin FAC \cdot \sin FBA \cdot \sin DBA \cdot \sin DCB \cdot \sin ECB} = 1.$$

Lorsque les équations de trois couples de droites peuvent se mettre sous la forme

$$M^2 + N^2 + 2f'MN = 0, \quad N^2 + L^2 + 2g'NL = 0,$$
$$L^2 + M^2 + 2h'LM = 0,$$

les droites qui les composent sont tangentes à une même conique, puisque les équations trouvées plus haut pour les trois couples de tangentes se ramènent à cette forme quand on y remplace α par $L\sqrt{A}$, β par $M\sqrt{B}, \ldots$

296. Lorsqu'on veut former les équations des droites qui joignent un point $(\alpha', \beta', \gamma')$ à tous les points d'intersection de deux courbes, il suffit de remplacer dans les équations de ces courbes les coordonnées courantes α, β, γ par $l\alpha + m\alpha'$, $l\beta + m\beta'$, $l\gamma + m\gamma'$ et d'éliminer $l : m$ entre les équations résultantes. Un point quelconque de ces droites jouit en effet de cette propriété, que la ligne qui le joint à $(\alpha', \beta', \gamma')$ rencontre les deux courbes en un même point; par suite les équations en $l : m$ qui déterminent les points où l'une de ces lignes rencontre les courbes, ont une racine commune : les coordonnées de ce point satisfont donc au résultat de l'élimination.

Ainsi les deux droites qui joignent $(\alpha', \beta', \gamma')$ aux points où la droite L rencontre la conique S ont pour équation

$$L'^2 S - 2 LL'P + L^2 S' = 0,$$

L' et S' étant ce que deviennent L et S quand on y remplace α, β, γ par α', β', γ'. Lorsque le point $(\alpha', \beta', \gamma')$ est sur la courbe, l'équation se réduit à

$$L'S - 2 LP = 0.$$

EXERCICE.

Dans une conique, les cordes vues sous un angle droit d'un point de la courbe passent par un point fixe (181, Ex. II).

Prenons des coordonnées rectangulaires et formons, comme ci-dessus, l'équation des droites qui joignent le point donné (x', y') aux intersections de la conique $ax^2 + by^2 + \ldots$ avec la droite $\lambda x + \mu y + \nu$. Pour que ces droites soient perpendiculaires, il faut que la somme des carrés des coefficients de x^2 et de y^2 soit nulle, ce qui donne

$$(\lambda x' + \mu y' + \nu)(a + b) = 2(a\lambda x' + b\mu y').$$

Les quantités λ, μ, ν n'entrent dans cette équation qu'au premier degré; par suite, la corde passe par un point fixe $\left(\frac{b-a}{b+a} x', \frac{a-b}{a+b} y'\right)$. Lorsque le point de la courbe se déplace sur cette courbe, l'autre point décrit une conique. Lorsque l'angle sous lequel est vue la corde n'est pas

droit (ou s'il est droit et que le point d'où l'on voit la corde ne soit pas sur la courbe), on trouve, pour équation du lieu, une expression qui renferme λ, μ et ν au second degré ; la corde enveloppe alors une conique.

297. L'indéterminée qui entre au premier degré dans l'équation d'une conique, entre aussi au premier degré dans l'équation de la polaire d'un point, puisque celle-ci ne renferme les coefficients de l'équation de la courbe qu'au premier degré. Ainsi, P et P' étant les polaires d'un même point par rapport aux deux coniques S et S', la polaire du même point par rapport à $S + kS'$ sera $P + kP'$, puisque

$$(a + ka')\alpha\alpha' + \ldots = a\alpha\alpha' + \ldots + k(a\alpha\alpha' + \ldots).$$

Par suite : *Les polaires d'un point prises par rapport aux coniques circonscrites à un même quadrilatère passent par un point fixe* (151, Ex. II).

Si Q et Q' sont les polaires d'un autre point par rapport à S et S', la polaire de ce second point par rapport à $S + kS'$ sera $Q + kQ'$. Les polaires de deux points, prises par rapport à un système de coniques circonscrites à un même quadrilatère forment donc deux faisceaux homographiques (59).

Le lieu de l'intersection des lignes correspondantes $P + kP'$, $Q + kQ'$ *de deux faisceaux homographiques est une conique passant par les sommets des faisceaux.*

En effet, en éliminant k entre $P + kP'$ et $Q + kQ'$, on trouve $PQ' = P'Q$. Dans le cas particulier qui nous occupe, l'intersection des deux lignes correspondantes est le pôle par rapport à $S + kS'$ de la droite qui joint les deux points donnés. Donc :

Le lieu du pôle d'une droite donnée pris par rapport aux coniques passant par quatre points fixes est une conique (278, Ex. II).

Lorsqu'une indéterminée entre au second degré dans l'équation d'une conique, elle entre également au second degré dans l'équation de la polaire d'un point donné qui alors enve-

loppe une conique. Ainsi la polaire d'un point fixe par rapport à une conique ayant un double contact avec deux coniques fixes, enveloppe une conique, puisque l'équation de chacun des systèmes de coniques indiquées au n° 287 renferme l'indéterminée μ au second degré.

Nous terminerons ce Chapitre par l'exposé de quelques problèmes dont on peut baser la solution sur les principes qui viennent d'être exposés, nous réservant de développer dans un Chapitre ultérieur certaines propriétés de l'équation générale du second degré.

EXERCICES.

I. Trouver le lieu de l'intersection des polaires par rapport à deux coniques fixes d'un point qui glisse sur une droite fixe.

Soient P' et P", Q' et Q" les polaires de deux points $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ de la droite fixe par rapport aux deux coniques. Les coordonnées d'un autre point de la droite sont $\lambda\alpha' + \mu\alpha''$, $\lambda\beta' + \mu\beta''$, $\lambda\gamma' + \mu\gamma''$, et ses polaires $\lambda P' + \mu P''$, $\lambda Q' + \mu Q''$ se coupent sur la conique $P'Q'' = P''Q'$.

II. Le rapport anharmonique de quatre points en ligne droite est égal à celui de leurs quatre polaires.

En effet, le rapport anharmonique des quatre points

$$l\alpha' + m\alpha'',\ l'\alpha' + m'\alpha'',\ l''\alpha' + m''\alpha'',\ l'''\alpha' + m'''\alpha''$$

est évidemment le même que celui des quatre droites

$$lP' + mP'',\ l'P' + m'P'',\ l''P' + m''P',\ l'''P' + m'''P''.$$

III. Trouver l'équation des deux tangentes menées à la conique S aux points où elle est coupée par la droite γ.

La polaire d'un point (α', β') de γ a pour équation (291)

$$\alpha' S_1 + \beta' S_2 = 0.$$

D'ailleurs, en faisant $\gamma = 0$ dans l'équation générale, on trouve, pour déterminer les points où γ rencontre la courbe,

$$a\alpha'^2 + 2h\alpha'\beta' + b\beta'^2 = 0.$$

Éliminant α' et β' entre ces deux équations, on trouve, pour les deux tangentes,

$$aS_2^2 - 2hS_1S_2 + bS_1^2 = 0.$$

Si la droite γ s'éloigne à l'infini et se transforme dans la droite z, l'équation précédente représente les asymptotes en coordonnées cartésiennes et devient

$$a\left(\frac{dS}{dy}\right)^2 - 2h\frac{dS}{dx}\frac{dS}{dy} + b\left(\frac{dS}{dx}\right)^2 = 0.$$

IV. Une des asymptotes d'une conique circonscrite à un triangle passe par un point fixe, l'autre asymptote enveloppe une conique inscrite dans ce triangle.

Prenons le triangle pour triangle de référence. Soient t_1, t_2 les asymptotes et $a\alpha + b\beta + c\gamma$ la ligne à l'infini, la conique aura pour équation

$$t_1 t_2 = (a\alpha + b\beta + c\gamma)^2;$$

et, comme elle passe par les points (β, γ), (γ, α), (α, β), cette équation ne devra contenir aucun terme en α^2, β^2, γ^2; si donc t_1 est représentée par $\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma$, t_2 le sera par $\frac{a^2}{\lambda}\alpha + \frac{b^2}{\mu}\beta + \frac{c^2}{\nu}\gamma$; et si t_1 passe par $(\alpha', \beta', \gamma')$, t_2 sera tangente à la conique $a\sqrt{\alpha\alpha'} + b\sqrt{\beta\beta'} + c\sqrt{\gamma\gamma'} = 0$ (285, Ex.) inscrite dans le triangle. On prouverait de la même manière que, si l'une des cordes d'intersection d'une conique circonscrite à un triangle avec une autre conique définie par l'équation générale est représentée par $\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma = 0$, l'autre corde a pour équation

$$\frac{a}{\lambda}\alpha + \frac{b}{\mu}\beta + \frac{c}{\nu}\gamma = 0.$$

V. Des coniques ont même triangle autopolaire, l'une des cordes d'intersection d'une de ces coniques avec une conique fixe (donnée par l'équation générale) passe par un point fixe, l'autre corde enveloppe une conique (M. Burnside).

En prenant le triangle autopolaire pour triangle de référence, les termes en $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$ disparaissent de l'équation des coniques; si donc l'une des cordes est représentée par $\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma = 0$, l'autre le sera par

$$\lambda\alpha(\mu g + \nu h - \lambda f) + \mu\beta(\nu h + \lambda f - \mu g) + \nu\gamma(\lambda f + \mu g - \nu h) = 0.$$

VI. Soient A et A'$[(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)]$ les points de contact d'une tangente commune aux deux coniques U et V; P et P' deux points quelconques de l'une et l'autre conique : trouver le lieu de l'intersection C des droites AP, A'P' lorsque PP' passe par un point fixe O de la tangente commune (M. Williamson).

Désignons par P et Q les polaires de $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ prises respectivement par rapport à U et V; α, β, γ étant les coordonnées de C,

celles du point P (où AC rencontre une deuxième fois la conique) seront

$$U\alpha_1 - 2P\alpha, \quad U\beta_1 - 2P\beta, \quad U\gamma_1 - 2P\gamma;$$

de même, celles du point P′ seront $V\alpha_2 - 2Q\alpha$... Si la droite PP′ passe par le point O, que nous supposerons à l'intersection de α et β, on aura en général, pour le lieu du point C, l'équation

$$\frac{U\alpha_1 - 2P\alpha}{U\beta_1 - 2P\beta} = \frac{V\alpha_2 - 2Q\alpha}{V\beta_2 - 2Q\beta},$$

qui est celle d'une courbe du quatrième ordre quand A, A′ sont des points quelconques pris respectivement sur U et sur V, et O un point sans relation déterminée avec A et A′.

Lorsque les points A, A′ et O sont en ligne droite (sur la ligne α par exemple), le lieu se réduit à une courbe du troisième ordre

$$PV\beta_2 = QU\beta_1,$$

parce qu'alors α_1 et α_2 étant nuls, l'équation primitive est divisible par α.

Enfin si les points A et A′ sont en outre les points de contact d'une tangente commune, P et Q représentent la même droite, et l'équation précédente se réduit à

$$U = kV.$$

Le lieu est alors une conique passant par l'intersection des coniques U et V.

VII. Inscrire dans une conique donnée par l'équation générale un triangle dont les côtés passent par les trois points (β, γ), (γ, α), (α, β).

Prenons le triangle formé par les trois points pour triangle de référence. La droite qui joint un point (α, β, γ) de la courbe à un point $(\alpha', \beta', \gamma')$ rencontre la courbe en un deuxième point dont les coordonnées sont $S'\alpha - 2P'\alpha'$, $S'\beta - 2P'\beta'$, $S'\gamma - 2P'\gamma'$. Lorsque $(\alpha', \beta', \gamma')$ est l'intersection des droites β et γ, on a $\beta' = 0$, $\gamma' = 0$, et on peut prendre $\alpha' = 1$; alors $S' = a$, $P' = S_1$, et les coordonnées du deuxième point de rencontre de la droite qui joint (α, β, γ) à (β, γ) avec la conique sont

$$a\alpha - 2S_1, \quad a\beta, \quad a\gamma.$$

De même la droite menée par (α, β, γ) et (γ, α) rencontre la courbe en un autre point

$$(b\alpha, \; b\beta - 2S_2, \; b\gamma),$$

et la droite qui joint ces deux points passe par (α, β) lorsqu'on a

$$\frac{a\alpha - 2S_1}{a\beta} = \frac{b\alpha}{b\beta - 2S_2}.$$

Par suite les coordonnées du sommet doivent satisfaire à la relation

$$2S_1S_2 = a\alpha S_2 + b\beta S_1;$$

en se reportant aux notations du n° 291, et remplaçant, dans cette équation, $a\alpha$ par $S_1 - h\beta - g\gamma$, et $b\beta$ par $S_2 - h\alpha - f\gamma$, elle devient

$$h(\alpha S_1 + \beta S_2) + \gamma(fS_1 + gS_2) = 0,$$

et comme (α, β, γ) appartient à la courbe $\alpha S_1 + \beta S_2 + \gamma S_3 = 0$, on a en définitive

$$\gamma(fS_1 + gS_2 - hS_3) = 0.$$

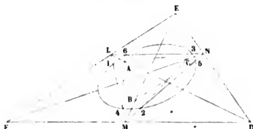
Le facteur γ peut être supprimé comme n'ayant pas de signification géométrique; l'un quelconque des points où la droite γ rencontre la courbe satisfait, il est vrai, aux conditions analytiques exprimées plus haut, c'est-à-dire qu'en le joignant à (β, γ) et (γ, α) on détermine sur la courbe deux points en ligne droite avec (α, β); mais les droites qu'on obtient ainsi coïncident avec γ et ne sauraient former de triangle avec γ. Le sommet du triangle cherché se trouvera donc à l'un des deux points d'intersection de la courbe avec la droite $fS_1 + gS_2 - hS_3$. Il est d'ailleurs facile de voir que

$$fS_1 = gS_2 = hS_3$$

sont les droites qui joignent les sommets correspondants des triangles $\alpha\beta\gamma$, $S_1S_2S_3$; par suite la droite $fS_1 + gS_2 - hS_3 = 0$ (60, Ex. II) peut se construire de la manière suivante :

Former le triangle DEF (*fig.* 93) ayant pour côtés les polaires des points fixes A, B et C; les droites qui joignent les sommets correspondants des deux triangles DEF, ABC rencontrent le triangle polaire DEF en trois

Fig. 93.



points L, M, N qui déterminent trois droites LM, MN et LN passant par les sommets du triangle cherché.

On pourrait arriver à cette solution par des considérations géomé-

triques. Supposons, en effet, que nous ayons tracé les deux triangles 123, 456 inscrits dans la conique et passant par les points donnés A, B et C. En appliquant le théorème de Pascal à l'hexagone 123456, on voit que la droite BC passe par l'intersection de 16 et 34, et que ce dernier point est le pôle de AL (146, Ex. I). De même AL passe par le pôle de BC, et le point L est sur la polaire de A.

Lorsque les trois points fixes forment un triangle autopolaire, le problème est indéterminé et admet une infinité de solutions.

VIII. Lorsque deux coniques ont un double contact, toute tangente à l'une est divisée harmoniquement par son point de contact, ses points d'intersection avec l'autre conique et avec la corde de contact.

Si l'on remplace dans l'équation $S + R^2 = 0$ d'une conique α, β, γ par

$$l\alpha' + m\alpha'', \quad l\beta' + m\beta'', \quad l\gamma' + m\gamma'',$$

les coordonnées

$$\alpha', \beta', \gamma', \quad \alpha'', \beta'', \gamma''$$

vérifiant l'équation $S = 0$ de l'autre conique, on trouve la relation

$$(lR' + mR'')^2 + 2lmP = 0,$$

qui doit être un carré parfait, lorsque la droite menée par $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ est tangente à $S + R^2$.

Pour cela, il faut qu'on ait $P = -2R'R''$, et l'équation se réduit à

$$(lR' - mR'')^2 = 0,$$

ce qui démontre le théorème.

IX. Trouver l'équation de la conique tangente aux cinq droites

$$\alpha, \beta, \gamma, \quad A\alpha + B\beta + C\gamma, \quad A'\alpha + B'\beta + C'\gamma.$$

Réponse. $$\sqrt{l\alpha} + \sqrt{m\beta} + \sqrt{n\gamma} = 0,$$

l, m et n étant déterminés par les conditions

$$\frac{l}{A} + \frac{m}{B} + \frac{n}{C} = 0, \quad \frac{l}{A'} + \frac{m}{B'} + \frac{n}{C'} = 0.$$

X. Trouver l'équation de la conique tangente aux cinq droites α, β, γ, $\alpha + \beta + \gamma$, $2\alpha + \beta - \gamma$.

Dans ce cas

$$l + m + n = 0, \quad \tfrac{1}{2}l + m - n = 0,$$

l'équation cherchée est donc

$$2\sqrt{-\alpha} + \sqrt{3\beta} + \sqrt{\gamma} = 0.$$

XI. Trouver l'équation de la conique tangente aux droites α, β, γ en leurs points milieux.

En prenant les trois droites pour lignes de référence, et désignant par a, b, c leurs longueurs respectives, on trouve

$$\sqrt{a\alpha} + \sqrt{b\beta} + \sqrt{c\gamma} = 0.$$

L'énoncé de ce problème semble contenir une donnée de trop ; mais, en se reportant à la propriété connue du triangle circonscrit (les trois droites qui joignent les sommets aux points de contact des côtés opposés passent en un même point), on voit qu'il y a une des données qui est la conséquence de deux autres, et ne saurait par suite compter comme donnée proprement dite.

XII. Trouver la condition pour que $\sqrt{l\alpha} + \sqrt{m\beta} + \sqrt{n\gamma} = 0$ représente une parabole.

Il suffit d'exprimer que la courbe est tangente à la droite située à l'infini (254), on a ainsi

$$\frac{l}{a} + \frac{m}{b} + \frac{n}{c} = 0.$$

XIII. Trouver le lieu du foyer d'une parabole inscrite dans le triangle $\alpha\beta\gamma$.

Soient α', β', γ' les coordonnées d'un des foyers d'une conique inscrite dans le triangle $\alpha\beta\gamma$; les droites qui joignent ce foyer aux sommets du triangle auront pour équations

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'}, \quad \frac{\beta}{\beta'} = \frac{\gamma}{\gamma'}, \quad \frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{\alpha}{\alpha'},$$

les droites qui joignent l'autre foyer aux mêmes sommets, faisant des angles égaux avec les côtés du triangle (189), seront représentées par (55)

$$\alpha'\alpha = \beta'\beta, \quad \beta'\beta = \gamma'\gamma, \quad \gamma'\gamma = \alpha'\alpha,$$

et on aura, pour les coordonnées du deuxième foyer,

$$\frac{1}{\alpha'}, \quad \frac{1}{\beta'}, \quad \frac{1}{\gamma'}.$$

Si donc on connaît l'équation du lieu décrit par un foyer, on pourra en déduire immédiatement celle du lieu décrit par l'autre ; le second foyer (α'', β'', γ'') étant à l'infini, on a

$$\alpha'' \sin A + \beta'' \sin B + \gamma'' \sin C = 0,$$

et le premier foyer $(\alpha', \beta', \gamma')$ se trouve sur le cercle

$$\frac{\sin A}{\alpha'} + \frac{\sin B}{\beta'} + \frac{\sin C}{\gamma'} = 0.$$

Les coordonnées du foyer de la parabole situé à l'infini sont

$$\frac{l}{\sin^2 A}, \quad \frac{m}{\sin^2 B}, \quad \frac{n}{\sin^2 C},$$

puisque (Ex. XII) elles doivent vérifier à la fois les deux équations

$$\alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C = 0, \quad \sqrt{l\alpha} + \sqrt{m\beta} + \sqrt{n\gamma} = 0.$$

Les coordonnées de l'autre foyer sont alors

$$\frac{\sin^2 A}{l}, \quad \frac{\sin^2 B}{m}, \quad \frac{\sin^2 C}{n}.$$

XIV. Trouver l'équation de la directrice de cette parabole.

En appliquant le procédé indiqué au n° 291, on trouve, pour l'équation de la polaire du point dont on vient de donner les coordonnées,

$$l\alpha(\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A) + m\beta(\sin^2 C + \sin^2 A - \sin^2 B)$$
$$+ n\gamma(\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C) = 0,$$

ou

$$l\alpha \sin B \sin C \cos A + m\beta \sin C \sin A \cos B + n\gamma \sin A \sin B \cos C = 0,$$

et, en se reportant à la relation entre l, m et n de l'Exercice XII,

$$l \sin B \sin C (\alpha \cos A - \gamma \cos C) + m \sin C \sin A (\beta \cos B - \gamma \cos C) = 0.$$

La directrice passe donc par le point de concours des hauteurs du triangle (54, Ex. III).

XV. Trouver le lieu des foyers des coniques inscrites dans un quadrilatère $\alpha\beta\gamma\delta$.

Puisqu'une droite quelconque peut s'exprimer en fonction de trois autres, les tangentes doivent satisfaire à une relation identique

$$a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta = 0,$$

qui doit être vérifiée non-seulement par les coordonnées $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ d'un foyer, mais encore par celles de l'autre $\frac{1}{\alpha'}, \frac{1}{\beta'}, \frac{1}{\gamma'}, \frac{1}{\delta'}$.

Le lieu est donc une courbe du troisième degré

$$\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma} + \frac{d}{\delta} = 0.$$

CHAPITRE XV.

DU PRINCIPE DE DUALITÉ, ET DE LA MÉTHODE DES POLAIRES RÉCIPROQUES.

298. La méthode des notations abrégées, exposée au Chapitre précédent, peut s'appliquer aux équations en coordonnées tangentielles. Ainsi, quand les constantes λ, μ et ν vérifient la relation

$$(a\lambda + b\mu + c\nu)(a'\lambda + b'\mu + c'\nu) = (a''\lambda + b''\mu + c''\nu)(a'''\lambda + b'''\mu + c'''\nu),$$

la droite qu'elles définissent est tangente à une section conique (285) : par suite, la droite qui joint les deux points (70)

$$a\lambda + b\mu + c\nu = o, \quad a''\lambda + b''\mu + c''\nu = o$$

est tangente à cette conique, puisqu'elle est déterminée par des valeurs de λ, μ et ν satisfaisant à l'équation précédente.

Si donc α, β, γ et δ sont des équations de points (c'est-à-dire des fonctions du premier degré en λ, μ et ν), l'équation $\alpha\gamma = k\beta\delta$ représente en coordonnées tangentielles une conique tangente aux quatre droites $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$ et $\delta\alpha$. Plus généralement, $S = o$ et $S' = o$ étant les équations tangentielles de deux courbes, $S - kS' = o$ sera l'équation tangentielle d'une courbe à laquelle seront tangentes toutes les tangentes communes à S et S', puisque les valeurs de λ, μ et ν qui annulent à la fois S et S' annulent aussi $S - kS'$.

Ainsi, S étant une conique, $S - k\alpha\beta$ sera une conique ayant avec la précédente, pour tangentes communes, les tangentes issues des points α et β. L'équation $\alpha\gamma = k\beta^2$ représente une conique dans laquelle les couples de tangentes

issues des points α et γ coïncident respectivement avec les droites $\alpha\beta$, $\gamma\beta$; les points α, γ se trouvent donc sur cette conique, et β est le pôle de la corde qui les joint. De même, S et $S - \alpha^2$ représentent deux coniques ayant un double contact, et les tangentes menées par les extrémités de leur corde commune se rencontrent en α; autrement dit, α est le pôle de la corde de contact.

On peut, du reste, en appliquant à l'équation $\alpha\gamma = k^2\beta^2$ le procédé indiqué au nº 270, représenter un point de la courbe par

$$\mu^2\alpha + 2\mu k\beta + \gamma,$$

puisque la tangente en ce point passe par les points

$$\mu\alpha + k\beta \quad \text{et} \quad \mu k\beta + \gamma \text{ (*)}.$$

EXERCICES.

1. Trouver le lieu du centre des coniques inscrites dans un quadrilatère.

Soient $\Sigma = 0$, $\Sigma' = 0$ les équations tangentielles de deux coniques inscrites dans un quadrilatère; l'équation tangentielle d'une autre conique inscrite quelconque sera $\Sigma + k\Sigma' = 0$ (298), et on aura pour les coordonnées du centre de cette conique (140, 151)

$$\frac{G + kG'}{C + kC'}, \quad \frac{F + kF'}{C + kC'}.$$

La forme de ces expressions (7) montre que ce centre est sur la

(*) En d'autres termes, si dans un système quelconque, x', y', z' et x'', y'', z'' sont les coordonnées de deux points d'une conique, x''', y''', z''' celles du pôle de la droite qui les joint, les coordonnées d'un point quelconque de la courbe peuvent se mettre sous la forme

$$\mu^2x' + 2\mu kx''' + x'', \quad \mu^2y' + 2\mu ky''' + y'', \quad \mu^2z' + 2\mu kz''' + z'',$$

puisque la tangente en ce point détermine sur les deux tangentes fixes des segments qui sont dans les rapports $\mu : k$, $\mu k : 1$. Lorsque $k = 1$, la courbe est une parabole. L'espace nous manque pour développer ce principe, qui est d'un usage fréquent; le lecteur pourra en déduire la solution du problème suivant : *Trouver le lieu du point où une tangente rencontrant deux tangentes fixes est divisée dans un rapport donné.*

droite qui joint les centres $\left(\frac{G}{C}, \frac{F}{C}\right)$, $\left(\frac{G'}{C'}, \frac{F'}{C'}\right)$ des deux premières coniques et la divise, dans le rapport de C à kC'.

II. Trouver le lieu des foyers des coniques inscrites dans un quadrilatère.

En remplaçant, dans les équations (288, Ex.) qui déterminent les foyers, A par A + kA'..., et éliminant k, on trouve, pour l'équation du lieu,

$$[C(x^2-y^2)+2Fy-2Gx+A-B][C'xy-F'x-G'y+H'] \\ =[C'(x^2-y^2)+2F'y-2G'x+A'-B'][Cxy-Fx-Gy+H],$$

qui est celle d'une courbe du troisième degré (*voir* 297, Ex. XV), les termes de degré plus élevé se détruisant réciproquement. Cependant lorsque Σ et Σ' sont des paraboles, $\Sigma + k\Sigma'$ représente un système de paraboles inscrites dans un même triangle; on a alors $C = 0$, $C' = 0$, et le lieu des foyers se réduit à un cercle.

Lorsque les coniques sont concentriques, et que le centre est pris pour origine, les coefficients F, F', G, G' s'annulent tous à la fois; l'équation $\Sigma + k\Sigma'$ représente un système de coniques inscrites dans un parallélogramme, et le lieu des foyers est une hyperbole équilatère (*).

III. Les cercles directeurs des coniques inscrites dans un quadrilatère ont même axe radical.

En effet, nous avons vu (294, Ex.) que l'équation du cercle directeur ne contenait les coefficients A, B,... qu'au premier degré, et, par suite, prenait la forme $S + kS' = 0$ lorsqu'on y remplaçait A par A + kA'....
Le théorème suivant n'est qu'un cas particulier de celui qui précède.

Les cercles décrits sur les trois diagonales d'un quadrilatère complet comme diamètres ont même axe radical.

299. Chacune des équations trouvées au Chapitre précédent est par suite susceptible d'une double interprétation, suivant qu'on la considère comme relative à des coordonnées trilinéaires ou tangentielles (70), et peut conduire à un double théorème, le théorème déduit de la considération des coordonnées tangentielles étant le *réciproque* de celui qui se

(*) On démontrerait de la même manière que le lieu des foyers des coniques circonscrites à un quadrilatère, lieu qui est en général du sixième degré, se réduit au quatrième degré lorsque le quadrilatère est un parallélogramme.

rapporte aux coordonnées trilinéaires. Ainsi, par exemple, nous avons démontré (266) que si trois coniques S, $S + LM$, $S + LN$ ont deux points (S, L) communs, les cordes $(M, N, M - N)$ qui joignent les autres points communs à ces coniques prises deux à deux se coupent en un même point. Mais si nous considérons ces équations comme relatives à des coordonnées tangentielles, nous voyons que L est le point de concours des deux tangentes communes aux trois coniques, et que les points M, N, $M - N$ sont les intersections des tangentes communes à ces coniques prises deux à deux; de là ce théorème réciproque : Si trois coniques ont deux tangentes communes, les intersections des tangentes communes à ces coniques prises deux à deux sont en ligne droite.

De cette manière, chaque théorème *de position*, c'est-à-dire ne se rapportant ni à la grandeur des lignes, ni à celle des angles, conduit à un théorème réciproque, dont l'énoncé s'obtient en changeant dans l'énoncé du premier les mots *points* et *lignes* en *lignes* et *points;* et ces deux théorèmes se démontrent par les mêmes équations interprétées de deux manières différentes.

Nous exposerons, dans ce Chapitre, la méthode géométrique qui a fixé l'attention des mathématiciens sur ce *principe de dualité* (*).

300. Une courbe quelconque S étant donnée, si l'on prend les pôles de ses tangentes par rapport à une conique également donnée U, que l'on appelle conique *auxiliaire*, on obtient une nouvelle courbe s qui est la *courbe polaire* de S par rapport à U.

Nous avons déjà eu occasion de résoudre un problème relatif aux courbes polaires (225, Ex. XII), et nous pouvons

(*) La methode des polaires reciproques est due à Poncelet, qui l'a exposée dans le IVe volume du *Journal de Crelle*. M. Plücker a présente le principe de dualité (*System der Analytischen Geometrie*, 1835) au point de vue purement analytique que nous venons d'indiquer; mais c'est Möbius qui, dans sa Statique (*Barycentrische Calcul*, 1827) a introduit l'usage des coordonnees tangentielles.

une conique, les droites correspondantes de la figure *s* sont tangentes à la polaire de cette conique par rapport à U. En général, lorsque le *lieu* d'un point lié à S est une courbe S', l'*enveloppe* des droites correspondantes liées à *s* est une courbe *s'*, polaire réciproque de S'.

303. *Le degré de la polaire réciproque d'une courbe est égal à la classe* (**145**, Note) *de cette courbe, c'est-à-dire au nombre de tangentes qu'on peut lui mener par un point quelconque.*

En effet, le degré de *s* est déterminé par le nombre de points suivant lesquels une droite peut couper *s*; et, à une série de points de *s* situés sur une droite, correspond un *même nombre* de tangentes à S passant par le point correspondant à cette droite. Lorsque S est une conique, on peut lui mener par un point deux tangentes, réelles ou imaginaires, et on ne peut lui en mener que deux (**145**); donc une droite peut rencontrer *s* en deux points, réels ou imaginaires, et ne peut la rencontrer qu'en deux points : par suite la polaire réciproque d'une conique est une courbe du second degré.

304. Les exemples suivants serviront à montrer comment on peut, dans le cas où S et *s* sont des coniques, déduire par cette méthode un théorème d'un autre.

Nous avons vu (**267**) que si, dans la conique S, on *inscrit* un hexagone ayant A, B, C, D, E, F pour *côtés*, les *points* d'intersection AD, BE, CF de ses côtés opposés se trouvent *sur une ligne droite*. Nous pouvons en conclure que si, à la conique *s*, on *circonscrit* un hexagone dont les *sommets* sont *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, les *droites ad*, *be*, *cf concourent en un même point* (**265**). Le théorème de Pascal et celui de Brianchon sont réciproques l'un de l'autre ; c'est ainsi, du reste, que le second a été obtenu.

On trouvera dans ce numéro et dans les suivants un certain nombre de théorèmes avec leurs réciproques en regard. En s'astreignant à écrire ces derniers avant d'en lire l'énoncé, le lecteur arrivera rapidement à se rendre maître de la méthode qui se réduit en définitive à un échange de mots : point et ligne; inscrit et circonscrit; lieu et enveloppe, etc.

Les trois côtés d'un triangle tournent autour de trois points fixes, tandis que deux sommets glissent sur deux droites; le troisième sommet décrit une conique (269).

Si les points par lesquels passent les côtés sont en ligne droite, le troisième sommet décrit une droite (47, Ex. II).

Dans quel autre cas le troisième sommet décrit-il une droite (47, Ex. III)?

Les sommets d'un triangle glissent sur trois droites fixes, tandis que deux de ses côtés passent par deux points fixes; le troisième côté enveloppe une section conique.

Si les droites sur lesquelles glissent les sommets sont concourantes, le troisième côté passe par un point fixe.

Dans quel autre cas le troisième côté du triangle passe-t-il par un point fixe (50, Ex. III)?

Lorsque deux coniques se touchent, il en est de même de leurs réciproques; car les premières ayant de commun un point et la tangente en ce point, les dernières ont une tangente commune et un point commun qui est le point de contact de cette tangente. Quand deux coniques ont un double contact, leurs réciproques jouissent de la même propriété.

Quand deux des sommets d'un triangle circonscrit à une conique glissent sur deux droites fixes, le troisième sommet décrit une conique ayant un double contact avec la conique donnée (272, Ex. II).

Quand deux des côtés d'un triangle inscrit dans une conique passent par deux points fixes, le troisième côté enveloppe une conique ayant un double contact avec la conique donnée (272, Ex. III).

305. Nous avons démontré (301) (*fig.* 94) que lorsque deux points, P et P', de S correspondent aux tangentes *pt*, *p' t'* à *s*, les tangentes en P et P' correspondent aux points de contact *p* et *p'*, et leur intersection Q à la corde de contact *pp'*; par suite :

A un point Q *et à sa polaire* PP' *par rapport à* S, *correspondent une droite pp' et son pôle q par rapport à s.*

Lorsqu'une conique passant par deux points fixes est tangente à deux droites données, la ligne qui joint les points de contact passe par l'un des points d'un couple fixe (286, Ex.).

Lorsqu'une conique tangente à deux droites fixes passe par deux points donnés, l'intersection des tangentes menées par ces points se trouve sur une des droites d'un couple fixe.

Les polaires d'un point fixe, prises par rapport à une série de coniques passant par quatre points, concourent en un même point (151, Ex. II).

Les pôles d'une droite fixe, pris par rapport à une série de coniques inscrites dans un même quadrilatère, sont situés en ligne droite (278, Ex. III).

Le lieu des pôles d'une droite fixe, pris par rapport à une série de coniques passant par quatre points, est une section conique (278, Ex. I).

L'enveloppe des polaires d'un point fixe, prises par rapport à une série de coniques inscrites dans un quadrilatère, est une section conique.

Les droites qui joignent les sommets d'un triangle aux sommets opposés de son triangle polaire pris par rapport à une conique, concourent en un même point (99).

Les points d'intersection respectifs des côtés d'un triangle avec les côtés opposés de son triangle polaire sont en ligne droite.

Inscrire dans une conique un triangle dont les côtés passent par trois points donnés (297, Ex. VII).

Circonscrire à une conique un triangle dont les sommets soient situés sur trois droites données.

306. Étant données deux coniques S et S′ et leurs réciproques s et s', aux quatre points A, B, C, D communs à S et S′ correspondent les quatre tangentes a, b, c, d communes à s et s'; et aux six cordes d'intersection de S avec S′, AB, CD; AC, BD; AD, BC, correspondent les six points d'intersection des tangentes communes à s et s': ab, cd; ac, bd; ad, bc (*).

Lorsque trois coniques ont chacune un double contact avec une quatrième, ou sont tangentes à deux droites fixes, leurs six cordes d'intersection passent trois par trois par un même point (264).

Lorsque trois coniques ont chacune un double contact avec une quatrième, ou passent par deux points fixes, les six points d'intersection des tangentes communes sont situés, trois par trois, sur une même droite.

En d'autres termes, trois coniques ayant chacune un double contact avec une quatrième, peuvent être considérées comme ayant quatre centres radicaux.

Ou bien : trois coniques ayant chacune un double contact avec une quatrième, peuvent être considérées comme ayant quatre axes de similitude. (*Voir* le théorème du n° 117, dont celui-ci n'est qu'une extension.)

(*) On appelle quelquefois *quadrangle* le système de quatre points réunis

Si, par le point de contact de deux coniques qui se touchent, on mène une corde, les tangentes aux extrémités de cette corde se rencontrent sur la corde commune aux deux coniques.

Si par un point, pris sur la tangente au point de contact de deux coniques qui se touchent, on mène une tangente à chacune de ces coniques, la ligne qui joint leurs points de contact passe par l'intersection des tangentes communes aux deux coniques.

Si, par l'intersection des tangentes communes à deux coniques, on mène deux cordes, les droites qui joignent leurs extrémités se coupent sur l'une ou l'autre des cordes communes aux coniques (272, Ex. 1).

Si, par deux points d'une corde commune à deux coniques, on mène des tangentes à ces coniques, les diagonales du quadrilatère ainsi formé passent par l'une ou l'autre des intersections des tangentes communes.

Si A et B sont deux coniques ayant chacune un double contact avec S, les cordes de contact de A et B avec S et les cordes d'intersection de A et de B concourent en un même point et forment un faisceau harmonique (263).

Si A et B sont deux coniques ayant chacune un double contact avec S, les intersections des tangentes menées à leurs points de contact avec S et celle des tangentes communes à A et B sont situées sur une droite qu'elles divisent harmoniquement.

Si A, B et C sont trois coniques ayant chacune un double contact avec S, et si, en même temps, A et B sont tangentes à C, les tangentes menées par les points de contact se coupent sur une corde commune à A et B.

Si A, B et C sont trois coniques ayant chacune un double contact avec S, et si A et B sont tangentes à C, la droite qui joint les points de contact passe par l'intersection des tangentes communes à A et B.

307. Nous avons supposé, jusqu'ici, que la conique auxiliaire U était quelconque : dans ce qui va suivre, nous prendrons, pour nous conformer à un usage assez répandu, un cercle pour conique auxiliaire, et, à moins d'indication spéciale, nous entendrons par courbes polaires les courbes polaires prises *par rapport à un cercle*.

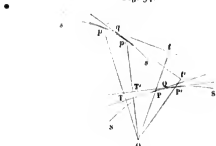
Nous avons vu (88) que la polaire d'un point par rapport à

par six droites, de même qu'on désigne sous le nom de *quadrilatère* le système de quatre droites se coupant en six points.

un cercle est perpendiculaire à la droite qui joint ce point au centre, et que le produit des distances au centre du point et de la polaire est égal au carré du rayon. Nous pouvons donc indiquer de la manière suivante la relation qui existe entre deux courbes polaires par rapport à un cercle :

Si d'un point O *donné (fig.* 94) *on abaisse une perpendiculaire* OT *sur une tangente à la courbe* S, *et qu'on la prolonge*

Fig. 94.



jusqu'en p, de telle sorte que le produit OT.O*p soit constant et égal à* k^2, *le lieu des points p sera une courbe s qui est la polaire réciproque de* S. Cela revient, évidemment, à dire que le point *p* est le pôle de PT par rapport à un cercle ayant O pour centre et *k* pour rayon. On voit, du reste (301), que la tangente *pt* correspond au point de contact P, c'est-à-dire que OP est perpendiculaire à *pt* et que $OP.Ot = k^2$.

Une modification dans la valeur de *k* entraîne un changement dans les *dimensions* de S, mais non dans sa *forme*, qui est, en général, la seule chose à considérer. Dans cette manière d'envisager les polaires, on peut faire abstraction du cercle et dire simplement que *s* est la réciproque de S *par rapport au point* O qu'on appelle alors *l'origine*.

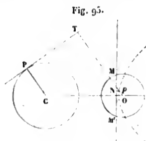
Les théorèmes suivants, déduits des principes exposés ci-dessus, permettent de transformer non-seulement des théorèmes de position, mais encore des théorèmes relatifs à la grandeur des lignes et des angles, et font ressortir les avantages qu'on peut retirer de l'emploi du cercle comme conique auxiliaire.

Les distances de l'origine au point P *et à la droite* pt *correspondante sont réciproques.*

L'angle TQT' *compris entre deux droites* TQ, T'Q *est égal à l'angle* pOp' *que forment les rayons vecteurs menés de l'origine aux points correspondants* p *et* p'. En effet, les droites Op et TQ, Op' et T'Q sont perpendiculaires.

308. *Trouver la polaire réciproque d'un cercle* C *par rapport à un autre cercle* O. Ce problème revient à trouver le lieu du pôle p, par rapport au cercle O, d'une tangente PT au cercle C (*fig.* 95). Si MN est la polaire de C par rapport à O, et PT celle

Fig. 95.



de p, on a (101)

$$\frac{OC}{CP} = \frac{Op}{pN};$$

mais le premier rapport est constant, puisque ses deux termes sont constants; les distances de p au point O et à la droite MN sont donc dans un rapport constant OC : CP; par suite le lieu du point p est une conique ayant O pour foyer, MN comme directrice correspondante et OC : CP pour excentricité. L'excentricité de cette conique est supérieure, inférieure ou égale à l'unité, suivant que le point O est en dehors, en dedans du cercle ou sur le cercle.

Donc : *La polaire réciproque d'un cercle est une section conique ayant l'origine pour foyer, la droite correspondante au centre pour directrice, et qui est une ellipse, une hyperbole ou une parabole, suivant que l'origine est intérieure, extérieure au cercle ou sur le cercle.*

309. Ce qui précède nous permet de déduire du théorème du n° 307 un certain nombre de propriétés relatives aux angles.

Les angles compris entre deux tangentes au cercle et leur corde de contact sont égaux.

La droite menée au foyer par le point d'intersection de deux tangentes à une conique est la bissectrice de l'angle sous lequel est vue du foyer la corde de contact (191).

En effet, l'angle compris entre une tangente PQ (*fig.* 94) et la corde de contact PP′ est égal à l'angle sous lequel est vue du foyer la droite qui joint les points correspondants p et q : de même l'angle QP′P est égal à l'angle sous lequel est vue la droite $p'q$, et comme $\widehat{QPP'} = \widehat{QP'P}$, on a $\widehat{pOq} = \widehat{p'Oq}$.

La tangente au cercle est perpendiculaire au rayon qui passe par le point de contact.

L'angle sous lequel est vue du foyer la droite qui joint un point d'une conique à l'intersection de la directrice avec la tangente en ce point, est un angle droit.

Ce théorème se démontre comme le précédent, en se rappelant que la directrice de la conique correspond au centre du cercle.

La ligne qui joint le pôle d'une droite au centre du cercle est perpendiculaire à cette droite.

La droite qui joint à un point, l'intersection de la directrice avec la polaire de ce point, est vue du foyer sous un angle droit.

La droite qui joint un point au centre du cercle fait des angles égaux avec les tangentes menées au cercle par ce point.

La droite qui joint au foyer l'intersection d'une corde avec la directrice est la bissectrice de l'angle formé par les rayons vecteurs menés du foyer aux extrémités de la corde.

Le lieu des intersections des tangentes au cercle qui se coupent sous un angle donné est un cercle concentrique au premier.

L'enveloppe des cordes vues du foyer d'une conique sous un angle constant est une autre conique ayant avec la première une directrice et un foyer communs.

L'enveloppe des cordes de contact des tangentes qui se coupent

Le lieu de l'intersection des tangentes dont la corde de contact est

sous un angle constant est un cercle concentrique.

vue du foyer sous un angle donné est une conique ayant avec la première une directrice et un foyer communs.

Lorsque par un point fixe on mène des tangentes à une série de cercles concentriques, le lieu des points de contact est un cercle qui passe par le point fixe et le centre des cercles.

Si une droite fixe coupe une série de coniques ayant une directrice et un foyer communs, l'enveloppe des tangentes aux coniques menées par les points de rencontre est une conique tangente à la droite fixe et à la directrice commune et ayant avec les coniques proposées un foyer commun.

Si l'on suppose, dans ce dernier théorème, que la droite fixe est à l'infini, on voit que : L'enveloppe des asymptotes d'une série d'hyperboles ayant une directrice et un foyer communs est une parabole tangente à la directrice commune, et qui a pour foyer le foyer commun.

Si par un point d'une circonférence on mène deux cordes perpendiculaires, la droite qui joint leurs extrémités passe par le centre.

Le lieu du sommet d'un angle droit circonscrit à la parabole est la directrice.

Nous disons une *parabole*, puisque, le point par lequel on mène les cordes étant pris pour origine, la polaire du cercle est une parabole (**308**).

L'enveloppe des cordes d'un cercle qui sont vues sous un angle constant d'un point fixe de la circonférence est un cercle concentrique.

Le lieu des sommets des triangles ayant même base et même angle opposé à cette base est un cercle qui passe par les extrémités de cette base.

Le lieu du sommet d'un angle de grandeur constante circonscrit à la parabole est une conique ayant même foyer et même directrice.

Étant donnés de position deux cotés d'un triangle, et l'angle sous lequel le troisième est vu d'un point fixe, ce troisième côté enveloppe une conique qui a pour foyer le point fixe et qui est tangente aux deux côtés donnés.

Le lieu des sommets des angles droits circonscrits à une ellipse ou à une hyperbole est un cercle.	Dans une conique l'enveloppe de la corde vue sous un angle droit, d'un point de la conique, est une conique ayant ce point pour foyer.

Les pieds des perpendiculaires abaissées d'un point de la circonférence sur un triangle inscrit sont en ligne droite (125).

Si l'on prend le point du cercle pour origine, au triangle *inscrit* dans le *cercle* correspond un triangle *circonscrit* à une *parabole;* au pied de la perpendiculaire abaissée sur une droite correspond une droite menée par le point correspondant perpendiculairement au rayon vecteur issu de l'origine. Donc : *Les perpendiculaires menées par les sommets d'un triangle circonscrit à une parabole, aux droites qui joignent ces sommets au foyer, passent par un même point; et le cercle qui a pour diamètre le rayon vecteur mené du foyer à ce point passe par les sommets du triangle circonscrit.* Par suite : *Le lieu des foyers des paraboles inscrites dans un triangle est le cercle circonscrit à ce triangle* (223, Cor. IV).

Le lieu du pied des perpendiculaires (ou des obliques également inclinées sur les tangentes) abaissées du foyer d'une ellipse ou d'une hyperbole sur les tangentes est un cercle.	Si par un point on mène des rayons vecteurs à un cercle, l'enveloppe des perpendiculaires élevées à ces rayons par leurs extrémités (ou des droites également inclinées sur ces rayons) est une conique qui a le point fixe pour foyer.

310. Les théorèmes relatifs à la grandeur des *lignes passant par l'origine* peuvent se transformer au moyen du premier théorème énoncé au n° 307. Prenons un exemple.

La somme (ou la différence si l'origine est en dehors du cercle) *des distances de l'origine à deux tangentes parallèles est constante et égale au diamètre du cercle.*

A deux parallèles correspondent deux points situés sur une droite passant par l'origine; donc : *La somme des inverses des segments des cordes focales d'une ellipse est constante.*

D'ailleurs (193, Ex. 1) cette somme est égale à quatre fois l'inverse du paramètre, et comme elle ne dépend que du rayon

du cercle et non de sa position, *les courbes réciproques de cercles égaux prises par rapport à une origine quelconque ont toutes le même paramètre.*

Le produit des segments des cordes menées dans le cercle par l'origine est constant.	Le produit des distances du foyer à deux tangentes parallèles est constant.

Donc : La tangente menée par l'origine à un cercle est égale au demi-axe conjugué de l'hyperbole réciproque.

Le théorème : La somme des rayons vecteurs menés d'un point de l'ellipse aux foyers est constante, peut s'énoncer de la manière suivante :

La somme des distances du foyer aux points de contact des tangentes parallèles est constante.	Dans un cercle la somme des inverses des distances d'un point intérieur aux deux tangentes; dont la corde de contact passe par ce point, est constante.

311. Un certain nombre d'expressions relatives à la grandeur des *lignes ne passant pas par l'origine* peuvent se transformer au moyen du théorème du n° 101.

Par exemple, lorsque PA, PB, PC, PD représentent les distances d'un point d'une conique aux côtés d'un quadrilatère inscrit, on a la relation

$$\text{PA}.\text{PC} = k.\text{PB}.\text{PD},$$

qui peut se mettre sous la forme, O étant l'origine,

$$\frac{\text{PA}}{\text{OP}}.\frac{\text{PC}}{\text{OP}} = k\frac{\text{PB}}{\text{OP}}.\frac{\text{PD}}{\text{OP}}.$$

Si l'on désigne par a, b, c, d les points correspondant aux droites A, B, C, D et par ap la distance du point a à la droite correspondant à P, on a, d'après le théorème n° 101,

$$\frac{\text{PA}}{\text{OP}} = \frac{ap}{\text{O}a},$$

et de même pour les autres côtés; d'ailleurs Oa, Ob, Oc, Od sont constants. Donc : *Dans tout quadrilatère circonscrit à*

une conique le produit des distances de deux sommets opposés à une tangente quelconque est dans un rapport constant avec le produit des distances des deux autres sommets à la même tangente.

Le produit des distances d'un point d'une conique à deux tangentes fixes est dans un rapport constant avec le carré de sa distance à leur corde de contact (259).

Le produit des distances de deux points fixes d'une conique à une tangente variable est dans un rapport constant avec le carré de la distance à cette tangente de l'intersection des tangentes aux deux points fixes.

Lorsque l'origine est prise sur la corde de contact, le théorème réciproque est le suivant : Le produit des segments déterminés sur deux tangentes fixes et parallèles par une tangente variable est constant.

Le produit des distances de deux points fixes (les foyers) à une tangente est constant.

Le carré de la distance d'un point fixe à un point d'une conique est dans un rapport constant avec le produit des distances de ce dernier point à deux droites fixes.

En général, on peut toujours transformer la relation qui existe entre les distances PA, PB,... d'un point variable P à des droites fixes, lorsqu'elle est homogène, et en déduire une relation entre les distances ap, bp',... des points fixes a, b,... à une droite variable, ces points et cette droite correspondant respectivement aux droites fixes et au point variable P. Il suffit, pour cela, de diviser la première expression par une puissance déterminée de la distance OP de l'origine O au point P, et de remplacer dans le résultat, d'après les indications du n° 101, chaque terme $\frac{PA}{OP}$ par $\frac{ap}{Oa}$.

On peut donc, en suivant cette méthode, transformer une équation relative à des coordonnées trilinéaires, puisqu'elle exprime une relation homogène entre les distances d'un point à trois droites fixes, et en déduire une relation entre les dis-

tances λ, μ, ν de trois points fixes à une tangente de la courbe réciproque, relation qui peut être considérée comme une espèce d'équation tangentielle de cette courbe (*). L'équation générale d'une conique en coordonnées trilinéaires devient, par cette transformation,

$$a\frac{\lambda^2}{\rho^2} + b\frac{\mu^2}{\rho'^2} + c\frac{\nu^2}{\rho''^2} + 2f\frac{\mu\nu}{\rho'\rho''} + 2g\frac{\nu\lambda}{\rho''\rho} + 2h\frac{\lambda\mu}{\rho\rho'} = 0,$$

ρ, ρ', ρ'' désignant les distances de l'origine aux sommets du nouveau triangle de référence. De même, à la conique définie par l'équation homogène du deuxième degré

$$A\lambda^2 + B\mu^2 + \ldots = 0$$

entre les distances λ, μ et ν, correspond une courbe réciproque qui a pour équation en coordonnées trilinéaires

$$A\frac{\alpha^2}{\alpha'^2} + B\frac{\beta^2}{\beta'^2} + C\frac{\gamma^2}{\gamma'^2} + 2F\frac{\beta\gamma}{\beta'\gamma'} + 2G\frac{\gamma\alpha}{\gamma'\alpha'} + 2H\frac{\alpha\beta}{\alpha'\beta'} = 0,$$

α', β', γ' représentant les coordonnées trilinéaires de l'origine.

EXERCICES.

1. Dans une conique définie par un foyer et un triangle circonscrit, les distances ρ, ρ', ρ'' des sommets du triangle à une tangente quelconque vérifient la relation

$$\frac{\rho}{\lambda}\sin\theta + \frac{\rho'}{\mu}\sin\theta' + \frac{\rho''}{\nu}\sin\theta'' = 0,$$

dans laquelle θ, θ', θ'' représentent les angles sous lesquels les côtés du triangle sont vus du foyer.

Cette relation peut se déduire de l'équation trilinéaire du cercle circonscrit au triangle dont elle est la réciproque. Lorsque le foyer coïncide avec le centre du cercle inscrit, on a

$$\theta = 90^\circ + \tfrac{1}{2}A, \quad \rho\sin\tfrac{1}{2}A = r,$$

et l'équation tangentielle (dans ce système particulier) du cercle inscrit devient

$$\mu\nu\,\text{cotang}\,\tfrac{1}{2}A + \nu\lambda\,\text{cotang}\,\tfrac{1}{2}B + \lambda\mu\,\text{cotang}\,\tfrac{1}{2}C = 0.$$

(*) *Voir* à la fin de ce volume la Note relative aux équations tangentielles.

En y remplaçant successivement deux des cotangentes par des tangentes, on obtient les équations des cercles exinscrits.

II. Dans une conique définie par un foyer et un triangle inscrit, les distances des sommets du triangle à une tangente satisfont à la relation

$$\sin\tfrac{1}{2}\theta\sqrt{\frac{\lambda}{\rho}}+\sin\tfrac{1}{2}\theta'\sqrt{\frac{\mu}{\rho'}}+\sin\tfrac{1}{2}\theta''\sqrt{\frac{\nu}{\rho''}}=0.$$

L'équation tangentielle du cercle circonscrit prend alors la forme

$$\sin A\sqrt{\lambda}+\sin B\sqrt{\mu}+\sin C\sqrt{\nu}=0.$$

III. La conique définie par un foyer et trois tangentes a pour équation trilinéaire

$$\sin\theta\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha'}}+\sin\theta'\sqrt{\frac{\beta}{\beta'}}+\sin\theta''\sqrt{\frac{\gamma}{\gamma'}}=0,$$

comme on peut le voir en formant la réciproque de l'équation trouvée plus haut pour le cercle circonscrit.

IV. On trouve de même, en partant des résultats obtenus à l'Exercice I, pour l'équation trilinéaire de la conique définie par un foyer et trois points,

$$\frac{\alpha'}{\alpha}\tan\tfrac{1}{2}\theta+\frac{\beta'}{\beta}\tan\tfrac{1}{2}\theta'+\frac{\gamma'}{\gamma}\tan\tfrac{1}{2}\theta''=0.$$

312. Un très-grand nombre de propositions relatives à la grandeur des lignes peuvent se ramener à des théorèmes concernant des droites divisées harmoniquement ou anharmoniquement, et par suite être transformées au moyen du principe suivant :

A quatre points en ligne droite correspondent quatre droites concourantes, et le rapport anharmonique du faisceau qu'elles forment est égal à celui des quatre points.

Ce principe est évident, puisque chaque droite du faisceau mené par l'origine aux points donnés est perpendiculaire à l'une des droites correspondant à ces points. Les propriétés anharmoniques des coniques en général peuvent ainsi se déduire de celles du cercle.

Le rapport anharmonique du faisceau formé en joignant quatre points fixes d'une conique à un quelconque de ses points est constant.

Le rapport anharmonique des quatre points suivant lesquels une tangente variable à une conique est divisée par quatre tangentes fixes est constant.

Le premier de ces théorèmes est vrai pour le cercle, puisque tous les angles du faisceau sont constants; donc le second est vrai pour toutes les coniques; le second théorème est vrai pour le cercle, puisque les angles au centre correspondant aux quatre segments sont constants; donc le premier est vrai pour toutes les coniques. En cherchant les angles qui, dans la figure réciproque, correspondent aux angles constants dans le cas du cercle, on voit que les angles sous lesquels les quatre segments de la tangente variable sont vus du foyer sont constants, et que le faisceau inscrit détermine sur la directrice quatre segments vus du foyer sous des angles constants.

313. Le rapport anharmonique des points d'une droite n'est pas la seule relation concernant la grandeur des lignes qui puisse être exprimée en fonction des angles formés par le faisceau qui joint ces points à un point fixe O, et, par suite, subsister pour toute transversale qui rencontre le faisceau. Toute relation entre des distances, qui pourra, en y remplaçant chacune d'elles AB par la quantité $\frac{OA.OB.\sin AoB}{OP}$ (56), être ramenée à une relation entre les sinus des angles sous lesquels ces distances sont vues d'un point donné O, sera dans le même cas, et donnera lieu à un théorème réciproque en prenant le point O pour origine. Ainsi le théorème du n° 148 conduit immédiatement au théorème suivant dû à Carnot :

Lorsqu'une conique rencontre respectivement les côtés AB, BC *et* AC *d'un triangle* ABC *en* c *et* c', a *et* a', b *et* b', *on a la relation*

$$\frac{Ac.Ac'.Ba.Ba'.Cb.Cb'}{Ab.Ab'.Bc.Bc'.Ca.Ca'} = 1.$$

Cette relation est telle, en effet, qu'on peut y remplacer chaque

ligne Ac par le sinus de l'angle AOc, sous lequel elle est vue d'un point fixe. Le théorème réciproque a été donné au n° 295.

314. Ajoutons ici quelques considérations générales sur les coniques réciproques, en étendant à toutes les coniques le théorème du n° 308 : La courbe réciproque d'un cercle est une ellipse, une hyperbole ou une parabole, suivant que l'origine est située en dedans, en dehors du cercle ou sur la circonférence. Il est évident que, plus un point ou une droite sont rapprochés de l'origine, plus la droite ou le point correspondant en sont éloignés; lorsqu'une droite passe par l'origine, le point correspondant est à l'infini, et la droite correspondant à l'origine est elle-même à l'infini. Donc, à deux tangentes menées à une courbe par l'origine correspondent deux points à l'infini de la courbe réciproque. Par suite, si par l'origine on peut mener à la courbe deux tangentes *réelles*, la réciproque a deux points *réels* à l'infini, c'est une hyperbole; lorsque les tangentes menées par l'origine sont *imaginaires*, la réciproque, qui a deux *points imaginaires* à l'Infini, est une ellipse; enfin, quand l'origine est sur la courbe, les deux tangentes réelles coïncident, il en est de même des points à l'infini, et la réciproque est une parabole. La droite à l'infini correspondant à l'origine, on voit que, si l'origine est un point de la courbe, la ligne à l'infini est tangente à la courbe réciproque; ce qui nous conduit encore à ce théorème (254) : *Toutes les paraboles ont une tangente à l'infini.*

315. Aux points de contact de deux tangentes menées par l'origine correspondent les tangentes menées à la réciproque par les points situés à l'infini, c'est-à-dire ses asymptotes. L'excentricité de l'hyperbole réciproque ne dépendant que de l'angle compris entre ses asymptotes, dépend uniquement, par suite, de l'angle compris entre les tangentes menées par l'origine à la courbe primitive.

L'intersection des asymptotes de la courbe réciproque (c'est-à-dire le centre de la courbe) correspond à la corde de contact des tangentes menées par l'origine à la courbe primitive. Ce

théorème comprend, comme cas particulier, le suivant, que nous avons déjà démontré : Au centre du cercle correspond la directrice de la conique réciproque, puisque la directrice est la polaire de l'origine, qui est le foyer de la conique.

EXERCICES.

I. La réciproque d'une parabole par rapport à un point de la directrice est une hyperbole équilatère (*voir* n° 211).

II. Prouver que les théorèmes suivants sont réciproques :

Les hauteurs du triangle circonscrit à une parabole se coupent sur la directrice.

Les hauteurs du triangle inscrit dans une hyperbole équilatère se coupent sur la courbe.

III. Déduire le théorème précédent du théorème de Pascal (268, Ex. III).

IV. Les axes de la courbe réciproque sont respectivement parallèles à la tangente et à la normale menées par l'origine à une conique qui passe par cette origine, et a mêmes foyers que la courbe primitive.

En effet, les axes de la courbe réciproque doivent être parallèles aux bissectrices extérieure et intérieure de l'angle que forment les tangentes menées par l'origine à la courbe primitive. Pour achever la démonstration se reporter au n° 189.

316. On peut toujours placer l'origine de telle sorte que les coniques réciproques, par rapport à cette origine, de deux cercles donnés soient homofocales. En effet, les réciproques des cercles ayant un foyer commun, l'origine, il suffit, pour que l'autre foyer soit aussi commun, qu'elles aient même centre, c'est-à-dire que la polaire de l'origine soit la même par rapport aux deux cercles; par suite, que cette origine coïncide avec un des points déterminés au n° 111. Donc :

En prenant un des points limites pour origine, à un système de cercles ayant même axe radical (109) *correspond comme réciproque un système de coniques homofocales.*

On verrait de même que les réciproques de deux coniques sont concentriques lorsque l'origine est un des trois

points (282) ayant même polaire par rapport aux courbes primitives.

Les coniques homofocales se coupent à angle droit (188).	La tangente commune à deux cercles est vue sous un angle droit de chacun des points limites.
Les tangentes menées par un point à deux coniques homofocales sont également inclinées l'une sur l'autre (189).	Les segments interceptés par deux cercles sur une sécante sont vus sous des angles égaux de chacun des points limites.
Le lieu du pôle d'une droite fixe par rapport à une série de coniques homofocales est une perpendiculaire à la droite fixe (226, Ex. III).	La polaire d'un point fixe par rapport à une série de cercles ayant même axe radical passe par un point fixe, et la droite qui joint les deux points fixes est vue sous un angle droit de chacun des points limites.

317. La méthode des polaires réciproques fournit une solution simple de ce problème : Décrire un cercle tangent à trois cercles donnés. Le lieu des centres des cercles tangents à deux cercles donnés (1) et (2) est évidemment une hyperbole, puisque c'est le lieu du sommet d'un triangle dans lequel on connaît un des côtés et la différence des deux autres. Les polaires de ces centres (308), par rapport à un des cercles donnés (1), enveloppent un cercle (o) qu'il est facile de construire. De même, les polaires par rapport à (1), des centres des cercles tangents à (1) et (3), enveloppent un cercle (o'); par suite, le pôle, par rapport à (1), de la tangente commune à (o) et (o'), est le centre du cercle tangent aux trois cercles donnés.

318. *Trouver l'équation de la réciproque d'une conique par rapport à son centre.*

La longueur p de la perpendiculaire abaissée du centre sur la tangente a pour valeur

$$p^2 = a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta \quad (178),$$

θ étant l'angle que cette perpendiculaire fait avec l'axe a.

L'équation de la réciproque sera donc, en coordonnées po-

laires,

$$\frac{k^4}{\rho^2} = a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta,$$

k étant une constante; et, par suite, en cordonnées ordinaires,

$$\frac{a^2x^2}{k^4} + \frac{b^2y^2}{k^4} = 1.$$

La réciproque est donc une conique concentrique dont les axes sont les inverses des axes a et b de la conique primitive.

319. *Trouver l'équation de la réciproque d'une conique par rapport à un point quelconque* (x', y').

La distance p d'un point (x', y') à une tangente étant (178)

$$p = \frac{k^2}{\rho} = \sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta} - x'\cos\theta - y'\sin\theta,$$

l'équation de la courbe réciproque sera

$$(xx' + yy' + k^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2.$$

320. *Déduire l'équation de la réciproque, par rapport à un point* (x', y'), *de l'équation de cette réciproque par rapport à l'origine.*

Si P est la distance de l'origine à une tangente, la distance d'un autre point (x', y') à cette tangente sera

$$\text{P} - x'\cos\theta - y'\sin\theta \quad (34);$$

ce qui donne, pour l'équation polaire du lieu,

$$\frac{k^2}{\rho} = \frac{k^2}{\text{R}} - x'\cos\theta - y'\sin\theta,$$

ρ et R étant les rayons vecteurs relatifs au point (x', y') et à l'origine; on a, par suite,

$$\frac{k^2}{\text{R}} = \frac{x'x + y'y + k^2}{\rho}, \quad \frac{\text{R}\cos\theta}{k^2} = \frac{\rho\cos\theta}{xx' + yy' + k^2}.$$

Il faut donc, dans l'équation de la réciproque donnée, rempla-

cer x et y respectivement par

$$\frac{k^2 x}{xx' + yy' + k^2}, \quad \frac{k^2 y}{xx' + yy' + k^2}.$$

Le résultat de cette substitution peut, du reste, s'obtenir simplement en mettant l'équation de la réciproque donnée sous la forme

$$u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + \ldots = 0,$$

dans laquelle on a désigné par u_n les termes de degré n, par u_{n-1} ceux de degré $(n-1)$, et ainsi de suite. L'équation de la réciproque, par rapport à un point (x', y'), devient ainsi

$$u_n + u_{n-1}\frac{xx' + yy' + k^2}{k^2} + u_{n-2}\left(\frac{xx' + yy' + k^2}{k^2}\right)^2 + \ldots = 0,$$

et représente une courbe de même degré que la réciproque donnée.

321. *Trouver la réciproque, par rapport au cercle*

$$x^2 + y^2 - k^2 = 0$$

de la conique définie, par l'équation générale.

La polaire, par rapport à l'auxiliaire, d'un point de la courbe réciproque est tangente à la courbe donnée. Nous trouverons donc l'équation de la réciproque en écrivant que la polaire

$$xx' + yy' - k^2,$$

de (x', y'), est tangente à la conique donnée, c'est-à-dire en remplaçant, dans l'équation tangentielle (151) de cette conique, λ, μ et ν par x', y', $-k^2$. On trouve ainsi pour la réciproque

$$Ax^2 + 2Hxy + By^2 - 2Gk^2x - 2Fk^2y + Ck^4 = 0;$$

et on peut déduire de cette équation les diverses propriétés démontrées antérieurement. Ainsi, par exemple, si la conique donnée est une parabole, on a $ab - h^2 = 0$, par suite $C = 0$, et la réciproque passe par l'origine.

Si, pour plus de symétrie, nous avions remplacé k^2 par $-z^2$

et pris la réciproque par rapport à la courbe $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, nous aurions eu $xx' + yy' + zz'$ pour la polaire, et l'équation de la réciproque aurait été obtenue en remplaçant, dans l'équation tangentielle, λ, μ, ν par x, y, z. La condition pour que la droite $\lambda x + \mu y + \nu z$ soit tangente à une courbe peut donc être considérée comme l'équation de la réciproque de cette courbe par rapport à $x^2 + y^2 + z^2 = 0$.

L'équation tangentielle du $n^{ième}$ degré représente toujours une courbe de la $n^{ième}$ classe; car, si l'on suppose que $\lambda x + \mu y + \nu z$ passe par un point fixe, c'est-à-dire qu'on ait $\lambda x' + \mu y' + \nu z' = 0$, en éliminant ν entre cette équation et l'équation tangentielle donnée, on obtiendra une équation de degré n pour déterminer le rapport $\lambda : \mu$; par suite on pourra mener n tangentes par le point donné.

322. Nous terminerons ce Chapitre en indiquant une série de théorèmes pour la transformation desquels M. Chasles a proposé de prendre pour auxiliaire une *parabole* au lieu d'un *cercle*. Le principe suivant, énoncé au n° 211, permet en effet de transformer facilement des théorèmes relatifs à la grandeur des lignes mesurées parallèlement à une droite fixe.

Deux droites quelconques déterminent sur l'axe d'une parabole un segment de même grandeur que les perpendiculaires abaissées sur cet axe par les pôles de ces deux droites.

A deux tangentes à la courbe primitive, menées parallèlement à l'axe de la parabole, correspondent les deux points à l'infini de la courbe réciproque : par conséquent, la réciproque sera une hyperbole ou une ellipse, suivant que ces tangentes seront réelles ou imaginaires. Ce sera une parabole si l'axe passe par un point à l'infini de la courbe primitive.

Dans une conique, une tangente variable détermine sur deux tangentes parallèles des segments dont le produit est constant.

Aux deux points de contact des tangentes parallèles correspondent les asymptotes de l'hyperbole réciproque; aux intersections de ces tangentes parallèles avec la tangente variable correspondent des parallèles menées par un point aux asymptotes. On a donc les deux théorèmes suivants :

Le produit des segments, que déterminent sur une droite fixe les asymptotes et leurs parallèles menées par un point de la courbe, est constant ;

Le rectangle construit sur les parallèles menées aux asymptotes par un point de la courbe est constant.

Les cordes qui joignent deux points fixes de l'hyperbole à un point variable de cette courbe déterminent sur l'asymptote un segment de longueur constante (199, Ex. 1).

Dans une parabole, les perpendiculaires menées à la tangente au sommet par les intersections d'une tangente variable avec deux tangentes fixes déterminent sur cette tangente au sommet un segment de longueur constante.

Les applications de la méthode précédente sont assez limitées.

CHAPITRE XVI.

PROPRIÉTÉS HARMONIQUES ET ANHARMONIQUES DES SECTIONS CONIQUES (*).

323. Les propriétés harmoniques et anharmoniques des sections coniques se prêtent à un très-grand nombre d'applications dans la théorie de ces courbes; toutefois, il n'est pas inutile de faire remarquer, avant d'aller plus loin, combien l'énoncé général de ces propriétés peut renfermer de théorèmes particuliers.

Un des cas qui se présente le plus souvent est celui où l'un des quatre points de la droite dont on étudie le rapport anharmonique s'éloigne à l'infini. Le rapport anharmonique de quatre points A, B, C, D étant, en général,

$$\frac{AB.CD}{AD.BC} \quad (56),$$

se réduit en définitive à $-\frac{AB}{BC}$, lorsque le point D s'éloigne à l'infini, parce qu'alors AD devient égal à $-$ DC.

Lorsque la droite est divisée harmoniquement, le rapport anharmonique est égal à -1, et quand le point D s'éloigne

(*) La propriété fondamentale des faisceaux anharmoniques a été donnée par Pappus (*Math. Coll.*, VII, 129). Le mot *anharmonique* est dû à M. Chasles. C'est, du reste, dans son *Histoire de la Géométrie* que nous avons puisé les principaux éléments de ce Chapitre, renvoyant pour de plus amples détails au *Traité de Géométrie supérieure* et au *Traité des Sections coniques* du même auteur. Le rapport anharmonique a été aussi étudié par Mobius dans sa *Statique* (*Barycentrische Calcul*, 1827) sous le nom de *Doppelschnittsverhaltniss* (*Rapport des doubles segments*).

à l'infini, la distance AC se trouve divisée en B en deux parties égales.

324. Appliquons ce qui précède au théorème du n° 146 :

Lorsqu'une sécante OR, *issue d'un point fixe* O, *rencontre une conique en* R', R'' *et la polaire de* O *en* R, *les points* O, R', R, R'' *forment une division harmonique.*

I. Supposons R'' à l'infini. La droite OR est alors divisée en deux parties égales en R' ; donc : *Le segment de la droite menée par un point fixe parallèlement à l'asymptote d'une hyperbole (ou au diamètre d'une parabole), compris entre le point fixe et la polaire de ce point, est divisé par la courbe en deux parties égales* (211).

II. Lorsque R s'éloigne à l'infini, R' R'' est divisé au point O en deux parties égales; donc : *La corde menée par un point parallèlement à sa polaire est divisée par ce point en deux parties égales.*

Si la polaire de O est à l'infini, toutes les cordes qu'on peut mener par O rencontrent la polaire à l'infini, et par suite sont divisées au point O en deux parties égales. Ce point est donc le centre de la courbe, autrement dit : *Le centre peut être considéré comme un point dont la polaire est à l'infini* (154).

III. Quand le point fixe est à l'infini, toutes les droites qui passent par ce point sont parallèles et divisées en deux parties égales par la polaire du point fixe. Donc : *Un diamètre d'une conique peut être considéré comme la polaire du point à l'infini où ses ordonnées sont supposées concourir.*

Cette conséquence peut aussi se déduire de l'équation de la polaire d'un point (x', y')

$$(ax + hy + g) + (hx + by + f)\frac{y'}{x'} + \frac{gx + fy + c}{x'} = 0 \quad (145).$$

En effet, quand (x', y') s'éloigne à l'infini sur la droite $my = nx$, on a à la fois $\frac{y'}{x'} = \frac{n}{m}$, $x = \infty$; par suite l'équation

de la polaire prend la forme

$$m(ax + hy + g) + n(hx + by + f) = 0,$$

qui représente le diamètre conjugué de $my = nx$ (141).

325. Développons encore le théorème du nº 146 : *Les deux tangentes menées par un point fixe forment un faisceau harmonique avec une droite quelconque passant par ce point, et la droite qui joint au point fixe le pôle de la précédente.*

Lorsqu'une des droites passant par le point fixe est un diamètre, l'autre est parallèle à son conjugué, et puisque la polaire d'un point pris sur un diamètre est parallèle au diamètre conjugué, le segment de la parallèle à la polaire du point fixe, compris entre les tangentes, est divisé en deux parties égales par le diamètre qui passe par le point fixe.

Quand le point fixe est le centre de la courbe, les tangentes sont les asymptotes; donc : *Les asymptotes forment un faisceau harmonique avec deux diamètres conjugués quelconques*, et la portion de tangente comprise entre les asymptotes est divisée par la courbe en deux parties égales (196).

326. La propriété anharmonique des points d'une conique (259) conduit à un très-grand nombre de théorèmes particuliers. En effet, la position des quatre premiers points sur la courbe étant arbitraire, un ou d'eux d'entre eux peuvent se trouver à l'infini; le cinquième point O, sommet du faisceau, peut être à l'infini ou coïncider avec un des quatre premiers, comme dans le cas où l'une des lignes du faisceau devient tangente. De plus, le rapport anharmonique du faisceau se mesurant sur une transversale quelconque, on peut supposer cette transversale parallèle à une des lignes du faisceau, de manière à réduire le rapport anharmonique au simple rapport de deux quantités.

Les exercices suivants se rapportent au développement du théorème rappelé ci-dessus; nous nous bornerons souvent à indiquer les points qui déterminent les faisceaux et la droite sur laquelle on mesure le rapport, laissant au lecteur le soin

d'examiner plus complétement la manière dont chaque théorème particulier se déduit du théorème général.

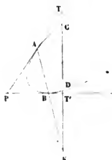
Nous emploierons l'abréviation (O, ABCD) pour indiquer le rapport anharmonique du faisceau OA, OB, OC, OD.

EXERCICES.

I. (A, ABCD) = (B, ABCD).

Les rapports seront mesurés par les segments déterminés sur la droite CD (*fig.* 96). La corde CD rencontre en T et T' les tangentes

Fig. 96.



menées en A, B, et en K leur corde de contact AB. Les rapports des faisceaux indiqués dans l'énoncé deviennent alors

$$\frac{TK.DC}{TD.KC} = \frac{KT'.DC}{KD.T'C},$$

c'est-à-dire que si une cordo CD rencontre en T et T' deux tangentes et en K leur corde de contact, on a la relation

$$KC.KT'.TD = KD.TK.T'C.$$

(Il faut avoir soin de prendre les points du faisceau dans les deux membres de l'équation, *en suivant le même ordre :* ainsi nous avons attribué à K le second rang dans le premier membre de l'équation, parce qu'il correspond à la ligne OB du faisceau

OA.OB.OC.OD

pris comme type, tandis que, dans lo deuxième membre, nous lui avons assigné le premier, parce qu'il correspond alors à la ligne OA).

II. Lorsque T et T′ coïncident, on a

$$KC.TD = -KD.TC,$$

c'est-à-dire : La corde menée par l'intersection de deux tangentes est divisée harmoniquement par la corde de contact.

III. Quand T′ est à l'infini, la sécante CD est parallèle à PT′, et l'égalité des rapports se réduit à

$$\overline{TK}^2 = TC.TD.$$

IV. Lorsqu'un des points du faisceau est à l'infini, le rapport $(O, ABC\infty)$ est constant.

Estimons le rapport suivant la droite $C\infty$; alors AO et BO coupent $C\infty$ en a, b, et le rapport anharmonique se réduit à $\frac{Ca}{Cb}$; donc : Si, dans une hyperbole, les droites OA, OB qui joignent un point quelconque O à deux points fixes A et B rencontrent une parallèle fixe à l'asymptote en deux points a et b, le rapport $Ca : Cb$ est constant, C étant l'intersection de la parallèle et de la courbe. Ce théorème s'applique à la parabole, mais alors la droite passant en C doit être parallèle au diamètre.

V. Si l'on estime le même rapport suivant une parallèle autre que celle menée par le point C, et coupée en c par OC, on voit que les droites qui joignent un point variable à trois points fixes déterminent sur une parallèle à l'asymptote des segments ab, ac dont le rapport est constant.

Ce théorème s'étend à la parabole comme le précédent.

VI. Il résulte de l'Exercice IV que si les droites qui joignent A, B à un quatrième point O′ rencontrent $C\infty$ en a', b', on a

$$\frac{ab}{a'b'} = \frac{aC}{a'C}.$$

Lorsque le point C est à l'infini, la droite $C\infty$ est une asymptote, et le rapport devient égal à l'unité; donc, dans une hyperbole, les droites qui joignent deux points fixes à un point variable interceptent sur l'asymptote un segment constant (199, Ex. I).

VII. $$(A, ABC\infty) = (B, ABC\infty).$$

Estimons les rapports suivant $C\infty$; si $C\infty$ rencontre en a et b les tangentes menées par AB (*fig.* 97) et en K leur corde de contact, on a, en se rappelant les indications données à l'Exercice I,

$$\frac{Ca}{CK} = \frac{CK}{Cb}.$$

Donc : Dans une hyperbole, lorsqu'une parallèle à une asymptote coupe deux tangentes et leur corde de contact, le segment compris entre

Fig. 97.



la courbe et la corde de contact est une moyenne proportionnelle entre les segments déterminés par la courbe et les tangentes. Ce théorème est vrai pour la parabole, si l'on prend les segments sur une parallèle au diamètre.

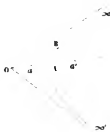
Réciproquement : Lorsqu'une parallèle ab à une droite donnée rencontre les côtés d'un triangle en a, b et K, le lieu d'un de ses points C, tel que $\overline{CK}^2 = Ca.Cb$, est une parabole quand la droite donnée est la médiane de la base AB du triangle (211) et, dans tous les autres cas, une hyperbole ayant une asymptote parallèle à ab.

VIII. Deux des points fixes sont à l'infini :

$$(\infty \,.\, AB\infty\,\infty') = (\infty'.\, AB\infty\,\infty').$$

Les droites $\infty\infty$, $\infty'\infty'$ sont les deux asymptotes lorsque $\infty\,\infty'$ sont à la fois à l'infini. Prenons les rapports suivant le diamètre OA, et

Fig. 98.



soient a et a' (*fig.* 98) les points où le diametre rencontre les parallèles B∞, B∞' menées par B aux asymptotes, les rapports seront alors

$$\frac{OA}{Oa} = \frac{Oa'}{OA};$$

donc : Dans une hyperbole, les parallèles menées aux asymptotes par un point de la courbe déterminent sur un diamètre des segments ayant le demi-diamètre pour moyenne proportionnelle ; ces segments doivent être comptés à partir du centre de la courbe.

Réciproquement : Si par un point fixe O, on mène une droite OA rencontrant en a, a' deux droites fixes Ba, Ba', et si l'on prend sur cette droite un point A tel, que $\overline{OA}^2 = Oa.Oa'$, le lieu du point A sera une hyperbole ayant son centre en O, et pour asymptotes des parallèles à Ba, Ba'.

IX. $$(\infty,\ AB\infty\infty') = (\infty',\ AB\infty\infty').$$

Les segments sont mesurés suivant les asymptotes ; O étant le centre, on a la relation

$$\frac{Oa}{Ob} = \frac{Ob'}{Oa'},$$

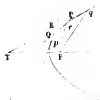
qui exprime que le rectangle construit sur les parallèles menées aux asymptotes par un point de la courbe est constant. (Conformément à la remarque de l'Exercice I, nous avons interverti le deuxième rapport.)

327. Examinons quelques cas particuliers du théorème relatif à la proprieté anharmonique des tangentes à une conique (275).

EXERCICES.

I. Cette propriété prend une forme très-simple lorsque la conique est une parabole, puisque cette courbe a toujours une de ses tangentes à l'infini (254). Ainsi, dans une parabole, quand trois tangentes fixes

Fig. 99.



coupent une tangente variable aux points A, B et C (*fig.* 99), le rapport AB : AC est constant.

Si l'on fait coïncider sucessivement la tangente variablo avec chacune

des tangentes fixes, on obtient la relation

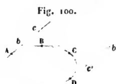
$$\frac{pQ}{QR} = \frac{RP}{Pq} = \frac{Qr}{rP},$$

TP, QP, QR étant trois tangentes, q, r, p leurs points de contact.

II. Deux des quatre tangentes fixes en A, B, C, D (*fig.* 100) à une ellipse ou à une hyperbole sont parallèles : la tangente variable coïncide successivement avec l'une des tangentes parallèles (en A et D).

Si les tangentes en B et C rencontrent respectivement en b et c, b' et c'

Fig. 100.



les tangentes A et D, les rapports anharmoniques sont, dans l'un et l'autre cas,

$$\frac{Ab}{Ac}, \quad \frac{Dc'}{Db'},$$

et, par suite, le rectangle $Ab.Db'$ est constant.

On voit ainsi, en partant de la propriété anharmonique des points d'une conique, que les droites OA, AD, qui joignent un point O de la courbe aux deux points A et D, déterminent sur les tangentes parallèles des points b et b' tels, que le rectangle $Ab.Db'$ est constant.

328. Nous donnerons ici quelques exemples des problèmes qu'on peut aisément résoudre au moyen des propriétés anharmoniques des coniques.

EXERCICES.

I. Trouver le lieu du sommet V d'un triangle dont les côtés pivotent autour de trois points fixes A, B, C, tandis que les deux autres sommets glissent sur deux droites fixes Oa, Ob.

Supposons qu'on ait tracé (*fig.* 101) quatre de ces triangles, et soient $aa'a''a'''$, $bb'b''b'''$ les diverses positions des sommets glissant sur les droites fixes. Les deux faisceaux (C, $aa'a''a'''$), (C, $bb'b''b'''$) sont identiques : donc

$$(aa'a''a''') = (bb'b''b'''),$$

27.

$(aa'a''a''')$ désignant le rapport anharmonique des points a, a', a'', a'''; par suite

$$(A, aa'a''a''') = (B, bb'b''b'''),$$

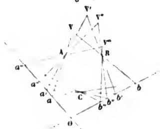
et d'après la nature de la question

$$(A, VV'V''V''') = (B, VV'V''V''') :$$

donc les points A, B, V, V', V'', V''' sont sur la même conique.

Les trois premiers triangles étant supposés fixes, le sommet V''' du quatrième se trouvera sur la conique ABVV'V''.

Fig. 101.



Ce mode de génération des sections coniques, indiqué par Mac Laurin (*voir* n° 269, Ex. III), peut encore se justifier de la manière suivante.

Les systèmes de droites menées par les points A et B étant respectivement homographiques avec le système passant par le point C sont homographiques entre eux; par suite (297), le lieu de l'intersection des droites correspondantes est une conique passant par A et B. Les Exercices suivants pourraient être de même considérés comme des applications du principe énoncé au n° 297.

II. M. Chasles a fait voir que la même démonstration était encore applicable lorsque le côté ab, au lieu de passer par un point fixe C, enveloppait une conique tangente à Oa et Ob; car, dans cette hypothèse, les points déterminés sur les droites Oa et Ob satisfont encore à la relation

$$(aa'a''a''') = (bb'b''b''') \quad (275).$$

III. Méthode de Newton pour la génération des coniques. Les sommets de deux angles de grandeur constante α et β tournent autour de deux points fixes P et Q; l'intersection de deux de leurs côtés glisse sur la droite AA' : le lieu V, V', V'', V''' de l'intersection V de leurs deux autres côtés est une conique passant par P et Q.

Prenons, comme plus haut, quatre positions des angles (*fig.* 102), on

a alors

$$(P, AA'A''A''') = (Q, AA'A''A''');$$

et comme les angles des faisceaux ayant P ou Q pour sommets sont res-

Fig. 102.



pectivement égaux, il vient

$$(P, AA'A''A''') = (P, VV'V''V'''),$$
$$(Q, AA'A''A''') = (Q, VV'V''V''').$$

Donc

$$(P, VV'V''V''') = (Q, VV'V''V'''),$$

ce qui démontre le théorème.

IV. M. Chasles a fait voir que le lieu était encore une conique, lorsque le point A, au lieu de glisser sur une droite, glissait sur une conique passant par les points P et Q; car on a toujours

$$(P, AA'A''A''') = (Q, AA'A''A''').$$

V. Le lieu est encore une conique si les angles α et β, au lieu d'être constants, interceptent respectivement des segments constants sur deux droites fixes. Car alors l'égalité

$$(P, AA'A''A''') = (P, VV'V'V''')$$

résulte de ce que les faisceaux déterminent des segments de même longueur sur une droite fixe.

Ainsi le lieu du sommet d'un triangle est une conique lorsque, la base de ce triangle étant fixe, les autres côtés interceptent sur une droite fixe des segments de longueur constante.

VI. La démonstration de l'Exercice I peut encore s'étendre au cas où les extrémités de la droite *ab* glissent sur une conique passant par les

points A, B. Car en prenant quatre positions du triangle, on a (276)

$$(aa'a''a''') = (bb'b''b'''),$$

par suite

$$(A, aa'a''a''') = (B, bb'b''b''').$$

VII. La base d'un triangle passe par l'intersection C des tangentes communes à deux sections coniques; les extrémités de cette base ab glissent sur l'une et l'autre des coniques pendant que les côtés pivotent autour de deux points fixes A et B pris sur l'une et l'autre des coniques : le lieu du sommet est une conique passant par A et B.

La marche à suivre pour déterminer ce lieu est analogue à la précédente et s'appuie sur le théorème du n° 276, dont voici du reste une démonstration géométrique assez simple. Soit (O, ABCD) le faisceau mené par les points correspondants du faisceau $(o, abcd)$. Les droites OA, oa se coupent en r sur une des cordes d'intersection des coniques (272, Ex. I); de même BO et bo se coupent en r' sur la même corde, etc. : donc les rapports anharmoniques des deux faisceaux ont même mesure $(rr'r''r''')$.

VIII. On peut supposer, dans l'Exercice VI, que la base, au lieu de passer par un point fixe, enveloppe une conique ayant un double contact avec les coniques données (*voir* n° 276).

IX. Les n sommets $(a, b, c, \ldots)$ d'un polygone glissent sur une conique, tandis que $n-1$ de ses côtés pivotent autour de $n-1$ points fixes, le côté libre enveloppe une conique, ayant un double contact avec la conique donnée.

Prenons quatre positions du polygone $abc\ldots$, $a'b'c'\ldots$, $a''b''c''\ldots$, $a'''b'''c'''\ldots$: on aura la série d'égalités

$$(aa'a''a''') = (bb'b''b''') = (cc'c''c'''),$$

ce qui ramène le problème à celui indiqué au n° 277 : Étant donné trois couples de points $aa'a''$, $dd'd''$, trouver l'enveloppe de $a'''d'''$, de telle sorte que

$$(aa'a''a''') = (dd'd''d''').$$

X. Inscrire, dans une conique, un polygone dont les côtés passent par des points fixes.

Prenons un point quelconque a de la conique pour sommet du polygone, et construisons, en partant de ce point, le polygone dont les côtés passent par les points donnés : le point z, où le dernier côté rencontrera la conique, ne coïncidera pas en général avec le point a. Inscrivons ainsi

quatre polygones qui, partant des points a, a', a'', a''', se termineront en z, z', z'', z''', nous aurons, comme précédemment,

$$(aa'a''a''') = (zz'z''z'''),$$

et si le dernier polygone essayé satisfait à la question, a''' coïncidera

Fig. 103.



avec z'''. Dès lors le problème se ramène à celui-ci : Étant donné trois couples de points, $aa'a''$, $zz'z''$, trouver un point K tel que

$$(\mathrm{K}aa'a'') = (\mathrm{K}zz'z'').$$

Si nous considérons a, z'', a', z, a'', z' comme les sommets d'un hexagone inscrit (dans l'ordre où nous venons de les indiquer en prenant alternativement un a et un z, de manière que a, a', a'' soient les sommets opposés à z, z', z''), l'un des points ou la droite passant par les intersections des côtés opposés rencontre la conique sera le point K. En effet, si, dans la *fig.* 103, on représente par A, C, E et D, F, B les points a, a', a'' et z, z', z'', et si l'on prend les côtés dans l'ordre ABCDEF, les intersections des côtés opposés sont L, M, N, et le rapport (KPNL) mesure à la fois (D, KACE) et (A, KDFB); on a donc

$$(\mathrm{KACE}) = (\mathrm{KDFB}),$$

ce qui justifie la construction (*).

(*) Cette construction du polygone inscrit à une conique est due à Poncelet (*Traité des Propriétés projectives*, p. 351). La démonstration que j'en ai donnée m'a été communiquée par M. Townsend. Elle peut servir, en outre, à montrer que la construction de Poncelet s'applique à la solution du problème suivant : *Inscrire dans une conique un polygone dont chaque côté soit tangent à une conique ayant un double contact avec la conique donnée.* Toutes ces coniques, touchées par les côtés du polygone, peuvent être différentes.

Il est facile de voir, d'après l'Exercice IX, que K est l'un des points de contact d'une conique ayant un double contact avec la proposée et tangente aux droites az, $a'z'$, $a''z''$. La solution précédente peut donc s'appliquer au probleme suivant : Décriro une conique ayant un double contact avec une conique donnée et tangente à trois droites données.

XI. La propriété anharmonique nous permet de donner une démonstration simple du théorème de Pascal, sur lequel nous nous sommes appuyé dans l'Exercice précédent.

On a

$$(E, CDFB) = (A, CDFB).$$

D'ailleurs, en comparant les segments déterminés respectivement sur BC et DC par le premier et le second faisceau, on voit que

$$(CRMB) = (CDNS).$$

Si l'on joint le point L à chacun des points de BC et do DC, on forme deux faisceaux qui ont trois rayons communs CL, DE, AB, les quatrièmes rayons NL, LM ne forment donc qu'une seule ligne droite. On démontrerait de même le théorème do Brianchon, en s'appuyant sur la propriété anharmonique des tangentes.

XII. Une conique passe par quatre points A, D, F, B : trouver l'enveloppe de la corde CE déterminée par les intersections de la conique avec deux droites fixes DC, DE passant par un des points donnés (*fig.* 103).

Les sommets du triangle CEM glissent sur les droites fixes DC, DE, NL, et deux de ses côtés passent par des points fixes B, F. Donc le troisième côté CE enveloppe une conique tangente aux droites fixes DC, DE. (Cette génération de la conique est réciproque de celle indiquée par Mac Laurin.)

XII. Une conique passse par quatre points A, B, D, E : la droite CF qui joint les points où les deux droites fixes AF, CD (menées chacune par un des quatre points donnés) rencontrent la courbe passe par un point fixe.

Deux des côtés du triangle CFM (*fig.* 103) passent par les points fixes B et E, les sommets glissent sur les droites fixes AF, CD, NL, qui concourent en un même point : donc CF passo par un point fixe (304).

Le lecteur trouvera dans le Chapitro relatif à la méthodo des projections les théorèmes bien connus (355, Ex. III et IV), qui ont conduit aux précédents.

XIV. Dans une conique, le rapport anharmonique de quatre diamètres est égal à celui de leurs quatre conjugués.

Ce théorème est un cas particulier de celui du n° 297, Ex. II : le rapport anharmonique de quatre points en ligne droite est le même que celui de leurs polaires. Mais on peut le démontrer directement, en observant que le rapport anharmonique de quatre cordes issues d'un même point de la courbe est égal à celui de leurs cordes supplémentaires (179).

XV. Trouver le lieu des centres des coniques circonscrites à un quadrangle donné (151, Ex. III).

Menons dans une conique les diamètres ayant pour cordes les côtés du quadrangle : le rapport anharmonique de ces diamètres est connu, puisqu'il est égal à celui de leurs conjugués, c'est-à-dire à celui du faisceau dont les rayons sont parallèles aux côtés du quadrangle. Donc le lieu est une conique passant par le milieu des côtés du quadrangle. Dans le cas où la conique se réduit à deux droites, les intersections des diagonales, celles des côtés opposés sont des points du lieu : donc ces points se trouvent sur une conique passant par le milieu des côtés et des diagonales.

329. Nous laisserons au lecteur le soin de former les théorèmes réciproques de ceux que nous venons d'énoncer et de les démontrer directement au moyen de la propriété anharmonique des tangentes à une conique. Ils sont presque tous renfermés dans le théorème suivant :

Les droites qui joignent les points correspondants ou homologues de deux divisions homographiques $a, b, c, d, \ldots,$ $a', b', c', d', \ldots$ de bases (*) *différentes enveloppent une conique*. En effet, d'après la propriété anharmonique des tangentes, la conique tangente aux deux bases et aux trois droites aa', bb', cc' est également tangente à la droite dd' (**).

(*) On appelle *base* la ligne droite sur laquelle sont situés les points formant une division.

(**) Le lieu des intersections des droites Pd, $P'd'$ qui joignent les points de ces deux divisions à deux points fixes P et P', est une conique passant par ces points fixes. On sait (277) que si $a, b, c, d, \ldots, a', b', c', d'$ sont deux systèmes homographiques de points pris sur une conique donnée, c'est-à-dire tels, qu'on ait toujours $(abcd) = (a'b'c'd')$, l'enveloppe de dd' est une conique ayant un double contact avec la conique donnée. De même : le lieu des intersections des droites Pd, $P'd'$ menées à ces deux systèmes homographiques de points pris sur une conique, par deux points fixes P et P' *de la conique*, est une conique passant par P et P'. De plus : lorsque deux coniques S et S' ont

Ce théorème est le réciproque de celui qui a été donné au n° 297, et peut se démontrer en considérant les équations indiquées alors comme des équations tangentielles. Ainsi P, P'; Q, Q' représentant en coordonnées tangentielles deux couples de points correspondants, $P + \lambda P'$, $Q + \lambda P'$, en représenteront un autre, et la droite qui les joint sera tangente à la courbe donnée par l'équation tangentielle du second ordre $PQ' = P'Q$.

EXERCICE.

Par un point fixe P, on mène une transversale PA' qui rencontre en A, A' les deux droites fixes OA, OA'; on prend sur ces droites, à partir de A et de A', des segments Aa, $A'a'$ de longueur donnée : trouver l'enveloppe de aa'.

En donnant à la transversale quatre positions successives A, B, C, D, on a évidemment

$$(ABCD) = (A'B'C'D'),$$

et comme

$$(ABCD) = (abcd), \quad (A'B'C'D') = (a'b'c'd'),$$

la droite enveloppe une conique tangente à OA et OA'.

330. Lorsque, par la méthode précédente, on trouve que l'enveloppe d'une droite mobile est une section conique, il est, en général, utile de rechercher si, dans une de ses positions particulières, la droite mobile ne se trouve pas tout entière à l'infini, car alors elle enveloppe une parabole (254). Ainsi, dans l'Exercice précédent, la droite aa' ne peut être à l'infini, que si la transversale AA' peut elle-même être à l'infini, c'est-à-dire lorsque le point P est à l'infini. Pour que l'enveloppe à laquelle on arrive dans l'Exercice précédent soit une parabole, il faut donc que les transversales au lieu de passer par un point fixe soient menées parallèlement à une

un double contact avec une troisième S'', les tangentes à S'' déterminent des systèmes homographiques *abcd*... dans S, et *a'b'c'd'*... dans S', tels que (*abcd*) = (*a'b'c'd'*) (276). Mais on ne peut pas dire que, réciproquement, les droites qui joignent les points homologues de deux systèmes homographiques appartenant à deux *coniques différentes* enveloppent nécessairement une conique.

droite donnée. On peut du reste souvent déterminer la nature du lieu décrit par un point mobile, en étudiant quelques positions particulières de ce point (328, Ex. XV).

331. *Étant donné un système de points situés sur une droite, on peut toujours former sur une autre droite un système homographique tel, qu'à trois points a, b, c du premier correspondent dans le second trois points a', b', c', pris arbitrairement.*

Prenons sur chaque droite une origine et désignons par a, b, c, x les distances à l'origine des trois points donnés et d'un point variable de la première droite; par a', b', c', x' les distances analogues des points de la deuxième droite. La condition pour que les points des deux systèmes se correspondent sera donnée par la relation (277)

$$\frac{(a-b)(c-x)}{(a-c)(b-x)} = \frac{(a'-b')(c'-x')}{(a'-c')(b'-x')},$$

qui, développée, conduit à une expression de la forme

$$Axx' + Bx + Cx' + D = 0 \text{ (*)}.$$

On peut donc toujours trouver sur la seconde droite un point x' correspondant à un point x de la première, de telle sorte que l'on ait

$$abcx = a'b'c'x'.$$

(*) M. Chasles démontre ce théorème de la manière suivante. Les points x, x' appartenant aux systèmes homographiques, et les points a, b, a', b' étant fixes, les rapports des distances $ax : bx$, $a'x' : b'x'$ seront liés par une équation linéaire telle que

$$\lambda \frac{ax}{bx} + \mu \frac{a'x'}{b'x'} + \nu = 0.$$

Si l'on représente, comme ci-dessus, les distances des points à l'origine fixe par a, b, x; a', b', x', cette relation devient

$$\lambda \frac{a-x}{b-x} + \mu \frac{a'-x'}{b'-x'} + \nu = 0,$$

et donne, par le développement entre x et x', une expression de la forme

$$Axx' + Bx + Cx' + D = 0.$$

Lorsque cette relation est vérifiée, la droite qui joint les points x, x' enveloppe une conique tangente aux deux droites données, et cette conique est une parabole, lorsque $A = 0$, puisque alors x' devient infini en même temps que x.

Réciproquement : *Deux systèmes de points en ligne droite, assujettis à une relation quelconque sont homographiques si à un point du premier système correspond toujours un point du second, et s'il ne lui en correspond qu'un seul.*

Une équation de la forme

$$Axx' + Bx + Cx' + D = 0$$

est évidemment la relation la plus générale à laquelle on puisse assujettir x et x', en vue de déterminer, par une équation du premier degré (donnant toujours une solution, et n'en donnant qu'une seule), x en fonction de x', ou réciproquement. Lorsque cette équation est vérifiée, le rapport anharmonique de quatre points du premier système est égal à celui des quatre points correspondants du second, puisque le rapport anharmonique $\frac{(x-y)(z-w)}{(x-z)(y-w)}$ ne change pas lorsqu'on y remplace x, y, etc., par $-\frac{Bx+D}{Ax+C}$, $-\frac{By+D}{Ay+D}, \ldots$

332. *Les distances à l'origine de deux points A et B pris sur l'axe des x étant données par l'équation $ax^2 + 2hx + b = 0$, et celles de deux autres points A' et B' situés sur le même axe par $a'x^2 + 2h'x + b' = 0$, trouver la condition pour que ces deux couples de points soient conjugués harmoniques.*

Soient α, β les distances des deux premiers points à l'origine, α', β' celles des seconds, on aura

$$\frac{AA'}{A'B} = -\frac{AB'}{B'B};$$

ou bien

$$\frac{\alpha - \alpha'}{\alpha' - \beta} = -\frac{\alpha - \beta'}{\beta' - \beta},$$

et, en développant,

$$(\alpha + \beta)(\alpha' + \beta') = 2\alpha\beta + 2\alpha'\beta',$$

mais

$$\alpha + \beta = -\frac{2h}{a}, \quad \alpha' + \beta' = -\frac{2h'}{a'}, \quad \alpha\beta = \frac{b}{a}, \quad \alpha'\beta' = \frac{b'}{a'};$$

la condition cherchée sera donc

$$ab' + a'b - 2hh' = 0 \ (^*).$$

On démontrerait de même que cette équation exprime aussi que les deux couples de droites

$$a\alpha^2 + 2h\alpha\beta + b\beta^2, \quad a'\alpha^2 + 2h\alpha\beta' + b'\beta^2$$

sont conjugués harmoniques.

333. Le couple de points $ax^2 + 2hx + b = 0$, conjugué harmonique des deux couples $a'x^2 + 2h'x + b' = 0$ et $a''x^2 + 2h''x + b'' = 0$, est conjugué harmonique de tous les couples de points donnés par l'équation

$$(a'x^2 + 2h'x + b') + \lambda(a''x^2 + 2h''x + b'') = 0.$$

En effet, la condition

$$a(b' + \lambda b'') + b(a' + \lambda a'') - 2h(h' + \lambda h'') = 0$$

est remplie lorsqu'on a séparément

$$ab' + ba' - 2hh' = 0, \quad ab'' + ba'' - 2hh'' = 0.$$

334. *Trouver le lieu d'un point tel, que les tangentes menées de ce point à deux coniques données forment un faisceau harmonique.*

(*) On démontrerait de même que le rapport anharmonique de ces quatre points est déterminé lorsque le rapport

$$\frac{(ab' + a'b - 2hh')^2}{(ab - h^2)(a'b' - h'^2)}$$

est donné.

dans laquelle S, S′ et F représentent les deux coniques données et celle que nous venons de trouver.

335. *Trouver la condition pour que la droite*

$$\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma = 0$$

soit divisée harmoniquement par les deux coniques précédentes.

En éliminant γ entre les équations de la droite et de l'une des coniques pour déterminer leurs points d'intersection, il vient

$$(a\nu^2 + c\lambda^2 - 2g\lambda\nu)\alpha^2 - 2(c\lambda\mu - f\lambda\nu - g\mu\nu + h\nu^2)\alpha\beta$$
$$+ (b\nu^2 + c\mu^2 - 2f\mu\nu)\beta^2 = 0;$$

si l'on écrit la condition (332) pour que ces points soient conjugués harmoniques des points correspondants de l'autre conique, on trouve

$$(bc' + b'c - 2ff')\lambda^2 + (ca' + c'a - 2gg')\mu^2$$
$$+ (ab' + a'b - 2hh')\nu^2$$
$$+ 2(gh' + g'h - af' - a'f)\mu\nu + 2(hf' + h'f - bg' - b'g)\nu\lambda$$
$$+ 2(fg' + f'g - ch' - c'h)\lambda\mu = 0.$$

Il faut donc que la droite enveloppe une conique (*).

336. *Involution.* — Deux systèmes de points $a, b, c, \ldots; a', b', c', \ldots$ situés *sur la même droite* sont homographiques (331)

(*) Lorsqu'en remplaçant, dans l'équation de deux coniques U et V, α par $\lambda\alpha + \mu\alpha'$, etc., on obtient les résultats

$$\lambda^2 U + 2\lambda\mu P + \mu^2 U', \quad \lambda^2 V + 2\lambda\mu Q + \mu^2 V',$$

il est facile de voir, comme ci-dessus, que $UV' + U'V - 2PQ$ représente les deux droites qu'on peut mener par $(\alpha', \beta', \gamma')$, de manière à ce qu'elles soient divisées harmoniquement par les coniques. On peut voir, en outre (296), que le système des quatre droites joignant $(\alpha', \beta', \gamma')$ aux intersections des coniques a pour équation

$$(UV' + U'V - 2PQ)^2 = 4(UU' - P^2)(VV' - Q^2),$$

$UU' - P^2$, $VV' - Q^2$ étant les couples de tangentes menées aux coniques par $(\alpha', \beta', \gamma')$.

lorsque les distances x, x' à une origine quelconque de deux points correspondants ou conjugués satisfont à une relation de la forme

$$Axx' + Bx + Cx' + D = 0.$$

Cette équation n'étant pas symétrique en x et x', un point de la ligne n'aura pas, en général, le même point correspondant suivant qu'on le considérera comme faisant partie de l'un ou de l'autre des systèmes. Ainsi au point situé à une distance x correspondent respectivement les points situés aux distances $-\frac{Bx + D}{Ax + C}$, $-\frac{Cx + D}{Ax + B}$, selon qu'on le considère comme appartenant au premier ou second système.

Deux systèmes homographiques situés sur la même droite forment un *système en involution* lorsqu'on peut trouver sur la droite un point qui, considéré successivement comme appartenant à l'un et à l'autre système, corresponde toujours au même point. L'équation précédente devant alors être symétrique en x et x', on aura $B = C$, et on pourra la mettre sous la forme

$$Axx' + H(x + x') + B = 0.$$

Lorsque les distances à l'origine des deux points correspondants sont données par

$$ax^2 + 2hx + b = 0,$$

on a

$$Ab + Ba - 2Hh = 0.$$

337. Un système en involution se compose donc d'un certain nombre de points a, a'; b, b', ..., en ligne droite, tels que le rapport anharmonique de quatre quelconques d'entre eux est égal à celui des quatre points correspondants. En exprimant l'égalité de ces rapports, on peut arriver à diverses relations entre les distances mutuelles de ces points. Ainsi, de

$$(abca') \quad (a'b'c'a)$$

on tire

$$\frac{ab.ca'}{aa'.bc} = \frac{a'b'.c'a}{a'a.b'c'};$$

par suite,

$$ab.ca'.b'c' = -a'b'.c'a.bc.$$

Le développement des diverses relations auxquelles on peut ainsi arriver ne présente aucune difficulté.

338. La relation

$$Axx' + H(x + x') + B = 0,$$

que vérifient les distances x et x' à l'origine de deux points conjugués, peut se simplifier par un choix convenable de l'origine. En effet, si on la déplace de la quantité α, on a, en désignant par x_1 et x_1' les distances rapportées à la nouvelle origine,

$$A(x_1 + \alpha)(x_1' + \alpha) + H(x_1 + x_1' + 2\alpha) + B = 0,$$

ou bien

$$Ax_1x_1' + (H + A\alpha)(x_1 + x_1') + A\alpha^2 + 2H\alpha + B = 0,$$

et, si l'on détermine α par la condition $H + A\alpha = 0$, la relation entre les distances à l'origine de deux points correspondants se réduit à

$$x_1x_1' = \text{constante}.$$

L'origine déterminée de cette manière est le *centre du système*, d'où le théorème suivant : *Le produit des distances au centre de deux points conjugués est constant.*

339. Puisqu'en général le point correspondant à x est donné par $-\dfrac{Hx + B}{Ax + H}$, ce point est situé à l'infini lorsqu'on a $Ax + H = 0$; donc : *Le centre est le point dont le conjugué est à l'infini.*

On arriverait à la même conclusion en partant de la relation

$$(abcc') = (a'b'c'c),$$

c'est-à-dire de

$$\frac{ac.bc'}{ac'.bc} = \frac{a'c'.b'c}{a'c\;b'c'},$$

et en supposant c' à l'infini; car alors $bc' = ac'$, $a'c' = b'c'$, et

la relation se réduit à

$$ac.a'c = bc.b'c.$$

Elle exprime que le produit des distances au point c de deux points correspondants est constant, c ayant son conjugué à l'infini. Elle peut se mettre sous l'une ou l'autre des formes

$$ca.ca' = +h^2, \quad ca.ca' = -h^2,$$

suivant que le centre est en dehors des deux points qui se correspondent ou bien entre ces points.

340. Un point qui coïncide avec son conjugué est un *foyer* du système. Il y a évidemment deux foyers f, f' également distants du centre, et situés l'un d'un côté, l'autre de l'autre de ce centre. La distance cf du foyer au centre est donnée par

$$\overline{cf}^2 = \pm h^2.$$

Lorsque h^2 est pris avec le signe +, c'est-à-dire lorsque deux points conjugués sont toujours d'un même côté du centre, les foyers sont réels; dans l'autre cas ils sont imaginaires.

En faisant $x = x'$ dans l'équation qui relie les distances à une origine quelconque, de deux points qui se correspondent, on trouve

$$Ax^2 + 2Hx + B = 0$$

pour déterminer les distances des foyers à cette origine.

341. Lorsqu'un couple de points conjugués est donné par l'équation

$$ax^2 + 2hx + b = 0,$$

les coefficients de cette équation satisfont à la relation

$$Ab + Ba - 2Hh = 0 \quad (336).$$

Donc (332) : *Deux points conjugués quelconques forment avec les foyers une division harmonique.*

Ce théorème peut aussi se déduire de l'égalité

$$(aff'a') = (a'ff'a),$$

qui donne

$$\frac{af.a'f'}{aa'.ff'} = \frac{a'f.af'}{a'a.ff'},$$

ou

$$\frac{af}{af'} = -\frac{a'f}{a'f'}.$$

Les points a, a' divisent donc intérieurement ou extérieurement la distance ff' des deux foyers en segments qui sont respectivement dans le même rapport.

Corollaire. — Lorsqu'un des foyers est à l'infini, l'autre foyer divise en deux parties égales la distance comprise entre deux points conjugués; la distance ab entre deux points quelconques du système est alors égale à la distance $a'b'$ de leurs points correspondants.

342. *Deux couples de points déterminent un système en involution.* Cela résulte de ce qu'en prenant arbitrairement deux couples de points

$$ax^2 + 2hx + b = 0, \quad a'x^2 + 2h'x + b' = 0,$$

on peut toujours déterminer A, H, B par les équations

$$Ab + Ba - 2Hh = 0, \quad Ab' + Ba' - 2Hh' = 0.$$

Il est facile de voir, comme au n° 333, qu'un couple quelconque de points formant avec les deux couples précédents un système en involution peut être représenté par une équation de la forme

$$(ax^2 + 2hx + b) + \lambda(a'x^2 + 2h'x + b') = 0,$$

puisque les valeurs de A, H, B

$$2(ah' - a'h), \quad 2(hb' - h'b), \quad (ab' - a'b),$$

déterminées d'après les équations précédentes, satisfont à la relation

$$A(b + \lambda b') + B(a + \lambda a') - 2H(h + \lambda h') = 0 \text{ (*)}.$$

(*) La condition pour que trois couples de points $ax^2 + 2hx + b = 0$,

On a ainsi, pour déterminer les foyers du système défini par les deux couples de points donnés, l'équation

$$(ah' - a'h)x^2 + (ab' - a'b)x + (hb' - h'b) = 0.$$

Cette équation peut se mettre sous une autre forme, en rendant homogènes, par l'introduction d'une nouvelle variable y, les équations des couples de points, qui deviennent alors

$$U = ax^2 + 2hxy + by^2, \quad V = a'x^2 + 2h'xy + b'y^2;$$

ce qui donne, pour déterminer les foyers,

$$\frac{dU}{dx}\frac{dV}{dy} - \frac{dU}{dy}\frac{dV}{dx} = 0.$$

Les foyers du système défini par les deux couples de points a, a'; b, b' peuvent aussi se déduire de l'égalité

$$(afba') = (a'fb'a),$$

qui donne

$$\frac{af.ba'}{a'f.ba} = \frac{a'f.b'a}{af.b'a'},$$

d'où

$$\overline{af}^2 : \overline{a'f}^2 :: ab.ab' : a'b.a'b';$$

le point f est alors déterminé par la condition de diviser intérieurement (ou extérieurement) la distance aa' dans un rapport donné.

343. La relation entre les segments formés par six points en involution est la même que celle qui existe entre les sinus des angles correspondants formés en joignant ces six points à un point fixe (313). Donc :

Le faisceau formé en joignant à un point fixe six points en

$a'x^2 + 2h'x + b' = 0$, $a''x^2 + 2h''x + b'' = 0$ appartiennent à un même système en involution, s'obtient en égalant à zero le determinant

$$\begin{vmatrix} a & h & b \\ a' & h' & b' \\ a'' & h'' & b'' \end{vmatrix}$$

involution détermine sur une transversale quelconque six points en involution.

La figure réciproque de six points en involution est un faisceau en involution.

La plupart des équations trouvées précédemment s'appliquent également aux droites issues d'un même point. Ainsi : un couple de droites $\alpha - \mu\beta$, $\alpha - \mu'\beta$ appartient à un faisceau en involution, lorsqu'on a

$$A\mu\mu' + H(\mu + \mu') + B = 0;$$

et les deux couples de droites

$$U = a\alpha^2 + 2h\alpha\beta + b\beta^2, \quad V = a'\alpha^2 + 2h'\alpha\beta + b'\beta^2$$

déterminent un faisceau en involution qui a pour rayons focaux (c'est-à-dire aboutissant aux foyers de la division déterminée sur une transversale par le faisceau) les droites

$$(ah' - a'h)\alpha^2 + (ab' - a'b)\alpha\beta + (hb' - h'b)\beta^2 = 0,$$

ou

$$\frac{dU}{d\alpha}\frac{dV}{d\beta} - \frac{dU}{d\beta}\frac{dV}{d\alpha} = 0.$$

344. *Les coniques passant par quatre points fixes déterminent sur une transversale un système de points en involution.*

Prenons la transversale pour axe des x : S et S′ étant deux des coniques considérées, $S + kS'$ en sera une troisième; et si l'on fait $y = 0$ dans les équations de ces coniques, on a, pour déterminer les points où elles coupent les transversales,

$$ax^2 + 2gx + c = 0, \quad a'x^2 + 2g'x + c' = 0,$$
$$ax^2 + 2gx + c + \lambda(a'x^2 + 2g'x + c') = 0;$$

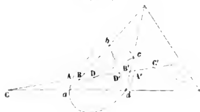
le dernier couple forme avec les premiers un système en involution (342). On peut encore démontrer ce théorème de la manière suivante : a, b, c, d étant les quatre points fixes (*fig.* 104) et A, A′ les points où la transversale AA′ rencontre la courbe,

on a, d'après la propriété anharmonique des coniques,

$$(a, \mathrm{A}db\mathrm{A}') = (c, \mathrm{A}db\mathrm{A}');$$

par suite, pour les points où AA′ rencontre les rayons du

Fig. 104.



faisceau,

$$(\mathrm{ACBA}') = (\mathrm{AB'C'A'}) = (\mathrm{A'C'B'A}).$$

Les points A, A′ appartiennent donc au système en involution déterminé par les points B, B′, C, C′, où la transversale rencontre les côtés du quadrilatère formé par les points fixes.

En formant le théorème réciproque du précédent, on voit que :

Les couples de tangentes menées par un point quelconque aux coniques inscrites dans un quadrilatère forment un faisceau en involution.

345. Les diagonales *ac*, *bd* peuvent être considérées comme une conique passant par les quatre points fixes ; par suite, les côtés et les diagonales d'un quadrilatère déterminent sur une transversale un système de points B, B′; C, C′; D, D′ en involution. Ce théorème (cas particulier du précédent) nous permet de trouver le point conjugué C′ d'un point C dans le système en involution déterminé par les couples de points BB′, DD′. Il suffit pour cela, en prenant un point quelconque *a*, de mener les droites *a*B, *a*D, *a*C et de construire le triangle *bcd* ayant ses sommets sur ces droites, et dont deux côtés passent par B′ et D′; le troisième côté passera par C′ conjugué de C. On peut prendre le point *a* à l'infini, et alors les droites *a*B, *a*D, *a*C sont parallèles.

Si l'on suppose le point C à l'infini, on obtient de cette manière le centre du système. La construction est alors la suivante : Mener par B, D deux parallèles Bb, Dc; et par B', D' deux autres parallèles $D'b$, $B'c$ (dont la direction diffère de celle des premières); la droite bc passera par le centre du système.

EXERCICES.

I. Lorsque trois coniques sont circonscrites au même quadrilatère, la tangente commune à deux de ces coniques est divisée harmoniquement par la troisième.

Les points de contact de la tangente sont alors les foyers du système en involution.

II. La tangente menée par l'intersection des cordes communes de deux coniques à une de ces coniques est divisée harmoniquement par l'autre.

Les points D et D' (*fig.* 104) coïncident alors, et par suite se trouvent à un foyer.

III. Lorsque deux coniques ont un double contact, ou un contact du troisième ordre, toute tangente à l'une est divisée harmoniquement par l'autre conique et la corde de contact.

Car alors les cordes communes coïncident, et le point où la transversale rencontre la corde de contact est un foyer.

IV. Décrire une conique passant par quatre points a, b, c, d, et tangents à une droite donnée CC'.

Le point de contact est un des foyers du système BB', CC', ... et peut être déterminé d'après les indications du n° 342. Le problème admet donc deux solutions.

V. Lorsqu'une parallèle à une asymptote rencontre en C la courbe circonscrite à un quadrilatère, et en $abcd$ les côtés de ce quadrilatère, on a la relation

$$Ca.Cc = Cb.Cd,$$

puisque C est le centre du système.

VI. Résoudre les problèmes du n° 326, en se basant sur la théorie de l'involution.

Dans l'Exercice I, K est un foyer; dans l'Exercice II, T est aussi un foyer; dans l'Exercice III, T est un centre, etc.

VII. Les segments d'une sécante compris entre une hyperbole et les asymptotes sont égaux.

Dans ce cas un des foyers du système est à l'infini (341, Cor.).

346. *Les coniques ayant un triangle autopolaire $\alpha\beta\gamma$ commun déterminent sur les transversales menées par un des sommets $\alpha\beta$ de ce triangle des systèmes en involution.*

Les points d'intersection de la transversale $\alpha = k\beta$ avec une de ces coniques $a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 = 0$, étant donnés par

$$(ak^2 + b)\beta^2 + c\gamma^2 = 0,$$

sont conjugués harmoniquement avec les points où cette transversale rencontre β et γ. Ainsi, en particulier, les coniques inscrites dans un quadrilatère déterminent un système en involution sur la transversale menée par une des intersections des diagonales de ce quadrilatère (146, Ex. III). Les points où cette transversale rencontre les deux autres diagonales sont les foyers, et ceux où elle rencontre les côtés opposés du quadrilatère sont des points conjugués.

EXERCICES.

I. Lorsque deux coniques U et V touchent leurs tangentes communes A, B, C, D aux points $a, b, c, d, a', b', c', d'$, la deuxième corde d'intersection de V, avec la conique S menée par a, b, c et tangente à D en d', passe par les intersections respectives de A, B et C, avec bc, ca et ab.

Soient α, β les points où V rencontre ab; d'après ce qui précède, ab passant par l'intersection des diagonales de ABCD (263, Ex. II), a, b et α, β appartiennent au système en involution dans lequel les points où ab rencontre C et D sont conjugués. D'ailleurs (345) les cordes communes à S et à V coupent ab en des points qui font partie du même système, déterminé par les points a, b et α, β où S et V rencontrent ab. Si donc D est une des cordes communes, l'autre passe par l'intersection de C avec ab.

II. Dans un triangle, on inscrit une ellipse tangente aux côtés A, B, C en leurs milieux a, b, c et un cercle touchant ces mêmes côtés en a', b', c'; si la quatrième tangente D commune au cercle et à l'ellipse touche le cercle en d', d' est le point de contact du cercle inscrit avec le cercle mené par les milieux a, b, c des côtés.

D'après l'Exercice I, une conique menée par a, b, c touche le cercle inscrit en d' lorsqu'elle passe par les points de rencontre de ce cercle avec la droite qui joint les intersections respectives de A, B et C avec bc, ca et ab. Dans le cas actuel, cette droite est à l'infini : donc la conique tangente est un cercle. Cette démonstration du théorème de Feuerbach (132, Ex. IV), comme cas particulier du précédent, est due à M. W.-R. Hamilton.

On peut construire le point d' et la droite D sans tracer l'ellipse.

Les diagonales d'un quadrilatère inscrit et celles du quadrilatère circonscrit correspondant se coupent en un même point; par suite les droites ab, cd, $a'b'$, $c'd'$ et celles qui joignent AD, BC; AC, BD passent par un même point.

Si donc α, β, γ sont les sommets du triangle déterminé par les intersections de bc et $b'c'$, ca et $c'a'$, ab et $a'b'$, les droites $a'\alpha$, $b'\beta$, $c'\gamma$ se coupent en d'.

En d'autres termes, le triangle $\alpha\beta\gamma$ est homologue aux triangles abc, $a'b'c'$, d et d' étant les centres d'homologie. De même les triangles $\alpha\beta\gamma$ et ABC sont homologues et ont la droite D pour axe d'homologie.



CHAPITRE XVII.

MÉTHODE DES PROJECTIONS (*)

§ I. — Projections coniques.

347. La méthode des projections, dont nous allons donner un exposé succinct, permet de déduire d'un théorème donné et restreint le théorème général auquel il se rattache et dont il n'est qu'un cas particulier. Sa supériorité, comme instrument de recherche, ne saurait échapper au lecteur, qui a pu voir déjà tout le parti qu'on pouvait tirer de l'étude des théorèmes particuliers renfermés dans un énoncé général.

Les droites qui joignent tous les points d'une figure à un point O de l'espace forment un *cône* dont le point O est le *sommet*. La section de ce cône par un plan détermine une figure qui est la *projection* de la figure donnée. Le plan de la section s'appelle *plan de projection*.

La droite qui joint un point A au sommet O rencontre le plan de projection en un point *a* qui est la projection du point A, donc :

Un point se projette suivant un point.

En joignant tous les points d'une droite au sommet, on forme un plan qui rencontre le plan de projection suivant une droite, par suite :

(*) Cette méthode a été imaginée par Poncelet, qui l'a exposée dans son *Traité des Propriétés projectives des figures*, publié en 1822 et réédité en 1865 (2 vol. in-4; Paris, Gauthier-Villars). Dans cet Ouvrage, qui peut être considéré comme le point de départ de la Géométrie moderne, se trouvent développés les principes suivants : Les théorèmes relatifs à des points à l'infini peuvent s'étendre à des points situés à une distance finie sur une droite; les théorèmes se rapportant à des systèmes de cercles s'appliquent à des coniques ayant deux points communs; enfin, les théorèmes relatifs à des points et à des droites imaginaires peuvent s'étendre à des droites et à des points réels.

Une droite se projette toujours suivant une droite.

Lors donc qu'un certain nombre de points d'une figure se trouvent en ligne droite, les points qui leur correspondent dans la projection sont aussi en ligne droite; et lorsque plusieurs droites passent par un même point, leurs projections passent aussi par un même point.

348. *Une courbe plane se projette suivant une courbe de même degré.*

Lorsqu'une courbe donnée est coupée par une droite en un certain nombre de points A, B, C, D,..., sa projection rencontre la projection de la droite suivant le *même nombre* de points *a*, *b*, *c*, *d*,... correspondant aux premiers: la courbe et sa projection sont donc de même degré, puisque, géométriquement, le degré d'une courbe se détermine par le nombre de points suivant lesquels elle peut être rencontrée par une droite. Lorsque AB coupe la courbe en des points réels et imaginaires, *ab* rencontre la projection suivant le même nombre de points réels et le même nombre de points imaginaires. Lorsque deux courbes se coupent, leurs projections se coupent suivant le même nombre de points; et à un point réel ou imaginaire de l'intersection des courbes correspond toujours un point réel ou imaginaire de l'intersection des projections.

La corde AB d'une courbe se projette suivant la droite *ab* qui joint les points correspondants de la projection. Lorsque A et B coïncident, il en est de même de *a* et *b*; par suite:

La projection de la tangente à une courbe est tangente à la projection de cette courbe.

Plus généralement, lorsque deux courbes se touchent en un certain nombre de points, leurs projections se touchent suivant le même nombre de points.

349. Lorsque le plan mené par le sommet du cône parallèlement au plan de projection rencontre suivant la droite AB le plan de la figure primitive, tout faisceau de droites ayant

son sommet sur AB se projette suivant un système de droites parallèles. En effet, la droite menée du sommet à un point quelconque de AB rencontre le plan de projection de l'infini.

Réciproquement, un système de droites parallèles se projette suivant un faisceau de droites ayant son sommet sur la droite DF intersection du plan de projection avec le plan mené par le sommet parallèlement au plan de la figure primitive.

Les droites parallèles peuvent donc être considérées comme passant par un même point à l'infini, puisque leurs projections passent par un même point situé, en général, à une distance finie. De plus, *tous les points à l'infini peuvent être considérés comme appartenant à une même droite*, puisque la projection du point d'intersection des droites parallèles se projette quelque part, sur la droite DF du plan de projection.

350. Toutes les propriétés descriptives d'une courbe, c'est-à-dire n'ayant rapport qu'à la position des points ou des lignes, indépendamment de toute condition de grandeur de lignes ou d'angles, subsistent pour toutes les courbes suivant lesquelles on peut la projeter. C'est ce qui arrive, par exemple, dans le cas du théorème suivant : les tangentes menées à un cercle par les extrémités des cordes issues d'un point fixe, se coupent sur une droite fixe. Ainsi, lorsque nous aurons démontré qu'un cercle peut toujours être considéré comme la projection d'une conique, nous pourrons, par la méthode des projections, étendre à toutes les sections coniques les propriétés des pôles et polaires dans le cercle. Le théorème de Pascal, celui de Brianchon sont relatifs à des propriétés du même genre; et en les démontrant dans le cas du cercle, on prouvera, par cela même, qu'ils s'appliquent à toutes les courbes du deuxième degré.

351. Les propriétés d'une figure qui subsistent dans sa projection portent le nom de *propriétés projectives*. En dehors des propriétés descriptives dont nous avons parlé au numéro précédent, il y a un certain nombre de propriétés métriques, c'est-à-dire relatives à la grandeur des lignes qui sont projec-

tives. Ainsi le rapport anharmonique (ABCD) de quatre points situés en ligne droite est le même que celui (*abcd*) de leurs projections, puisqu'ils sont l'un et l'autre mesurés par le faisceau (O, ABCD), qui joint les points A, B, C, D au sommet O du cône. En général, si les distances mutuelles d'un certain nombre de points en ligne droite A, B, C, D,..., vérifient une équation telle que

$$AB.CD.EF + k.AC.BE.DF + l.AD.CE.BF + \ldots = 0,$$

dont chaque terme renferme le même nombre de points, quoique dans un ordre différent; cette équation exprime une propriété projective. En effet (311), si l'on y remplace AB, AC,..., par

$$\frac{OA.OB.\sin AOB}{OP}, \quad \frac{OA.OC.\sin AOC}{OP}, \ldots,$$

OP étant la distance du sommet à la droite, chacun de ses termes contient OA.OB.OC.OD.OE.OF au numérateur et $\overline{OP}^3$ au dénominateur; et en supprimant ces facteurs communs on obtient une relation entre les sinus des angles formés au point O. Il n'est pas même nécessaire que les points A, B, C, D, E, F soient en ligne droite pour que l'équation ci-dessus exprime une propriété projective; il suffit qu'ils soient pris de telle sorte, qu'après la substitution chacun des termes de l'équation contienne au dénominateur le même produit OP.OP'.OP",.... Ainsi à cette dernière catégorie se rattache le théorème suivant: Les droites menées d'un même point O aux sommets d'un triangle ABC rencontrent les côtés opposés en des points *a*, *b*, *c* tels que $Ab.Bc.Ca = Ac.Ba.Cb$. Il suffit dès lors de le démontrer pour une projection quelconque du triangle. Si l'on suppose que le point C se projette à l'infini, AC, BC, C*c* deviennent parallèles, et la relation précédente se réduit à l'équation

$$Ab.Bc = Ac.Ba,$$

qu'il est facile de vérifier en construisant la figure.

352. De là résulte que, pour démontrer une propriété projective, il suffit de prouver qu'elle a lieu pour la figure *la plus simple*, suivant laquelle on peut projeter la figure donnée.

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de trouver les propriétés harmoniques du quadrilatère complet ABCD. Les côtés opposés se coupant en E, F, les diagonales en G, joignons tous les points de la figure à un point O de l'espace et prenons pour plan de projection un plan parallèle à OEF. La ligne EF se projettera à l'infini, et nous aurons un nouveau quadrilatère dont les côtés *ab* et *cd*, *ad* et *bc* seront respectivement parallèles, puisqu'ils se rencontrent en des points *e* et *f* situés à l'infini. On voit donc que *tout quadrilatère peut être projeté suivant un parallélogramme;* et comme les diagonales d'un parallélogramme se coupent mutuellement en deux parties égales, la diagonale *ac* est divisée harmoniquement en *a*, *g*, *c* et au point où elle rencontre la ligne à l'infini *ef*. Donc la diagonale AB est divisée harmoniquement en A, G, C et au point où elle rencontre EF.

EXERCICE.

Lorsque, dans deux triangles ABC, A'B'C' les points d'intersection AB et A'B', BC et B'C', CA et C'A' sont en ligne droite, les droites AA', BB', CC' passent par un même point.

Si l'on projette à l'infini la droite suivant laquelle AB, A'B',... se coupent, le théorème à démontrer se ramène au suivant : Lorsque deux triangles *abc*, *a'b'c'* ont leurs côtés respectivement parallèles, les droites *aa'*, *bb'*, *cc'* se coupent en un même point. Cette dernière proposition est évidente, puisque *aa'* et *bb'* divisent *cc'* dans le même rapport.

353. Afin de ne pas interrompre l'exposé des applications de la méthode des projections, nous renverrons à un autre paragraphe la démonstration des théorèmes suivants :

Une conique peut être considérée comme la projection d'un cercle.

On peut, par un choix convenable du sommet et du plan de projection, projeter une conique suivant un cercle de telle sorte qu'une droite de son plan se projette à l'infini.

Ces théorèmes conduisent aux propositions suivantes :

On peut projeter une conique suivant un cercle ayant pour centre la projection d'un point donné pris dans le plan de la conique. Il suffit, pour cela, de faire la projection de telle sorte que la polaire du point donné se projette à l'infini (154).

On peut projeter deux coniques situées dans un même plan suivant deux cercles. On n'a qu'à projeter l'une d'elles suivant un cercle, de telle façon qu'une de leurs cordes d'intersection se projette à l'infini; car alors (257) la projection de la seconde conique passant par les mêmes points à l'infini que le cercle, sera aussi un cercle.

On peut projeter deux coniques ayant un double contact suivant deux cercles concentriques. Il suffit de projeter une des coniques suivant un cercle de telle manière que sa corde de contact avec l'autre se projette à l'infini (251).

354. Les exercices suivants serviront à montrer comment on peut déduire les propriétés des sections coniques, soit des propriétés du cercle, soit de certaines propriétés plus simples des coniques elles-mêmes.

EXERCICES.

I. Toute sécante menée par un point est divisée harmoniquement par la conique et la polaire de ce point.

Ce théorème et son réciproque sont relatifs à des propriétés projectives (351); ils sont vrais pour le cercle, ils sont donc vrais pour les coniques. Par suite, toutes les propriétés du cercle qui dépendent de la théorie des pôles et polaires subsistent pour les sections coniques.

II. Les propriétés anharmoniques des points et des tangentes à une conique sont des propriétés projectives, qui, ayant été démontrées dans le cas du cercle (312), sont, par cela même, démontrées pour toutes les coniques.

III. Le théorème de Carnot (313) : lorsqu'une conique rencontre les côtés d'un triangle ABD en a, a', b, b', c, c', on a la relation

$$Ab.Ab'.Bc.Bc'.Ca.Ca' = Ac.Ac'.Ba.Ba'.Cb.Cb'$$

est une propriété projective qu'il suffit de prouver dans le cas du cercle. Mais alors elle est évidente, puisque

$$Ab.Ab' = Ac.Ac'; \ldots$$

On démontrerait de la même manière que ce théorème subsiste pour un polygone quelconque.

IV. On peut déduire du théorème de Carnot les différents théorèmes du n° 148, en supposant le point C à l'infini. Car on a alors

$$\frac{\mathrm{A}b.\mathrm{A}b'}{\mathrm{A}c.\mathrm{A}c'} = -\frac{\mathrm{B}a.\mathrm{B}a'}{\mathrm{B}c.\mathrm{B}c'},$$

les lignes Ab et Ba étant parallèles.

V. Toute corde d'un cercle, tangente à un cerclo concentrique, a son milieu au point de contact.

Quand deux coniques ont un double contact, toute tangente à l'une est divisée harmoniquement par le point de contact, l'autre conique et la corde de contact (345, Ex. III).

La corde de contact des deux coniques n'est autre chose que la projection de la ligne à l'infini des deux cercles. Le théorème donné au n° 236, Ex. IV, est un cas particulier du précédent.

VI. Étant donnés trois cercles concentriques, toute tangente à l'un est divisée par les deux autres en quatre points dont le rapport anharmonique est constant.

Étant données trois coniques ayant un double contact suivant la même droite, toute tangente à l'une est divisée par les deux autres en quatre points dont le rapport anharmonique est constant.

Le premier théorème est évident, puisque les quatre longueurs sont constantes. Le second peut être considéré comme une extension de la propriété anharmonique des tangentes à une conique. De même, le théorème (276) relatif aux rapports anharmoniques dans les coniques ayant un double contact s'obtient immédiatement en projetant les coniques suivant des cercles concentriques.

VII. Nous avons déjà dit qu'il suffisait de démontrer le théorème de Pascal pour le cas du cercle; mais on peut, en s'appuyant sur le n° 353, simplifier encore la figure en supposant que la droite qui joint l'intersection de (AB, DE) à celle de (BC, EF) se projette à l'infini. Il suffit alors do démontrer que, si les côtés AB et DE d'un hexagone inscrit dans un cercle sont respectivement paralleles, il en est de même des autres côtés CD et AF, démonstration qui ne demande que des considérations très-élémentaires.

VIII. Un triangle est inscrit dans une conique, deux de ses côtés passent par deux points fixes : trouver l'enveloppe du troisième (272, Ex. III).

Projetons la conique suivant un cercle, de manière que la droite qui joint les deux points fixes s'éloigne tout entière à l'infini; le problème se ramène au suivant : un triangle est inscrit dans un cercle, deux de ses côtés sont parallèles à deux droites fixes : trouver l'enveloppe du troisième. Un des angles du triangle étant donné, l'enveloppe est un cercle concentrique : donc, dans le cas général, l'enveloppe est une conique ayant, avec la conique donnée, un double contact suivant la droite qui joint les points fixes.

IX. Déterminer les propriétés projectives d'un quadrilatère inscrit dans une conique.

Projetons la conique suivant un cercle et le quadrilatère suivant un parallélogramme (352). L'intersection des diagonales d'un parallélogramme inscrit dans un cercle est le centre du cercle : donc l'intersection des diagonales du quadrilatère inscrit dans une conique est le pôle de la droite qui joint les intersections des côtés opposés. De plus, si par les sommets de ce parallélogramme on mène des tangentes au cercle, les diagonales du quadrilatère ainsi formé passent aussi par le centre, et sont les bissectrices des angles compris entre les premières diagonales : donc les diagonales du quadrilatère inscrit et celles du quadrilatère circonscrit correspondant passent par un même point et forment un faisceau harmonique.

X. Le lieu des centres des coniques circonscrites à un quadrilatère est une conique passant par les milieux des côtés de ce quadrilatère (328, Ex. XV).

Le lieu des pôles d'une droite fixe, par rapport à une conique circonscrite à un quadrilatère, est une conique, qui rencontre chaque côté du quadrilatère en un point formant une division harmonique avec les extrémités de ce côté, et son intersection avec la droite fixe.

XI. Le lieu des points divisant dans un rapport donné les cordes parallèles d'un cercle est une ellipse ayant un double contact avec ce cercle (163).

Si, par un point fixe O, on mène une sécante rencontrant une conique en A et B, et qu'on prenne sur cette sécante un point P tel, que (OABP) soit constant, le lieu du point P est une conique ayant un double contact avec la conique donnée.

355. Nous allons appliquer la méthode des projections à plusieurs propriétés des foyers, en nous appuyant sur la défi-

nition que nous en avons donnée au n° 279 et que nous rappelons ici. Lorsque le point F est le foyer d'une conique, les droites FA, FB, qui le joignent aux deux points imaginaires A et B, où le cercle rencontre la droite à l'infini, sont tangentes à la conique.

EXERCICES.

I. Le lieu des centres des cercles tangents à deux cercles donnés est une hyperbole ayant pour foyers les centres des cercles donnés.

Étant données deux coniques S et S′ passant par les points A et B, le lieu des pôles de AB par rapport à une conique tangente à S et S′, et passant par A et B, est une conique tangente aux quatre droites CA, CB, C′A, C′B : C et C′ étant les pôles de AB par rapport à S et S′.

Le deuxième théorème a été déduit du premier en remplaçant dans l'énoncé *cercle* par *conique passant par deux points fixes* A, B (257), et *centre* par *pôle de la droite* AB (154).

II. Le lieu des pôles d'une droite donnée par rapport aux coniques ayant un foyer commun et passant par deux points fixes de cette droite est une ligne droite (191).

Le lieu des pôles d'une droite donnée par rapport aux coniques tangentes à deux droites et passant par deux points fixes pris sur la droite donnée est une ligne droite.

III. Le lieu du deuxième foyer des coniques ayant deux tangentes et un foyer communs est une ligne droite (189).

Le lieu de l'intersection des tangentes menées aux coniques inscrites dans un quadrilatère, par deux points pris sur deux des côtés de ce quadrilatère, est une ligne droite.

IV. Le cercle circonscrit au triangle formé par trois tangentes à une parabole passe par le foyer (223, Cor. IV).

Les six sommets de deux triangles circonscrits à une conique sont sur une même conique.

En effet, le triangle FAB formé en joignant le foyer F aux deux points A et B du cercle situés à l'infini est un second triangle circonscrit à la parabole.

V. Le lieu des centres des cercles passant par un point fixe et tangents

Étant donnée une série de coniques circonscrites à un triangle

à une droite fixe est une parabole ayant pour foyer le point fixe.	et tangentes à une droite fixe, le lieu de l'intersection des tangentes menées à ces coniques par deux des sommets du triangle est une conique inscrite dans le triangle.
VI. Le lieu des centres des coniques inscrites dans un quadrilatère est une droite passant par les milieux des diagonales.	Le lieu des pôles d'une droite fixe par rapport aux coniques inscrites dans un quadrilatère est une droite qui rencontre les diagonales en des points conjugués harmoniques de leurs intersections avec la droite fixe.

Il résulte de la définition que nous avons donnée des foyers, que si deux coniques ont un foyer commun, ce foyer, qui est l'intersection de deux tangentes communes, jouit des propriétés énoncées à la fin du n° 264. De plus, deux coniques ayant même foyer et même directrice peuvent être considérées comme ayant un double contact, et peuvent être projetées suivant deux cercles concentriques.

356. Les angles qui sont constants dans une figure ne sont pas, en général, constants dans la projection de cette figure; mais aux propriétés relatives à la grandeur des angles dans la figure primitive correspondent, dans la projection, des propriétés que nous allons étudier, en commençant par le cas où certains angles de la figure primitive sont droits.

Soient $x = 0$, $y = 0$ les équations de deux droites se coupant à angles droits; la direction des points du cercle situés à l'infini étant donnée par $x^2 + y^2 = 0$, ou, ce qui revient au même, par

$$x + y\sqrt{-1} = 0, \quad x - y\sqrt{-1} = 0,$$

les quatre droites x, y, $x + y\sqrt{-1}$, $x - y\sqrt{-1}$ forment un faisceau harmonique (57). Donc, lorsque quatre points en ligne droite A, B, C, D, formant une division harmonique, peuvent être transformés par une projection, réelle ou imaginaire, de telle sorte que A et B deviennent les deux points imaginaires et à l'infini d'un cercle, les droites menées par C et D se projettent suivant deux droites perpendiculaires. Les points A et B

peuvent, du reste, être réels ou imaginaires. Réciproquement : *A un angle droit de la figure primitive correspond en projection un angle dont les côtés forment un faisceau harmonique avec les droites qui joignent la projection du sommet à celles des deux points imaginaires et à l'infini du cercle.*

EXERCICES.

I. La tangente au cercle est perpendiculaire au rayon.

Toute corde d'une conique est divisée harmoniquement par une tangente, et par la droite qui joint au point de contact de cette tangente le pôle de la corde donnée (146).

En considérant la corde de la conique comme la projection de la droite à l'infini située dans le plan du cercle, les points où la corde rencontre la conique sont les projections des points imaginaires à l'infini du cercle, et le pôle de la corde est la projection du centre du cercle.

II. La droite qui joint le foyer d'une conique au pôle d'une corde focale est perpendiculaire à cette corde (192).

La droite passant par un point forme avec la droite qui joint son pôle à ce point et les deux tangentes menées par ce point un faisceau harmonique (146).

La première de ces propriétés n'est évidemment qu'un cas particulier de la seconde, puisque les tangentes menées par le foyer sont les droites qui joignent ce foyer aux points imaginaires d'un cercle.

III. Déterminons, en partant de l'Exercice VI du numéro précédent, le lieu des pôles d'une droite fixe par rapport à un système de coniques homofocales. Les coniques ayant mêmes foyers sont inscrites dans le même quadrilatère (279). Une des diagonales de ce quadrilatere est la droite qui joint les foyers : donc (355, Ex. VI), le point formant une division harmonique avec les deux foyers, et l'intersection de la ligne des foyers par la droite fixe, est un point du lieu. L'autre diagonale est la ligne à l'infini, et puisque ses extrémités sont les points imaginaires du cercle, le lieu cherché est une perpendiculaire à la droite fixe, et se trouve ainsi complétement déterminé.

IV. Deux coniques homofocales se coupent à angle droit.	Lorsque deux coniques sont inscrites dans le même quadrilatère, les deux tangentes menées par un de leurs points d'intersection divisent harmoniquement une diagonale quelconque de ce quadrilatère.

Ce théorème est un cas particulier du théorème réciproque de l'Exercice I du n° 345.

V. Le lieu des sommets des angles droits circonscrits à une conique à centre est un cercle.	Le lieu des sommets des angles circonscrits à une conique, et dont les côtés divisent harmoniquement une droite de longueur AB est une conique passant par les points A et B.

Ce dernier théoreme peut (146) encore s'énoncer de la manière suivante :

Le lieu d'un point O tel, que la droite menée de ce point au pôle de AO passe par le point B, est une conique passant par les points A et B. On peut du reste le démontrer directement en prenant quatre positions de AO, et observant (297, Ex. II) que le rapport anharmonique des quatre droites AO est égal à celui des quatre droites correspondantes BO.

VI. Le lieu des sommets des angles droits circonscrits à la parabole est la directrice.	Si, dans l'Exercice précédent, la droite AB est tangente à la conique donnée, le lieu des points O est une droite qui passe par les points de contact des tangentes menées par A et B.
VII. Le cercle circonscrit à un triangle autopolaire par rapport à une hyperbole équilatère passe par le centre de la courbe (228, Ex. IV).	Les six sommets de deux triangles autopolaires par rapport à une conique sont situés sur une même conique.

Les asymptotes d'une hyperbole équilatère étant perpendiculaires, la droite à l'infini rencontre la courbe en deux points qui forment une division harmonique avec les deux points imaginaires A et B du cercle. Et comme le centre C est le pôle de AB, le triangle CAB est autopolaire par rapport à l'hyperbole équilatère. D'où le théorème réciproque : Les six côtés de deux triangles autopolaires, par rapport à une conique, touchent une même conique.

VIII. Par un point d'une conique, on mène deux cordes à angle droit; la corde qui joint leurs extrémités passe par un point fixe (181, Ex. II).

Un faisceau harmonique a son sommet sur une conique, deux de ses rayons sont fixes : la corde qui joint les extrémités des autres rayons passe par un point fixe.

Autrement, étant donnés deux points *a*, *c* d'une conique et un rapport harmonique (*abcd*), la corde *bd* passe par un point fixe qui se trouve à l'intersection des tangentes en *a* et *c*. Ce théorème peut se démontrer directement.

Soit K l'intersection de *ac* avec *bd*, puisque (*a*, *abcd*) est un faisceau harmonique, la tangente en *a* rencontre *bd* en un point qui forme avec *b*, *d* et K une division harmonique; il en est de même de la tangente en *c* : donc *bd* passe par l'intersection des tangentes en *a* et en *c*. Comme cas particulier, nous avons le théorème suivant :

Par un point fixe d'une conique, on mène deux cordes faisant des angles égaux avec une droite fixe; la corde qui joint leurs extrémités passe par un point fixe.

357. *Les couples de droites menées par un point fixe, de telle sorte que les deux droites de chaque couple fassent des angles égaux avec une droite fixe, déterminent, sur la droite à l'infini, un système de points en involution dans lequel les points imaginaires et à l'infini du cercle sont conjugués.*

Ces couples déterminent évidemment, sur une droite *quelconque*, un système de points en involution dont les foyers se trouvent sur les bissectrices intérieure et extérieure communes à tous les couples. Les deux points à l'infini appartiennent à ce système, puisque ces bissectrices forment, avec les rayons qui correspondent à ces points, un faisceau harmonique.

Les tangentes menées par un point à un système de coniques homofocales font des angles égaux avec deux droites fixes (189).

Les tangentes menées par un point à un système de coniques inscrites dans le même quadrilatère déterminent sur une diagonale quelconque de ce quadrilatère un système de points en involution auquel les extrémites de cette diagonale appartiennent comme points conjugués (344).

358. *Deux droites issues d'un point fixe et comprenant un angle constant forment, avec les droites qui joignent ce point fixe aux points à l'infini du cercle, un faisceau dont le rapport anharmonique est constant.*

Soient $x = 0$, $y = 0$ les équations des deux droites comprenant un angle constant θ, la direction des points à l'infini du cercle sera donnée par la relation

$$x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta = 0,$$

et si l'on décompose cette équation en ses deux facteurs, on voit (37) que le rapport anharmonique des quatre droites est constant lorsque θ est constant.

EXERCICES.

I. Le théorème relatif à l'égalité des angles inscrits dans un même segment de circonférence n'est, d'après ce qui précède, que l'énoncé particulier de la propriété anharmonique de quatre points d'un cercle, dans le cas où deux d'entre eux sont à l'infini.

II. L'enveloppe de la corde d'une conique, vue du foyer sous un angle constant, est une autre conique ayant même foyer et même directrice que la conique donnée.

Par le point O, on mène à une conique deux tangentes en T et T'; on prend sur la conique deux points A et B tels, que (O, ATBT') soit constant : l'enveloppe de BA est une conique tangente, en T et T', à la conique donnée.

III. Le lieu décrit par le sommet d'un angle constant circonscrit à la parabole est une hyperbole ayant même foyer et même directrice.

On mène à une conique deux tangentes déterminant une division anharmonique donnée, sur un segment AB d'une tangente fixe : le lieu de l'intersection de ces deux tangentes est une conique qui touche la première aux points de contact des tangentes menées par A et B.

IV. Par le foyer d'une conique, on mène des droites également inclinées sur les tangentes; le lieu

Sur une tangente quelconque à une conique rencontrée en T, T' et M par deux tangentes et une

des intersections des droites et des tangentes est un cercle.

droite fixes, on prend un point P tel, que (PTMT') soit constant; le lieu du point P est une conique passant par les points d'intersections des tangentes fixes avec la droite fixe.

Le théorème qui suit n'est qu'un cas particulier du précédent : Le lieu du point où le segment déterminé sur une tangente variable par deux tangentes fixes est divisé dans un rapport constant, est une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles aux tangentes fixes.

V. Le sommet P d'un angle constant TPO glisse sur un cercle, un de ses côtés OP passe par un point fixe O, le deuxième côté TP enveloppe une conique ayant le point O pour foyer.

On donne le rapport anharmonique d'un faisceau, trois de ses rayons tournent autour de trois points fixes A, B, C, tandis que son sommet glisse sur une conique passant par A et B; l'enveloppe du quatrième rayon est une conique tangente aux droites CA, CB.

Et comme cas particulier : Par un point quelconque P d'une conique on mène, à deux de ses points fixes A et B, deux cordes qui déterminent sur une droite fixe un segment variable; l'enveloppe de la droite PM, divisant ce segment dans un rapport donné, est une conique tangente aux parallèles menées par A et B à la droite fixe.

VI. Le sommet P d'un angle constant TPO glisse sur une droite fixe; un de ses côtés passe par un point fixe O; l'autre côté enveloppe une parabole ayant le point O pour foyer.

On donne le rapport anharmonique d'un faisceau; trois de ses rayons passent par trois points fixes, tandis que son sommet glisse sur une droite fixe; le quatrième rayon enveloppe une conique inscrite dans le triangle formé par les points donnés.

359. Dans ce qui précède, nous avons exposé la méthode géométrique au moyen de laquelle on peut déduire les propriétés d'une figure de celles d'une autre figure corrélative, non pas comme au Chapitre XV (de manière à ce que les points de l'une correspondent aux tangentes de l'autre), mais de telle sorte que les points correspondent aux points et les tangentes aux tangentes.

L'analyse peut aussi conduire au même résultat.

Considérons deux triangles de référence ayant respectivement pour côtés a, b, c et a', b', c' ; une même équation en coordonnées trilinéaires représentera deux courbes différentes, mais de même degré, suivant qu'on la considérera comme se rapportant au premier ou au second de ces triangles (*); et les mêmes équations serviront, par une interprétation différente, à établir les propriétés correspondantes des deux courbes.

Une droite d'un système correspond toujours à une droite de l'autre, sauf dans le cas de l'équation $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$, qui représente une droite située à l'infini par rapport au premier triangle et une droite située à une distance finie par rapport au second; de même, $a'\alpha + b'\beta + c'\gamma = 0$ représente une droite à l'infini relativement au second et une droite située à une distance finie relativement au premier. Mais l'étude des coordonnées trilinéaires montre facilement comment il est possible de généraliser les théorèmes où il est question de droites à l'infini (278, Ex. II). Ainsi, pour obtenir le lieu des centres des coniques inscrites ou circonscrites à un quadrilatère, il suffit de chercher le lieu du pôle de la droite à l'infini $a\alpha + b\beta + c\gamma$, et le même procédé peut servir à trouver le lieu du pôle d'une droite $\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma$ par rapport à des coniques assujetties aux mêmes conditions.

Le rapport anharmonique d'un faisceau $P - kP'$, $P - lP'$,... ne dépend que des constantes k, l,... (59), et reste constant lorsque les droites représentées par P et P' viennent à changer. Par suite, dans le mode de transformation que nous venons

(*) Il est facile de voir que pour rapporter au premier triangle la courbe obtenue en interprétant l'équation par rapport au second triangle, il suffit de remplacer, dans l'équation donnée α, β et γ par

$$l\alpha + m\beta + n\gamma, \quad l'\alpha + m'\beta + n'\gamma, \quad l''\alpha + m''\beta + n''\gamma;$$

en représentant par $l\alpha + m\beta + n\gamma$ la droite correspondante à α, etc. On trouvera de plus amples renseignements au sujet de cette méthode de transformation dans la deuxième Partie de la *Géométrie analytique* de M. Salmon (*Higher Plane Curves*, Chap. VI).

d'indiquer, à un faisceau de quatre droites dans un système, correspond dans l'autre un faisceau ayant même rapport anharmonique; à quatre points en ligne droite correspondent quatre points ayant même rapport anharmonique.

Une équation $S = o$, qui représente un cercle dans le premier système, ne représente pas, en général, un cercle dans le second. Mais, puisque l'équation d'un cercle quelconque du premier peut se mettre sous la forme

$$S + (a\alpha + b\beta + c\gamma)(\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma) = o,$$

toutes les courbes du second système correspondant à des cercles du premier passent par les deux points communs à S et à $a\alpha + b\beta + c\gamma$.

360. Nous sommes ainsi conduit, par une voie purement analytique, à un principe très-important découvert par Poncelet, qui en a donné des applications nombreuses dans son *Traité des propriétés projectives*, le *principe de continuité*. Ce principe, en vertu duquel les propriétés relatives à une figure dont les lignes et les points sont réels subsistent lorsqu'une partie de ces points ou de ces lignes devient imaginaire, se démontre plus facilement, du reste, par l'analyse que par la géométrie. Les procédés analytiques ne tiennent, en effet, aucun compte de la distinction si importante, en géométrie, du réel et de l'imaginaire. Ainsi, par exemple, le procédé employé au Chapitre XIV pour déterminer les propriétés du système de coniques représentées par des équations de la forme $S = k\alpha\beta$, $S = k\alpha^2$ est toujours le même, que les points d'intersection de α et β avec S soient réels ou imaginaires.

D'une propriété donnée d'un système de cercles on ne peut déduire, par une projection réelle, qu'une propriété relative à un système de coniques passant par deux points imaginaires; tandis qu'il est impossible de démontrer cette dernière propriété, en partant de l'équation générale, sans la démontrer en même temps pour les coniques ayant deux points réels communs.

La méthode analytique de transformation indiquée au nu-

méro précédent s'applique également lorsqu'à des points réels d'une figure on fait correspondre des points imaginaires de l'autre. Ainsi, par exemple, $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$ représente une courbe qui coupe la ligne γ en des points imaginaires; mais, si l'on remplace α, β par $P \pm Q\sqrt{-1}$, et γ par R (P, Q, R désignant des droites), on obtient une nouvelle courbe qui est coupée en des points réels par la droite R correspondant à γ.

Toutefois, la méthode des projections présente d'assez grandes différences dans les applications, suivant qu'on la considère comme géométrique ou comme analytique. Dans la méthode géométrique, on déduit le théorème général d'un théorème particulier relatif soit au cercle, soit à un cas simple de la figure, théorème démontré d'abord. Dans la méthode analytique, on démontre immédiatement le théorème général, et on en déduit ensuite les théorèmes particuliers, parce qu'au moyen de l'analyse il est aussi facile de démontrer un théorème général qu'un théorème particulier.

§ II. — Des sections planes du cône.

361. *Les sections faites dans un cône par des plans parallèles sont semblables.*

Menons par le sommet O du cône des droites quelconques OA, OB,..., elles rencontreront les plans des sections en des points A, B,..., *a*, *b*,... qui se correspondront deux à deux, ainsi que les rayons vecteurs AB,..., *ab*,.... Les deux triangles OAB, O*ab* sont semblables: le rapport de AB à *ab*, égal à celui de OA à O*a*, est constant. Les rayons vecteurs d'une section sont donc, avec ceux qui leur correspondent dans l'autre, dans un rapport constant; par suite (233), les deux sections sont semblables.

Corollaire. — La section faite dans un cône à base circulaire par un plan parallèle à cette base est un cercle.

Ce corollaire pourrait se démontrer diretement en prenant pour A et *a* les centres des cercles.

362. *La section d'un cône à base circulaire est une ellipse, une hyperbole ou une parabole.*

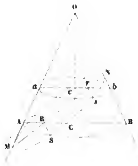
Un cône à base circulaire est *droit* lorsque la droite menée par le sommet au centre de la base est perpendiculaire à cette base, et alors cette droite s'appelle *axe du cône.*

Un cône est *oblique* lorsque cette droite est oblique par rapport à la base.

Nous déterminerons d'abord la nature des sections faites dans un cône droit.

Prenons pour plan de la figure le plan OAB conduit par l'axe OC du cône (*fig.* 105) perpendiculairement à celui de la

Fig. 105.



section MS*s*N. Il coupe le cône suivant les droites OA et OB, le plan sécant suivant MN, et la base ASB du cône suivant AB. L'intersection RS de la base avec le plan sécant est perpendiculaire au plan de la figure.

1° Considérons d'abord le cas où la droite MN rencontre les côtés OA et OB, comme il est indiqué dans la *fig.* 105, c'est-à-dire d'un même côté du sommet O.

Le plan *asb* mené parallèlement à la base par un point *s* de la section coupe le plan de la figure suivant *ab*, le plan sécant suivant *rs*, et le cône suivant un cercle. On a, d'après un théorème connu,

$$\overline{RS}^2 = AR.RB.$$

RS étant une ordonnée du cercle; de même

$$\overline{rs}^2 = ar.rb.$$

La comparaison des triangles semblables ARM et arM, BRN brN donne la proportion

$$\text{AR.RB} : \text{MR.RN} :: ar.rb : \text{M}r.r\text{N};$$

par suite,

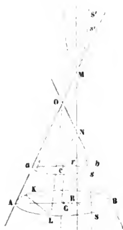
$$\overline{\text{RS}}^2 : \overline{rs}^2 :: \text{MR.RN} : \text{M}r.r\text{N}.$$

Le carré d'une des ordonnées rs de la section est ainsi dans un rapport constant avec le rectangle des segments qu'elle détermine sur MN; cette section est donc une *ellipse* (149, III) ayant MN pour grand axe, et dont le petit axe $2b$ est donné par la proportion

$$4b^2 : \overline{\text{MN}}^2 :: \overline{\text{RS}}^2 : \text{MR.RN}.$$

2° La droite MN rencontre les deux droites OA, OB de part et d'autre du sommet (*fig.* 106). En suivant la même marche que

Fig. 106.



dans le cas précédent, on trouve que le carré de l'ordonnée rs est dans un rapport constant avec le rectangle M$r.r$N des

segments qu'elle détermine sur le *prolongement* de la droite MN. Il est dès lors facile de voir que la section est une *hyperbole* se composant de deux branches opposées NsS, Ms'S'.

3° La droite MN est parallèle à l'un des côtés OA (*fig.* 107). Dans ce cas :

$$AR = ar, \quad RB : rb :: RN : rN,$$

Fig. 107.



et comme

$$\overline{rs}^2 = ar.rb, \quad \overline{RS}^2 = AR.RB,$$

on a

$$\overline{rs}^2 : rN :: \overline{RS}^2 : RN.$$

Le carré de l'ordonnée est donc, avec l'abscisse, dans un rapport constant; par suite, la section est une *parabole* (*).

(*) Ceux qui s'occupèrent les premiers des sections coniques ne considéraient que le cas du cône droit coupé par un plan perpendiculaire à une de ses arêtes, c'est-à-dire en supposant la droite MN perpendiculaire à OB. Les sections coniques furent alors divisées en sections d'un cône rectangle, acutangle et obtusangle, et, d'après Eutochius, le commentateur d'Apollonius, on les appela : parabole, ellipse ou hyperbole, suivant que l'angle du cône était égal, inférieur ou supérieur à un angle droit. (Le passage entier d'Eutochius a été cité par M. Walton dans ses Problèmes, p. 428). Ce fut Apollonius qui montra le premier, que les trois sections pouvaient être obtenues dans un seul cône, et qui, suivant Pappus, leur donna le nom de *parabole*, *ellipse* et *hyperbole*, en se basant sur les raisons indiquées au n° 194. L'autorité d'Eutochius, qui vivait plus de cent ans après Pappus, n'est pas très-grande; cependant le nom de *parabole* était déjà employé par Archimède, qui écrivait avant Apollonius.

363. Il est évident que les projections des tangentes au cercle en A et B sont tangentes en M et N à la section conique (348); dans le cas de la parabole, le point M et sa tangente s'éloignent à l'infini, ce qui nous conduit encore à cette conclusion : *La parabole a une tangente située tout entière à l'infini.*

364. Supposons maintenant que le cône soit oblique. Prenons pour plan de la figure le plan mené par OC perpendiculairement à la base AQSB (*fig.* 108). Le plan sécant rencontrant

Fig. 108.



cette base suivant une droite QS, menons dans le cercle le diamètre LK de cette corde QS. Le plan LOK conduit par ce diamètre LK et le sommet O coupe le plan sécant en MN. La démonstration est dès lors analogue à celle que nous avons donnée pour la section du cône droit. On a, dans le cercle AB,

$$\overline{RS}^2 = LR.RK.$$

On aurait de même, dans un cercle parallèle mené par un point s de la section (afin d'éviter la complication, ce cercle n'a pas été représenté sur la figure),

$$\overline{rs}^2 = lr.rk.$$

La similitude des triangles KRM, krM, LRN, lrN situés dans le plan LOK prouve, comme dans le cas où le cône est droit, que le rapport $\overline{RS}^2 : \overline{rs}^2$ des carrés des ordonnées de la section est le même que celui des rectangles des segments qu'elles dé-

terminent sur la droite MN. La section est donc une conique dans laquelle MN est le diamètre correspondant à QS; ce sera une ellipse ou une hyperbole suivant que MN rencontrera les droites OL et OK d'un même côté ou de part et d'autre du sommet, et une parabole lorsque MN sera parallèle à l'une de ces droites.

Dans cette démonstration, nous avons supposé que QS coupait le cercle en des points réels; s'il n'en était pas ainsi, il suffirait de prendre, au lieu du cercle AB, un autre cercle parallèle *ab* qui rencontrerait la courbe en des points réels.

365. *Lorsqu'un plan sécant rencontre la base d'un cône circulaire suivant une droite* QS, *les diamètres conjugués à* QS *pris dans le cercle et dans la section se coupent sur* QS.

Le théorème est évident quand la droite QS (devenant alors *qs*) rencontre le cercle en deux points réels, puisqu'alors les deux diamètres conjugués passent par le milieu *r* de *qs*

Fig. 109.



(*fig.* 109). Reste à examiner le cas où les intersections de *qs* et du cercle cessent d'être réelles. Le diamètre *df*, qui divise en deux parties égales les cordes parallèles à QS dans le cercle, se projette suivant un diamètre DF divisant en deux parties égales les cordes parallèles à *qs* dans un cercle parallèle au premier (361). Le lieu des milieux des cordes du cône parallèles à *qs* est donc un plan O*df*. Par suite, le diamètre conjugué de QS dans une section quelconque est l'intersection du plan O*df* avec le plan

de cette section, et passe par le point R, trace de la droite QS sur ce plan Odf.

Les rectangles RD.RF *et* Rg.Rk *des segments* RD, RF, Rg, Rk (*fig.* 109) *déterminés sur les diamètres conjugués à* QS *dans le cercle et la section par leur intersection* R, *sont entre eux dans le même rapport que les carrés des diamètres parallèle et conjugué à* QS *dans la section.*

Lorsque qs rencontre le cercle en des points réels, le théorème est évident, puisque $\overline{rs}^2 = dr.rf$. Nous avons démontré, en général, que les droites gk, df, DF étaient situées dans un plan mené par le sommet. Les points D et d sont donc les projections de g, c'est-à-dire sont situés sur une droite passant par le sommet. Par suite, les triangles semblables (comme au numéro 364) nous donnent

$$dr.rf : \mathrm{DR.RF} :: gr.rk : g\mathrm{R.R}k;$$

et puisque les rectangles $dr.rf$ et $gr.rk$ sont dans le même rapport que les carrés des diamètres parallèles, il en est de même des rectangles DR.RF et gR.Rk.

Ce théorème nous permet, étant données la section $gskq$ et la droite QS, de trouver DR.RF, c'est-à-dire le carré de la tangente menée du point R au cercle dont le plan passe par QS.

366. *On peut toujours projeter une conique* $gskq$ *suivant un cercle, de telle sorte qu'une droite* TL *située dans son plan et ne la coupant pas se projette à l'infini.*

Il suffit, pour démontrer ce théorème, de faire voir qu'on peut toujours trouver le sommet O d'un cône, ayant pour base la conique donnée et dont les sections parallèles au plan OTL soient des cercles; car alors ces sections satisfont à la question. D'après le théorème précédent, la distance OL, du sommet O à l'intersection L de TL avec son diamètre conjugué, est donnée, puisque le plan OTL rencontrant le cône suivant un cercle infiniment petit, le rapport $\overline{\mathrm{OL}}^2 : g\mathrm{L.L}k$ est le même que celui de deux diamètres connus de la section; d'ailleurs OL est situé dans le plan perpendiculaire à TL, puisqu'il est

parallèle au diamètre du cercle perpendiculaire à TL. Rien du reste ne limite la position de O, qui doit se trouver sur une circonférence déterminée dans un plan mené par le point L perpendiculairement à TL.

367. *Lorsqu'une sphère* AFBD *inscrite dans un cône droit* AOB *est tangente au plan d'une section* MPN, *le point de contact* F *est un foyer de cette section, et l'intersection du plan de la section et du plan de contact* ADB *de la sphère avec le cône est la directrice correspondante.*

Inscrivons une deuxième sphère *adb* F′ (*fig.* 110) entre le plan de la section et le sommet O du cône : soient *adb* son plan de

Fig. 110.



contact avec le cône et F′ son point de contact avec la section. Joignons un point quelconque P de la section au sommet O; cette droite PO rencontre les plans de contact en D et *d*. Les tangentes menées par un point à la sphère étant égales, on aura

$$PD = PF, \quad Pd = PF';$$

par suite,

$$PF + PF' = PD + Pd = Dd = \text{constante}.$$

Les points F et F′ sont donc les foyers de la section.

Le point R, où FF′ rencontre le prolongement de AB, appartient à la directrice, c'est-à-dire à la polaire de F, puisque,

d'après une propriété du cercle, N, F, M, R forment une division harmonique.

On démontrerait facilement que le paramètre de la section MPN est constant, lorsque la distance de son plan au sommet est constante.

Corollaire. — Le lieu des sommets de tous les cônes droits sur lesquels on peut placer une ellipse donnée est une hyperbole passant par les foyers de l'ellipse. La différence MO — NO est, en effet, constante, puisqu'elle est égale à la différence MF′ — NF′ (*).

§ III. — Projections orthogonales.

368. On appelle *projection orthogonale* d'un point sur un plan le pied de la perpendiculaire abaissée de ce point sur ce plan. La projection d'une figure quelconque est le lieu des projections de ses divers points; et il est facile de voir que la projection d'une droite est une droite, et que des droites parallèles se projettent suivant des droites parallèles, etc.

La projection orthogonale d'une figure n'est autre chose, du reste, que la *section droite du cylindre* ayant cette figure pour directrice. Le plan de la section droite est le *plan de projection.*

(*) En partant de ce principe, M. Mulcahy a indiqué une méthode pour déduire les propriétés des angles qui ont le foyer pour sommet de celles relatives aux petits cercles de la sphère. Transformons par cette méthode le théorème suivant : Si, par un point P de la sphère, on mène un grand cercle coupant un petit cercle en deux points A et B, le produit $\text{tang}\frac{1}{2}AP.\text{tang}\frac{1}{2}BP$ est constant. Prenons un cône ayant ce petit cercle pour base, et le centre de la sphère pour sommet; en coupant ce cône par un plan, on voit que : Si par un point p pris dans le plan d'une conique, on mène une sécante qui rencontre la conique en a et b, le produit des tangentes des moitiés des angles sous lesquels ap et bp sont vus du sommet du cône est constant. Cette propriété appartenant au sommet d'un cône droit, quelle que soit, du reste, la position du plan de la section faite dans ce cône, subsiste encore lorsque ce sommet coïncide avec le foyer de la section; on retombe ainsi sur la relation connue

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}afp.\text{tang}\tfrac{1}{2}bfp = \text{const.} \quad (225, \text{Ex. VIII}).$$

La projection orthogonale MM′ *d'une droite est égale au produit de cette droite* PQ *par le cosinus de l'angle compris entre cette droite et sa projection* (*).

Cela est évident, comme on peut le voir en se reportant à la *fig.* 3, où MM′ est la projection de PQ.

Corollaire I. — Le rapport entre des droites parallèles et leurs projections orthogonales est constant.

Corollaire II. — Les droites parallèles au plan de projection se projettent en vraie grandeur.

L'aire d'une figure plane est dans un rapport constant avec l'aire de sa projection orthogonale.

Prenons les ordonnées de la figure perpendiculairement à l'intersection du plan de cette figure et du plan de projection; les ordonnées de la projection seront perpendiculaires à cette intersection; leur rapport avec celles de la figure sera constant et égal à celui du cosinus de l'angle des plans à l'unité. Et on sait (ce que nous prouverons au n° 394) que, lorsque deux figures sont telles, que les ordonnées de l'une soient dans un rapport constant avec les ordonnées de l'autre, les aires de ces figures sont entre elles dans le même rapport.

Le cercle peut être considéré comme la projection orthogonale d'une ellipse.

Prenons pour plan de projection le plan conduit suivant une parallèle au petit axe de l'ellipse et faisant avec le plan de l'ellipse un angle dont le cosinus est égal à $\frac{b}{a}$; les droites parallèles au petit axe se projettent en vraie grandeur, celles parallèles au grand axe sont diminuées dans le rapport de b à a; la projection de l'ellipse est donc (163) un cercle de rayon b.

369. Appliquons les principes précédents à la solution du problème donné dans l'Exercice VII du n° 231 : Trouver le

(*) Ou, ce qui revient au même, de l'angle fait par la droite avec le plan de projection

rayon R du cercle circonscrit à un triangle inscrit dans une conique.

Soient α, β, γ les côtés du triangle, A son aire; la géométrie élémentaire fournit la relation

$$R = \frac{\alpha\beta\gamma}{4A}.$$

Si l'on projette l'ellipse suivant un cercle de rayon b, et que l'on désigne par α', β', γ', A' les projections des côtés et de l'aire du triangle, il vient

$$b = \frac{\alpha'\beta'\gamma'}{4A'}.$$

Mais, les droites parallèles étant dans un rapport constant avec leurs projections, on aura également

$$\alpha' : \alpha :: b : b', \quad \beta' : \beta :: b : b'', \quad \gamma' : \gamma :: b : b''',$$

en représentant par b', b'', b''' les diamètres conjugués parallèles à α, β, γ.

Les aires A et A' sont liées d'ailleurs par la proportion (368)

$$A' : A :: b : a.$$

Donc

$$\frac{\alpha'\beta'\gamma'}{4A'} : \frac{\alpha\beta\gamma}{4A} :: ab^2 : b'b''b'''.$$

Par suite,

$$R = \frac{b'b''b'''}{ab} \ (^*).$$

(*) Cette démonstration du théorème de Mac-Cullagh est due au Dr Graves.



CHAPITRE XVIII.

INVARIANTS ET COVARIANTS DES SYSTÈMES DE CONIQUES.

370. Nous avons démontré (250) que lorsque S et S′ représentent deux coniques, il y a trois valeurs de k pour lesquelles $kS + S'$ représente un couple de droites. Soient

$$S = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0,$$
$$S' = a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 + 2f'y^2 + 2g'zx + 2h'xy = 0$$

les équations des deux coniques, et

$$\Delta = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2,$$
$$\Delta' = a'b'c' + 2f'g'h' - a'f'^2 - b'g'^2 - c'h'^2$$

leurs discriminants. Ces valeurs de k sont données par l'équation du troisième degré

$$\Delta k^3 + \Theta k^2 + \Theta' k + \Delta' = 0,$$

obtenue en remplaçant, dans la relation $\Delta = 0$, $a, b, \ldots$ par $a + ka'$, $b + kb'$, ...

En effectuant les calculs on trouve pour Θ l'expression

$$(bc - f^2)a' + (ca - g^2)b' + (ab - h^2)c'$$
$$+ 2(gh - af)f' + 2(hf - bg)g' + 2(fg - ch)h',$$

ou, en employant la notation du n° 151,

$$Aa' + Bb' + Cc' + 2Ff' + 2Gg' + 2Hh',$$

ou bien, d'après le théorème de Taylor,

$$a'\frac{d\Delta}{da} + b'\frac{d\Delta}{db} + c'\frac{d\Delta}{dc} + f'\frac{d\Delta}{df} + g'\frac{d\Delta}{dg} + h'\frac{d\Delta}{dh}.$$

On a d'ailleurs

$$\Theta' = A'a + B'b + C'c + 2F'f + 2G'g + 2H'h,$$

comme on peut le voir, en permutant les accents dans l'expression de Θ.

Si l'on élimine k entre l'équation $kS + S' = 0$, et celle du troisième degré en k, l'équation résultante

$$\Delta S'^3 - \Theta S'^2 S + \Theta' S' S^2 - \Delta' S^3 = 0,$$

qui est évidemment du sixième degré, représente les trois couples de droites qui joignent les quatre points d'intersection des deux coniques (238).

EXERCICE.

Trouver le lieu de l'intersection des normales menées à une conique par les extrémités d'une corde qui tourne autour d'un point fixe (α, β).

L'équation de la conique étant $S = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, les points dont les normales se coupent en un point donné (x', y') se trouvent à l'intersection de S avec l'hyperbole, $S' = 2\,(c^2xy + b^2y'x - a^2x'y) = 0$ (181, Ex. I). Ce qui précède permet de former l'équation des six cordes joignant les pieds des normales menées par (x', y'); et en exprimant qu'elle est vérifiée par α, β on obtiendra l'équation du lieu cherché. D'ailleurs on a

$$\Delta = -\frac{1}{a^2b^2}, \quad \Theta = 0, \quad \Theta' = -(a^2x'^2 + b^2y'^2 - c^4),$$
$$\Delta' = -2a^2b^2c^2x'y'.$$

Par suite, le lieu a pour équation

$$\frac{8}{a^2b^2}(a^2\beta x - b^2\alpha y - c^2\alpha\beta)^3$$
$$+ 2(a^2x^2 + b^2y^2 - c^4)(a^2\beta x - b^2\alpha y - c^2\alpha\beta)\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1\right)^2$$
$$+ 2a^2b^2c^2xy\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1\right)^3 = 0,$$

qui représente une courbe du troisième degré. Cette courbe se réduit à une conique lorsque le point donné est sur l'un des axes (ce qui revient à faire $\alpha = 0$ dans l'équation précédente), et alors l'axe fait partie du lieu, comme on peut du reste le voir géométriquement. Elle se réduit encore

à une conique lorsque le point est situé à l'infini, c'est-à-dire lorsqu'on demande le lieu de l'intersection des normales menées aux extrémités des cordes parallèles à une droite donnée.

371. Lorsqu'en passant d'un système d'axes de coordonnées (cartésiennes ou trilinéaires) à un autre, S et S′ se transforment en $\overline{S}$ et $\overline{S'}$, $kS + S'$ devient évidemment $k\overline{S} + \overline{S'}$, et le coefficient k reste invariable. Les valeurs de k pour lesquelles $kS + S'$ représente des lignes droites est donc indépendant des axes auxquels S et S′ sont rapportés; par suite le rapport entre deux quelconques des coefficients de l'équation du troisième degré qui détermine k (370) est constant, quelle que soit la transformation que l'on ait fait subir aux axes (*).

Les quantités Δ, Θ, Θ', Δ' s'appellent, pour cette raison, les *invariants* du système des coniques S et S′. Si donc, après avoir ramené à leurs formes les plus simples les équations de deux coniques S et S′, on arrive à une relation homogène entre Δ, Θ, Θ', Δ', on peut affirmer que la même relation subsiste, quelle que soit la position des axes de coordonnées. Il est dès lors possible d'exprimer, en fonction de ces quatre quantités, la condition nécessaire pour que deux coniques soient assujetties à une relation indépendante du choix des axes.

Les exercices suivants sont relatifs au calcul des invariants dans quelques cas d'un emploi fréquent.

EXERCICES.

I. Calculer les invariants de deux coniques rapportées à leur triangle autopolaire commun.

(*) Il est facile de voir, en effectuant les calculs de transformation, que si dans S et S′ on remplace x, y, z par

$$lx + my + nz, \quad l'x + m'y + n'z, \quad l''x + m''y + n''z,$$

les quantités Δ, Θ, Θ', Δ', relatives aux nouveaux axes, se déduisent des quantités correspondantes relatives aux anciens, en les multipliant respectivement par le carré du déterminant

$$\begin{vmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \\ l'' & m'' & n'' \end{vmatrix}.$$

Les équations des coniques sont alors

$$S = ax^2 + by^2 + cz^2, \quad S' = a'x^2 + b'y^2 + c'z^2.$$

Si, pour simplifier, on y remplace x, y, z par $x\sqrt{a'}$, $y\sqrt{b'}$, $z\sqrt{c'}$, de manière à ramener S' à la forme $x^2 + y^2 + z^2$, elles deviennent

$$S = ax^2 + by^2 + cz^2, \quad S' = x^2 + y^2 + z^2,$$

et on a

$$\Delta = abc, \quad \Theta = bc + ca + ab, \quad \Theta' = a + b + c \quad \Delta' = 1.$$

L'équation $S + kS' = 0$ représente deux droites pour les valeurs de k données par

$$k^3 + k^2(a + b + c) + k(bc + ca + ab) + abc = 0,$$

c'est-à-dire lorsque k est égal à l'une des trois quantités $-a$, $-b$, $-c$.

II. S' représente, comme plus haut, $x^2 + y^2 + z^2$, et S l'équation générale; calculer les invariants.

Rép. $\Theta = (bc - f^2) + (ca - g^2) + (ab - h^2) = A + B + C;$

$$\Theta' = a + b + c.$$

III. Lorsque S et S' représentent les deux cercles $x^2 + y^2 - r^2$, $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - r'^2$, on a pour les invariants

$$\Delta = -r^2, \quad \Theta = \alpha^2 + \beta^2 - 2r^2 - r'^2, \quad \Theta' = \alpha^2 + \beta^2 - r^2 - 2r'^2, \quad \Delta' = -r'^2.$$

Et si D est la distance des centres des deux cercles, $S + kS'$ représente un couple de droites pour les valeurs de k vérifiant l'équation

$$r^2 + (2r^2 + r'^2 - D^2)k + (r^2 + 2r'^2 - D^2)k^2 + r'^2k^3 = 0.$$

Mais comme $S - S'$ représente deux droites (dont l'une est située à l'infini), il est évident que -1 est une des valeurs de k, et $k + 1$ un diviseur du premier membre de l'équation. En effectuant le calcul, on a, pour déterminer les deux autres valeurs de k,

$$r^2 + (r^2 + r'^2 - D^2)k + r'^2k^2 = 0.$$

IV. S représente la conique

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1.$$

S' le cercle

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-r^2,$$

calculer les invariants.

Rép. $\Delta = -\frac{1}{a^2b^2}$, $\Theta = \frac{1}{a^2b^2}(\alpha^2+\beta^2-a^2-b^2-r^2)$,

$$\Theta' = \frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}-1-r^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right), \quad \Delta' = -r^2.$$

V. S représentant la parabole y^2-4mx, S' le même cercle qu'à l'Exercice IV, on demande les invariants.

Réponse.

$\Delta = -4m^2$, $\Theta = -4m(\alpha+m)$, $\Theta' = \beta^2-4m\alpha-r^2$, $\Delta' = -r^2$.

372. *Trouver la condition pour que deux coniques* S *et* S' *soient tangentes.*

Lorsque deux des quatre points d'intersection de deux coniques coïncident, il en est de même de deux des trois couples de cordes d'intersection, et l'équation du troisième degré

$$\Delta k^3+\Theta k^2+\Theta' k+\Delta' = 0$$

admet deux racines égales; on a ainsi, pour exprimer que les deux coniques se touchent, la relation

$$(\Theta\Theta'-9\Delta\Delta')^2 = 4(\Theta^2-3\Delta\Theta')(\Theta'^2-3\Delta'\Theta),$$

qui peut encore s'écrire de la manière suivante :

$$\Theta^2\Theta'^2+18\Theta\Theta'\Delta\Delta'-27\Delta^2\Delta'^2-4\Delta\Theta'^3-4\Delta'\Theta^3 = 0.$$

En se reportant à la théorie générale des équations, on voit que le premier membre est proportionnel au produit des carrés des différences des racines de l'équation en k. Cette équation a donc toutes ses racines réelles s'il est positif, et une seule s'il est négatif. Dans ce dernier cas (*voir* n° 282), S et S' se coupent en deux points réels et deux points imaginaires, tandis que dans le premier S et S' se coupent en quatre points réels, ou quatre points imaginaires.

EXERCICES.

I. Trouver par cette méthode la condition pour que deux cercles se touchent.

La condition pour que l'équation réduite

$$r^2 + (r^2 + r'^2 - D^2)k + r'^2 k^2 = 0$$

(371, Ex. III) ait ses racines égales est $r^2 + r'^2 - D^2 = \pm 2rr'$, ce qui donne la solution bien connue $D = r \pm r'$.

II. Trouver le lieu décrit par le centre d'un cercle de rayon constant tangent à une conique donnée.

Il suffit de remplacer dans l'équation de ce numéro les quantités Δ, Θ, Θ', Δ' par leurs valeurs données au n° 371, Ex. IV et V, en considérant α et β comme les coordonnées courantes. Le lieu est en général du huitième degré, et se réduit au sixième dans le cas de la parabole. Il est du reste le même que celui qu'on obtiendrait en prenant sur toutes les normales à la conique des longueurs égales au rayon r du cercle à partir de la conique.

On l'appelle quelquefois *courbe parallèle* à la conique, et il a même développée que cette conique.

La courbe parallèle à la parabole $y^2 = 4mx$ a pour équation

$$\begin{aligned}
&r^6 - (3y^2 + x^2 + 8mx - 8m^2)r^4 \\
&+ [3y^4 + y^2(2x^2 - 2mx + 20m^2) + 8mx^3 + 8m^2x^2 - 32m^3x + 16m^4]r^2 \\
&\qquad - (y^2 - 4mx)^2[y^2 + (x - m)^2] = 0
\end{aligned}$$

et la courbe parallèle à l'ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ est donnée par

$$\begin{aligned}
&c^4 r^8 - 2c^2 r^6[c^2(a^2 + b^2) + (a^2 - 2b^2)x^2 + (2a^2 - b^2)y^2] \\
&\quad + r^4[c^4(a^4 + 4a^2b^2 + b^4) - 2c^2(a^4 - a^2b^2 + 3b^4)x^2 \\
&\qquad + 2c^2(3a^4 - a^2b^2 + b^4)y^2 + (a^4 - 6a^2b^2 + 6b^4)x^4 \\
&\qquad + (6a^4 - 6a^2b^2 + b^4)y^4 + (6a^4 - 10a^2b^2 + 6b^4)x^2y^2] \\
&\quad + r^2[-2a^2b^2c^4(a^2 + b^2) + 2c^2x^2(3a^4 - a^2b^2 + b^4) \\
&\qquad - 2c^2y^2(a^4 - a^2b^2 + 3b^4) - b^2x^4(6a^4 - 10a^2b^2 + 6b^4) \\
&\qquad - a^2y^4(6a^4 - 10a^2b^2 + 6b^4) \\
&\qquad + x^2y^2(4a^6 - 6a^4b^2 - 6a^2b^4 + 4b^6) + 2b^2(a^2 - 2b^2)x^6 \\
&\qquad - 2(a^4 - a^2b^2 + 3b^4)x^4y^2 - 2(3a^4 - a^2b^2 + b^4)x^2y^4 \\
&\qquad\qquad + 2a^2(b^2 - 2a^2)y^6] \\
&\quad + [b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2]^2[(x - c)^2 + y^2][(x + c)^2 + y^2] = 0.
\end{aligned}$$

On peut aussi considérer ces équations comme servant à déterminer la distance d'un point à la conique, cette distance étant mesurée suivant la normale. Ainsi, le lieu des points tels, que la somme des carrés de leurs

distances normales à la conique soit constante est une conique. La condition pour que l'équation en r^2 ait des racines égales s'obtient en égalant à zéro le produit du carré des axes par le cube de l'équation de la développée.

En faisant $r = 0$, on voit que les foyers peuvent être considérés comme des points dont la distance normale à la conique est nulle; ce qu'on peut expliquer, en se rappelant que la distance de l'origine à un point quelconque de l'une ou de l'autre des droites $x^2 + y^2 = 0$ est nulle.

III. Trouver l'équation de la développée de l'ellipse.

Les deux normales qu'on peut mener à la conique par un point de la développée étant infiniment voisines, nous trouverons l'équation du lieu en exprimant que les deux coniques S et S' de l'Exercice du n° 370 se touchent. L'équation en k, $\Delta k^3 + \Theta' k + \Delta' = 0$, n'ayant pas alors de deuxième terme, la condition pour qu'elle ait deux racines égales se réduit à $27\Delta\Delta'^2 + 4\Theta'^3 = 0$, ce qui donne pour l'équation de la développée

$$(a^2x^2 + b^2y^2 - c^4)^3 + 27a^2b^2c^4x^2y^2 = 0. \text{ (\textit{Voir} le n° 248.)}$$

IV. Trouver l'équation de la développée de la parabole.

On a

$$S = y^2 - 4mx, \quad S' = 2xy + 2(2m - x')y - 4my'$$
$$\Delta = -4m^2, \quad \Theta = 0, \quad \Theta' = -4m(2m - x), \quad \Delta' = 4my.$$

et par suite pour l'équation cherchée

$$27my^2 = 4(x - 2m)^3.$$

Il faut observer que les intersections de S et S' comprennent non-seulement les pieds des *trois* normales qu'on peut mener par un point à une conique, mais encore un point situé à l'infini sur l'axe des x. Les six cordes d'intersection de S et S' comprennent donc trois cordes et trois parallèles à l'axe menées par les pieds des normales. La méthode employée (370) n'est donc pas la plus simple pour résoudre le problème dans le cas de la parabole; l'équation qu'elle fournit n'est autre que celle donnée au n° 227, Ex. XII, multipliée par le facteur

$$4m(2my + y'x - 2my') - y'^2.$$

373. Lorsque S' représente deux droites, on a $\Delta' = 0$. Pour savoir ce que signifient alors Θ et Θ', on peut supposer que ces droites sont $x = 0$ et $y = 0$, puisque, en vertu du principe énoncé plus haut, les propriétés des invariants sont indépendantes des lignes de référence. Le discriminant de $S + kxy$,

qui s'obtient en remplaçant h par $h+k$ dans Δ, est égal à $\Delta + 2k(fg - ch) - ck^2$; le coefficient de k^2 s'évanouit pour $c = 0$, c'est-à-dire lorsque le point (x, y) se trouve sur la conique S; celui de k s'annule lorsque $fg = ch$, autrement dit (228, Ex. III) lorsque les lignes x et y sont conjuguées par rapport à S. Donc : *Lorsque S' représente deux droites, Δ' est nul ; la condition $\Theta' = 0$ exprime que l'intersection des deux droites se trouve sur* S, *et $\Theta = 0$ que les deux droites sont conjuguées* (293) *par rapport à* S.

L'équation $\Theta'^2 = 4\Delta\Theta'$, vérifiée lorsque $\Delta + \Theta k + \Theta' k^2$ est un carré parfait, exprime (372) la condition qu'une des droites représentées par S' est tangente à S. On peut, du reste, le voir facilement sur l'exemple précédent, où l'on a

$$\Theta'^2 - 4\Delta\Theta' = (bc - f^2)(ca - g^2).$$

EXERCICES.

I. Étant données cinq coniques $S_1, S_2, \ldots$, il est toujours possible d'une infinité de manières de déterminer les constantes $l_1, l_2, \ldots$ de telle sorte que l'expression

$$l_1 S_1 + l_2 S_2 + l_3 S_3 + l_4 S_4 + l_5 S_5$$

soit ou un carré parfait L^2, ou un produit MN de deux facteurs linéaires M et N; démontrer que les droites L enveloppent une conique fixe V, par rapport à laquelle les droites M et N sont conjuguées.

On peut déterminer V de telle sorte que les invariants Θ correspondant à V et à chacune des cinq coniques données soient nuls, puisque pour exprimer ces conditions on obtient cinq équations de la forme

$$Aa_1 + Bb_1 + Cc_1 + 2Ff_1 + 2Gg_1 + 2Hh_1 = 0,$$

qui suffisent pour faire connaître les rapports mutuels des coefficients A, B, ... de l'équation tangentielle de V. On a ainsi

$$Aa_1 + \ldots = 0, \quad Aa_2 + \ldots = 0, \ldots, \quad Aa_5 + \ldots = 0,$$

par suite

$$A(l_1 a_1 + l_2 a_2 + l_3 a_3 + l_4 a_4 + l_5 a_5) + \ldots = 0,$$

autrement dit, l'invariant Θ de V et de chacune des coniques du système

$$l_1 S_1 + l_2 S_2 + l_3 S_3 + l_4 S_4 + l_5 S_5 = 0$$

est nul; ce qui démontre le théorème. Lorsque la droite M est donnée, N passe par un point fixe qui est le pôle de M par rapport à V.

II. Lorsque six droites x, y, z, u, v, w sont tangentes à une conique, les carrés $x^2, y^2, \ldots$ vérifient la relation linéaire

$$l_1 x^2 + l_2 y^2 + l_3 z^2 + l_4 u^2 + l_5 v^2 + l_6 w^2 = 0.$$

Ce théorème est un cas particulier de celui de l'Exercice I, mais peut se démontrer de la manière suivante. Si l'on exprime (151) que les six droites $(\lambda x + \mu y + \nu)$ sont tangentes à une conique, on obtient six équations qui permettent d'éliminer les coefficients A, B, C, ... et la condition pour que ces droites soient tangentes à une même conique peut se mettre sous la forme

$$\begin{vmatrix} \lambda_1^2 & \mu_1^2 & \nu_1^2 & \mu_1\nu_1 & \nu_1\lambda_1 & \lambda_1\mu_1 \\ \lambda_2^2 & \mu_2^2 & \nu_2^2 & \mu_2\nu_2 & \nu_2\lambda_2 & \lambda_2\mu_2 \\ \lambda_3^2 & \mu_3^2 & \nu_3^2 & \mu_3\nu_3 & \nu_3\lambda_3 & \lambda_3\mu_3 \\ \lambda_4^2 & \mu_4^2 & \nu_4^2 & \mu_4\nu_4 & \nu_4\lambda_4 & \lambda_4\mu_4 \\ \lambda_5^2 & \mu_5^2 & \nu_5^2 & \mu_5\nu_5 & \nu_5\lambda_5 & \lambda_5\mu_5 \\ \lambda_6^2 & \mu_6^2 & \nu_6^2 & \mu_6\nu_6 & \nu_6\lambda_6 & \lambda_6\mu_6 \end{vmatrix} = 0,$$

qui exprime aussi que les carrés indiqués vérifient une relation linéaire.

III. Lorsqu'on se donne seulement quatre coniques S_1, S_2, S_3, S_4, et que l'on cherche à déterminer une conique V, comme dans l'Exercice I, de telle sorte que les invariants Θ soient nuls, on n'obtient que quatre conditions, et un des coefficients de l'équation tangentielle de V reste indéterminé; en exprimant les autres coefficients en fonctions de ce dernier, on peut mettre l'équation tangentielle de V sous la forme $\Sigma + k\Sigma' = 0$, qui représente une conique tangente à quatre droites fixes. Nous démontrerons directement, plus tard, qu'on peut trouver quatre systèmes de constantes telles, que l'expression $l_1 S_1 + l_2 S_2 + l_3 S_3 + l_4 S_4$ soit un carré parfait.

Il est facile de voir, en prenant pour M la droite à l'infini, que lorsque M est une droite donnée, le problème de déterminer les constantes $l_1, l_2 \ldots$ de telle sorte que l'expression $l_1 S_1 + \ldots$ soit de la forme MN, admet une solution et n'en admet qu'une seule : le théorème de l'Exercice I montre alors que N est le lieu du pôle de M par rapport à V. Comparer à ce résultat celui de l'Exercice VIII du n° 228.

374. *Trouver l'équation du couple des tangentes menées à S aux points où cette conique est coupée par la droite* $\lambda x + \mu y + \nu z$. — L'équation d'une conique, qui a un double

contact avec S, aux points où S rencontre cette droite, étant $kS + (\lambda x + \mu y + \nu z)^2 = 0$, tout se réduit à déterminer k de telle sorte que cette équation représente deux droites, et il est facile de voir que, dans ce cas, non-seulement Δ', mais encore Θ', s'évanouit. Si l'on pose

$$\Sigma = A\lambda^2 + B\mu^2 + C\nu^2 + 2F\mu\nu + 2G\nu\lambda + 2H\lambda\mu,$$

deux des valeurs de k étant nulles, la troisième sera donnée par

$$k\Delta + \Sigma = 0.$$

L'équation du couple de tangentes est donc

$$\Sigma S = \Delta(\lambda x + \mu y + \nu z)^2.$$

Lorsque la droite $\lambda x + \mu y + \nu z$ est tangente à S, le couple de tangentes coïncide avec cette droite, on a alors $\Sigma = 0$ (151).

Le problème qui précède renferme comme cas particulier la détermination de l'équation des asymptotes d'une conique définie par l'équation générale, en coordonnées trilinéaires.

375. *Interprétation géométrique de l'équation* $\Theta = 0$ *dans le cas le plus général.* — Prenons pour triangle de référence un triangle autopolaire par rapport à S; l'équation de S est alors de la forme $ax^2 + by^2 + cz^2$ (258), et l'on a à la fois $f = 0$, $g = 0$, $h = 0$. La valeur de Θ (370) se réduit à $bca' + cab' + abc'$ et devient nulle lorsqu'on a $a' = 0$, $b' = 0$, $c' = 0$, c'est-à-dire si l'équation de S' rapportée au même triangle est de la forme $f'yz + g'zx + h'xy$. Donc : Θ *devient nul toutes les fois qu'un triangle inscrit dans* S' *est autopolaire par rapport à* S.

En prenant pour triangle de référence un triangle autopolaire par rapport à S', on a $f' = 0$, $g' = 0$, $h' = 0$, et la valeur de Θ, qui est alors

$$(bc - f^2)a' + (ca - g^2)b' + (ab - h^2)c',$$

ne peut devenir nulle que si l'on a $bc = f^2$, $ca = g^2$, $ab = h^2$; si l'on observe que la relation $bc = f^2$ exprime que la droite x est tangente à S, on voit que Θ *s'annule encore quand un triangle circonscrit à* S *est autopolaire par rapport à* S'.

On démontrerait de même que $\Theta' = 0$ *exprime qu'il est possible, soit d'inscrire dans* S *un triangle autopolaire par rapport à* S', *soit de circonscrire à* S' *un triangle autopolaire par rapport à* S, et si l'une de ces constructions est possible, l'autre l'est également.

Deux coniques liées entre elles par la condition $\Theta = 0$ possèdent encore d'autres propriétés. Appelons *pôle d'un triangle* par rapport à une conique le point de concours des droites qui joignent les sommets d'un triangle aux sommets correspondants de son triangle polaire par rapport à cette conique; et *axe* du triangle la droite qui passe par les intersections des côtés correspondants des mêmes triangles.

Lorsque $\Theta = 0$, *le pôle par rapport à* S *d'un triangle inscrit dans* S' *se trouve sur* S'; *et l'axe par rapport à* S' *d'un triangle circonscrit à* S *est tangent à* S. En effet, en éliminant successivement x, y, z entre les équations

$$\begin{aligned} ax + hy + gz &= 0,\\ hx + by + fz &= 0,\\ gx + fy + cz &= 0, \end{aligned}$$

on trouve

$$(gh - af)x = (hf - bg)y = (fg - ch)z$$

pour les équations des droites qui joignent les sommets du triangle xyz aux sommets correspondants de son triangle polaire par rapport à S. Ces équations peuvent se mettre sous la forme $Fx = Gy = Hz$, ce qui donne pour les coordonnées du pôle du triangle $\frac{1}{F}, \frac{1}{G}, \frac{1}{H}$. En substituant ces valeurs dans S' on arrive, puisque les coefficients a', b', c' sont nuls, à l'équation

$$2Ff' + 2Gg' + 2Hh' = 0,$$

c'est-à-dire à $\Theta = 0$.

On démontrerait de la même manière la seconde partie du théorème.

EXERCICES.

I. Lorsque deux triangles sont autopolaires par rapport à une conique S', leurs six sommets sont sur une conique, et leurs six côtés sont tangents à une autre conique (356, Ex. VII).

Faisons passer une conique par les trois sommets du premier triangle, et par deux des sommets du second que nous prendrons pour triangle de référence xyz. Cette conique étant circonscrite au premier triangle, on a $\Theta' = 0$, c'est-à-dire $a + b + c = 0$ (371, Ex. II); et comme elle passe par deux des sommets de xyz, on a $a = 0$, $b = 0$, et par suite $c = 0$; elle passe donc par le troisième sommet du deuxième triangle. La deuxième partie du théorème se démontre de la même manière.

II. Le carré de la tangente menée du centre d'une conique au cercle circonscrit à un triangle autopolaire est constant et égal à $a^2 + b^2$ (M. Faure).

Ce théorème n'est que l'interprétation géométrique de la condition $\Theta = 0$, appliquée à la valeur $\alpha^2 + \beta^2 - r^2 - a^2 - b^2$ trouvée pour Θ au n° 371, Ex. IV. Il peut encore s'énoncer de la manière suivante : Tout cercle circonscrit à un triangle autopolaire coupe orthogonalement le cercle, lieu des sommets des angles droits circonscrits à la conique. En effet, le carré du rayon de ce dernier cercle est égal à $a^2 + b^2$.

III. Le centre du cercle inscrit dans un triangle autopolaire par rapport à une hyperbole équilatère se trouve sur la courbe.

Il suffit pour le démontrer de faire $b^2 = -a^2$ dans la condition $\Theta' = 0$, Θ' ayant la valeur donnée au n° 371, Ex. IV.

IV. Si le rectangle construit sur les segments d'une des hauteurs d'un triangle circonscrit à une conique est constant et égal à M, le lieu du point de concours des hauteurs est le cercle $x^2 + y^2 = a^2 + b^2 + M$.

La condition pour qu'un triangle autopolaire par rapport à un cercle soit circonscrit à S s'obtient en égalant à zéro la valeur de Θ trouvée au n° 371, Ex. IV. D'ailleurs, lorsqu'un triangle est autopolaire par rapport à un cercle, le centre du cercle est le point de concours des hauteurs du triangle (278, Ex. III) et le carré du rayon est égal au rectangle construit sur les segments d'une des hauteurs (pris avec le signe + si le triangle est obtusangle, et avec le signe − s'il est acutangle). En faisant dans l'équation précédente $M = 0$, on retombe sur le lieu décrit par le sommet des angles droits circonscrits.

V. Si le rectangle construit sur les segments d'une des hauteurs d'un

triangle inscrit dans S est constant et égal à M, le lieu de l'intersection des hauteurs est une conique $S = M\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)$ semblable et concentrique à S (Dr Hart).

Ce théorème se démontre comme le précédent, en partant de la relation $\Theta' = 0$.

VI. Trouver le lieu de l'intersection des hauteurs d'un triangle inscrit dans une conique et circonscrit à une autre (M. Burnside).

Prenons pour origine le centre de la dernière conique et égalons les valeurs de M trouvées aux Exercices IV et V; si a' et b' sont les axes de la conique S circonscrite au triangle, le lieu a pour équation

$$x^2 + y^2 - a^2 - b^2 = \frac{a'^2 b'^2}{a'^2 + b'^2} S,$$

qui représente une conique dont les axes sont parallèles à ceux de S. Le lieu est un cercle lorsque S est un cercle.

VII. Le centre du cercle circonscrit à un triangle autopolaire par rapport à une parabole se trouve sur la directrice.

Ce théorème et le suivant se démontrent en égalant à zéro la valeur trouvée pour Θ au n° 371, Ex. V.

VIII. Le point de concours des hauteurs d'un triangle circonscrit à une parabole se trouve sur la directrice.

IX. Le lieu du centre du cercle de rayon constant inscrit dans un triangle autopolaire par rapport à une parabole est une parabole de même paramètre.

376. On ne peut pas, en général, tracer un triangle inscrit dans une conique et circonscrit à une autre, lorsque ces deux coniques sont prises arbitrairement; mais on peut en tracer une infinité lorsque les coefficients de leurs équations satisfont à une certaine relation que nous allons déterminer. Supposons qu'un pareil triangle soit tracé, et prenons-le pour triangle de référence; les équations des coniques peuvent alors se ramener aux formes suivantes :

$$S = x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2xz - 2xy = 0,$$
$$S' = 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0,$$

et en calculant les invariants, il vient

$$\Delta = -4,\ \Theta = 4(f+g+h),\ \Theta' = -(f+g+h)^2,\ \Delta' = 2fgh,$$

ce qui donne

$$\Theta^2 = 4\Delta\Theta' \ (^*).$$

Cette équation est du genre (371) de celles qui sont indépendantes du choix des axes de coordonnées; elle subsiste donc entre les coefficients des équations des coniques, quelle que soit leur forme primitive, pourvu que, par une transformation convenable, on puisse les ramener au type indiqué plus haut. Il est du reste facile de voir (comme au n° 375, Ex. I) que deux des sommets d'un triangle circonscrit à S se trouvant sur S', il en est de même du troisième, lorsque la relation $\Theta^2 = 4\Delta\Theta'$ est satisfaite.

EXERCICES.

I. Trouver la condition à laquelle doivent satisfaire deux cercles pour qu'on puisse tracer un triangle inscrit dans l'un et circonscrit à l'autre.

Si l'on pose $D^2 - r^2 - r'^2 = G$, on a pour la condition cherchée (371, Ex. III)

$$(G - r^2)^2 + 4r^2(G - r'^2) = 0 \quad \text{ou} \quad (G + r^2)^2 = 4r^2r'^2;$$

par suite, $D^2 = r'^2 \pm 2rr'$: c'est la formule connue d'Euler pour exprimer

(*) Cette condition a été indiquée pour la première fois par M. Cayley (*Philosophical Magazine*, t. VI, p. 99), qui l'a déduite de la théorie des fonctions elliptiques. M. Cayley a démontré aussi, par le même procédé, que si la racine carrée de $k^3\Delta + k^2\Theta + k\Theta' + \Delta'$, développée suivant les puissances de k, était de la forme $A + Bk + Ck^2 + \ldots$, les conditions pour qu'on puisse tracer un polygone de n côtés inscrit dans U et circonscrit à V étaient respectivement dans le cas de $n = 3, 5, 7, \ldots$,

$$C = 0, \quad \begin{vmatrix} C & D \\ D & E \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} C & D & E \\ D & E & F \\ E & F & G \end{vmatrix} = 0, \ldots;$$

et dans le cas de $n = 4, 6, 8, \ldots$,

$$D = 0, \quad \begin{vmatrix} D & E \\ E & F \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} D & E & F \\ E & F & G \\ F & G & H \end{vmatrix} = 0, \ldots.$$

la distance du centre du cercle circonscrit à un triangle à celui d'un des cercles inscrits.

II. Trouver le lieu du centre d'un cercle de rayon donné passant par les sommets d'un triangle circonscrit à une conique, ou tangent aux côtés d'un triangle inscrit dans une conique.

Ces lieux sont en général du quatrième degré. Lorsque la conique est une parabole, le lieu du centre du cercle circonscrit se réduit à un cercle ayant le foyer pour centre.

III. Trouver la condition pour qu'on puisse inscrire dans S' un triangle dont les côtés soient respectivement tangents à $S + lS'$, $S + mS'$, $S + nS'$.

Si l'on pose

$$S = x^2 + y^2 + z^2 - 2(1 + lf)yz - 2(1 + mg)zx - 2(1 + nh)xy,$$
$$S' = 2fyz + 2gzx + 2hxy,$$

la conique $S + lS'$ est évidemment tangente à la droite $x, \ldots,$ et on a

$$\Delta = -(2 + lf + mg + nh)^2 - 2lmnfgh,$$
$$\Theta = 2(f + g + h)(2 + lf + mg + nh) + 2fgh(mn + nl + lm),$$
$$\Theta' = -(f + g + h)^2 - 2(l + m + n)fgh, \quad \Delta' = 2fgh;$$

d'où l'on tire, pour la condition cherchée,

$$[\Theta - \Delta'(mn + nl + lm)]^2 = 4(\Delta + lmn\Delta')[\Theta' + \Delta'(l + m + n)].$$

377. ***Trouver la condition pour que la droite $\lambda x + \mu y + \nu z$ passe par un des quatre points d'intersection de S et S'.***

Ce problème revient, en d'autres termes, à trouver l'équation tangentielle de ces quatre points. Pour former l'équation tangentielle d'une conique du système $S + kS'$, il suffit de remplacer $a, b, \ldots$ par $a + ka', b + kb', \ldots$ dans l'équation tangentielle de S, c'est-à-dire dans

$$\Sigma = (bc - f^2)\lambda^2 + (ca - g^2)\mu^2 + (ab - h^2)\nu^2$$
$$+ 2(gh - af)\mu\nu + 2(hf - bg)\nu\lambda + 2(fg - ch)\lambda\mu = 0.$$

On trouve ainsi

$$\Sigma + k\Phi + k^2\Sigma' = 0,$$

en désignant par Σ' l'équation tangentielle de S' et posant

$$\begin{aligned}\Phi = & (bc'+b'c-2ff')\lambda^2+(ca+c'a-2gg')\mu^2 \\ & +(ab'+a'b-2hh')\nu^2+2(gh'+g'h-af'-a'f)\mu\nu \\ & +2(hf'+h'f-bg'-b'g)\nu\lambda+2(fg'+f'g-ch'-c'h)\lambda\mu.\end{aligned}$$

L'équation tangentielle de l'enveloppe de ce système est donc (298)

$$\Phi^2 = 4\Sigma\Sigma'.$$

Mais puisque $S + kS'$ et l'équation tangentielle correspondante représentent un système de coniques passant par quatre points fixes, l'enveloppe du système n'est autre chose que ces quatre points, et l'équation $\Phi^2 = 4\Sigma\Sigma'$ est la condition cherchée pour que la droite $\lambda x + \mu y + \nu z$ passe par un des quatre points. On aurait pu obtenir ce résultat de la manière suivante. Par quatre points on peut, en général, faire passer deux coniques tangentes à une droite donnée (345, Ex. IV); mais quand la droite passe par l'un des quatre points, les deux coniques coïncident et se réduisent à une seule qui touche la droite en ce point. D'ailleurs, la relation $\Phi^2 = 4\Sigma\Sigma'$ exprime que les deux coniques du système $S + kS'$, qu'on peut mener tangentiellement à $\lambda x + \mu y + \nu z$, coïncident.

On peut observer que l'équation $\Phi = 0$ n'est autre chose que la condition obtenue au n° 335, pour exprimer que la droite $\lambda x + \mu y + \nu z$ est divisée harmoniquement par les deux coniques.

378. *Trouver l'équation des quatre tangentes communes à deux coniques.*

Ce problème est le réciproque de celui du numéro précédent et peut être résolu de la même manière. Si $\Sigma = 0$ et $\Sigma' = 0$ sont les équations tangentielles de deux coniques, $\Sigma + k\Sigma' = 0$ sera (298) celle d'une conique inscrite dans le quadrilatère formé par les quatre tangentes qui leur sont communes. L'équation trilinéaire correspondante à $\Sigma + k\Sigma' = 0$ sera, d'après le n° 285,

$$\Delta S + kF + k^2\Delta' S' = 0,$$

en posant

$$\begin{aligned}\mathrm{F} = & (BC' + B'C - 2FF')x^2 + (CA' + C'A - 2GG')y^2 \\ & + (AB' + A'B - 2HH')z^2 + 2(GH' + G'H - AF' - A'F)yz \\ & + 2(HF' + H'F - BG' - B'G)zx \\ & + 2(FG' + F'G - CH' - C'H)xy,\end{aligned}$$

et en conservant aux lettres A, B,... la signification indiquée au n° 151.

D'ailleurs $\Delta S + k\mathrm{F} + k^2\Delta' S' = 0$ représente un système de coniques ayant pour enveloppe

$$\mathrm{F}^2 = 4\Delta\Delta' SS',$$

et cette enveloppe n'est autre chose que le quadrilatère formé par les quatre tangentes communes.

D'après sa forme, l'équation $\mathrm{F}^2 = 4\Delta\Delta' SS'$ est celle d'un lieu tangent à S et S', la courbe F passant par les points de contact. Par suite, *les huit points de contact de deux coniques avec leurs tangentes communes sont sur une autre conique* F. Réciproquement : *Les huit tangentes menées aux points d'intersection de deux coniques enveloppent une autre conique* Φ.

L'équation $\mathrm{F} = 0$ est celle que nous avons obtenue au n° 334, pour le lieu des points tels, que les tangentes menées par un de ces points aux deux coniques forment un faisceau harmonique (*).

Lorsque S' se réduit à deux droites, F représente les deux tangentes menées à S par l'intersection de ces droites.

EXERCICE.

Trouver l'équation des quatre tangentes communes aux deux coniques

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0, \quad a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 = 0.$$

On a

$$A = bc, \quad B = ca, \quad C = ab,$$

(*) M. Salmon est le premier qui ait fait remarquer l'importance de cette conique dans la théorie des systèmes de deux courbes du deuxième degré.

par suite

$$F = aa'(bc' + b'c)x^2 + bb'(ca' + c'a)y^2 + cc'(ab' + a'b)z^2,$$

ce qui donne pour l'équation cherchée

$$[aa'(bc' + b'c)x^2 + bb'(ca' + c'a)y^2 + cc'(ab' + a'b)z^2]^2 = 4abc\,a'b'c'(ax^2 + by^2 + cz^2)(a'x^2 + b'y^2 + c'z^2).$$

379. Définissons maintenant d'une manière plus générale les fonctions indiquées dans les deux numéros précédents. Lorsqu'en partant des équations d'une courbe ou d'un système de courbes, on a formé celle d'un lieu $U = 0$, dont la relation avec les courbes données est indépendante des axes auxquels elles sont rapportées, on dit que U est un *covariant* du système donné. Pour écrire l'équation de ce lieu par rapport à de nouveaux axes, on peut suivre deux méthodes : 1° transformer directement l'équation $U = 0$; 2° transformer d'abord les équations des courbes du système et déduire de ces équations transformées celle du lieu en suivant la même règle que pour déduire $U = 0$ des équations primitives. Ces deux méthodes conduisent évidemment au même résultat. Ainsi, en substituant

$$lx + my + nz, \quad l'x + m'y + n'z, \quad l''x + m''y + n''z$$

à x, y, z dans l'équation (378)

$$F^2 = 4\Delta\Delta' SS',$$

pour la rapporter à un nouveau triangle de référence, on trouve, à un facteur constant près, le même résultat qu'en déduisant cette équation des nouveaux coefficients de S et S' transformés suivant la même substitution, cette équation représentant dans l'un et l'autre cas les quatre tangentes communes à S et S'; cette propriété sert de base à la définition analytique des covariants que nous donnons ici. Une fonction F, déduite d'une ou plusieurs fonctions données S, d'après une règle donnée, est un covariant, lorsqu'en transformant les variables de F suivant une substitution linéaire, on obtient, à un facteur constant près, le même résultat qu'en déduisant, d'après la

règle donnée, une nouvelle fonction des équations S transformées suivant la même substitution.

Les invariants et les covariants d'un système de courbes ont cela de commun que leur signification géométrique est indépendante des axes auxquels sont rapportées ces courbes; mais ils diffèrent en ce que les invariants ne sont fonctions que des coefficients, tandis que les covariants sont fonctions des coefficients et des variables.

380. Il est encore un autre cas dans lequel on peut prévoir la transformation obtenue par une substitution linéaire. Supposons que nous ayons formé la condition pour que la droite $\lambda x + \mu y + \nu z$ soit tangente à une courbe, ou, plus généralement, pour qu'elle soit liée à une courbe ou à un système de courbes par une relation indépendante des axes auxquels ces courbes sont rapportées; il est évident que si, pour changer de coordonnées, nous transformons les équations des courbes, la condition se formera au moyen de ces équations transformées, en suivant la même règle que celle employée pour la déduire des équations primitives. Mais l'expression de cette condition, par rapport aux nouveaux axes, peut aussi s'obtenir par une transformation directe de son expression primitive. Soit

$$\lambda(lx + my + nz) + \mu(l'x + m'y + n'z) + \nu(l''x + m''y + n''z)$$
$$= \lambda'x + \mu'y + \nu'z$$

ce que devient $\lambda x + \mu y + \nu z$ dans la transformation des courbes, on aura

$$\lambda' = l\lambda + l'\mu + \lambda''\nu, \quad \mu' = m\lambda + m'\mu + m''\nu,$$
$$\nu' = n\lambda + n'\mu + n''\nu;$$

par suite

$$\lambda = L\lambda' + L'\mu' + L''\nu', \quad \mu = M\lambda' + M'\mu' + M''\nu',$$
$$\nu = N\lambda' + N'\mu' + N''\nu',$$

et en introduisant ces valeurs dans la condition obtenue primitivement en fonction de λ, μ et ν, on trouvera en fonction

de λ', μ', ν', une expression de cette condition qui ne pourra différer que par un facteur constant de celle qu'on obtiendrait en partant des équations transformées des courbes. Les fonctions que nous venons de considérer s'appellent des *contrevariants*. Les contrevariants ont cela de commun avec les covariants, qu'un contrevariant, comme, par exemple, l'équation tangentielle d'une conique $(bc - f^2)\lambda^2 + \ldots = 0$, peut être ramené par transformation linéaire à une équation de même forme $(b'c' - f'^2)\lambda'^2 + \ldots = 0$, et dont les coefficients sont déduits de ceux de l'équation trilinéaire transformée de la conique. Mais ils diffèrent en ce que λ, μ et ν ne doivent pas être transformés en suivant la même règle que pour x, y, z, c'est-à-dire remplaçant λ par $l\lambda + m\mu + n\nu$, mais bien d'après la règle indiquée plus haut.

La condition, $\Phi = 0$ trouvée au n° 377, est évidemment un contrevariant du système des coniques S et S'.

381. Il est facile de voir que l'équation trilinéaire d'une conique covariante de S et S' peut s'exprimer en fonction de S, S' et F, tandis que son équation tangentielle peut s'exprimer en fonction de Σ, Σ', Φ.

EXERCICES.

I. Exprimer en fonction de S, S' et F l'équation de la conique polaire réciproque de S par rapport à S'.

Les invariants et les covariants étant, d'après leur nature même, indépendants du choix des lignes de référence, nous pouvons supposer les deux coniques S et S' rapportées à leur triangle autopolaire commun. On aura alors

$$S = ax^2 + by^2 + cz^2, \quad S' = x^2 + y^2 + z^2,$$

et, par suite,

$$F = a(b + c)x^2 + b(c + a)y^2 + c(a + b)z^2.$$

La relation $bc\lambda^2 + ca\mu^2 + ab\nu^2 = 0$ exprimant qu'une droite est tangente à S, le lieu du pôle de cette droite par rapport à S' aura pour équation

$$bcx^2 + cay^2 + abz^2 = 0,$$

ou bien

$$(bc + ca + ab)(x^2 + y^2 + z^2) = \mathbf{F},$$

c'est-à-dire (371, Ex. I)

$$\Theta S' = \mathbf{F}.$$

On trouverait de même, pour l'équation de la polaire réciproque de S' par rapport à S,

$$\Theta' S = \mathbf{F}.$$

II. Exprimer en fonction de S, S' et **F** la conique enveloppée par les droites que divisent harmoniquement S et S'.

Cette conique $\Phi = 0$ a pour équation tangentielle

$$(b + c)\lambda^2 + (c + a)\mu^2 + (a + b)\nu^2 = 0,$$

et, par suite, pour équation trilinéaire

$$(c + a)(a + b)x^2 + (a + b)(b + c)y^2 + (c + a)(b + c)z^2 = 0$$

ou

$$(bc + ca + ab)(x^2 + y^2 + z^2) + (a + b + c)(ax^2 + by^2 + cz^2) = \mathbf{F},$$

c'est-à-dire

$$\Theta S' + \Theta' S - \mathbf{F} = 0.$$

III. Trouver la condition pour que **F** représente deux droites.

Cette condition est exprimée par

$$abc(b + c)(c + a)(a + b) = 0,$$

ou

$$abc[(a + b + c)(bc + ca + ab) - abc] = 0,$$

ou bien

$$\Delta\Delta'(\Theta\Theta' - \Delta\Delta') = 0.$$

D'ailleurs $\Theta\Theta' = \Delta\Delta'$ exprime aussi la condition pour que $\Phi = 0$ se réduise à deux droites. Cette condition est satisfaite dans le cas de deux cercles se coupant à angle droit, car alors une droite quelconque menée par l'un des centres est divisée harmoniquement par les deux cercles, et le lieu des sommets des faisceaux harmoniques formés par les tangentes aux cercles se réduit à deux droites. Il en est encore de même lorsqu'on a la relation $D^2 = 2(r^2 + r'^2)$ entre la distance D des centres et les rayons r et r'.

IV. Réduire les équations de deux coniques à la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0, \quad ax^2 + by^2 + cz^2 = 0.$$

Les constantes a, b, c sont les racines de l'équation (371, Ex. I)

$$\Delta k^3 - \Theta k^2 + \Theta' k - \Delta' = 0,$$

et en résolvant les équations

$$x^2 + y^2 + z^2 = S, \quad ax^2 + by^2 + cz^2 = S',$$
$$a(b+c)x^2 + b(c+a)y^2 + c(a+b)z^2 = F,$$

on exprimera x^2, y^2 et z^2 au moyen des fonctions connues S, S' et F.

A la rigueur, il faudrait diviser d'abord les deux équations données par la racine cubique de Δ, puisqu'on veut les ramener à une forme dans laquelle le discriminant de S est égal à l'unité, mais il est facile de voir qu'on arrive au même résultat, en ne modifiant pas S et S', et en divisant F par Δ, après l'avoir calculé d'après les coefficients des équations données.

V. Réduire à la forme indiquée précédemment

$$3x^2 - 6xy + 9y^2 - 2x + 4y = 0, \quad 5x^2 - 14xy + 8y^2 - 6x - 2 = 0.$$

Les coefficients A, B, C,... des équations tangentielles sont alors

$$(-4, -1, 18, -3, 3, -2); \quad (-16, -19, -9, 21, 24, -14),$$

et l'on a

$$\Delta = -9, \quad \Theta = -54, \quad \Theta' = -99, \quad \Delta' = -54,$$

d'où

$$a = 1, \quad b = 2, \quad c = 3;$$

ce qui donne pour F :

$$F = -9(23x^2 - 50xy + 44y^2 - 18x + 12y - 4);$$

par suite, en désignant les coordonnées nouvelles par de grandes lettres,

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 3x^2 - 6xy + 9y^2 - 2x + 4y,$$
$$X^2 + 2Y^2 + 3Z^2 = 5x^2 - 14xy + 8y^2 - 6x - 2,$$
$$5X^2 + 8Y^2 + 9Z^2 = 23x^2 - 50xy + 44y^2 - 18x + 12y - 4.$$

Des combinaisons

$$6S + S' - F, \quad F - 3S - 2S', \quad 2S + 3S' - F,$$

on tire respectivement

$$X^2 = (3y+1)^2, \quad Y^2 = (2x-y)^2, \quad Z^2 = -(x+y+1)^2.$$

VI. Trouver l'équation des quatre tangentes menées à S par les points où cette courbe rencontre S'.

RÉPONSE.

$$(\Theta S - \Delta S')^2 = 4\Delta S(\Theta' S - F).$$

VII. Un triangle est circonscrit à une conique donnée U, deux de ses sommets glissent sur deux droites fixes $\lambda x + \mu y + \nu z$, $\lambda' x + \mu' y + \nu' z$; trouver le lieu du troisième sommet.

Nous avons vu (272, Ex. II) que, lorsque la conique et les droites sont définies respectivement par les équations

$$z^2 - xy = 0, \quad ax - y = 0, \quad bx - y = 0,$$

le lieu est représenté par

$$(a + b)^2 (z^2 - xy) = (a - b)^2 z^2.$$

Le deuxième membre de l'équation est égal au carré de la polaire par rapport à S de l'intersection des deux droites; cette polaire a pour expression générale

$$P = (ax + by + gz)(\mu\nu' - \mu'\nu) + (hx + by + fz)(\nu\lambda' - \nu'\lambda) + (gx + fy + cz)(\lambda\mu' - \lambda'\mu) = 0;$$

d'ailleurs, la relation $a + b = 0$, qui exprime que les droites sont conjuguées par rapport à S, devient dans le cas général (373) $\Theta = 0$, c'est-à-dire

$$\Theta = A\lambda\lambda' + B\mu\mu' + C\nu\nu' + F(\mu\nu' + \mu'\nu) + G(\nu\lambda' + \nu'\lambda) + H(\lambda\mu' + \lambda'\mu) = 0.$$

L'équation du lieu, trouvée pour le cas particulier du n° 272, devient donc dans le cas général

$$\Theta^2 U + \Delta P^2 = 0.$$

VIII. Un triangle est inscrit dans une conique S, deux de ses côtés sont tangents à S'; trouver l'enveloppe du troisième côté.

Prenons pour lignes de référence les côtés du triangle supposé fixe dans une de ses positions, et soient

$$S = 2(fyz + gzx + hxy) = 0,$$
$$S' = x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2xz - 2xy - 2hkxy = 0,$$

les équations des deux coniques, x et y étant les côtés tangents à S'. La conique $kS + S'$ est évidemment tangente au côté z; de plus, elle est *fixe*. En effet, les invariants

$$\Delta = 2fgh, \quad \Theta = -(f + g + h)^2 - 2fghk,$$
$$\Theta' = 2(f + g + h)(2 + hk), \quad \Delta' = -(2 + hk)^2$$

vérifient la relation

$$\Theta'^2 - 4\Theta\Delta = 4\Delta\Delta' k,$$

et l'équation $lS + S' = 0$ prend la forme

$$(\Theta'^2 - 4\Theta\Delta)S + 4\Delta\Delta' S' = 0,$$

qui représente une conique fixe tangente au troisième côté du triangle. Lorsque $\Theta'^2 = 4\Theta\Delta$, le troisième côté enveloppe la conique S'.

IX. Les trois côtés d'un triangle sont tangents à une conique U, deux de ses sommets glissent sur une conique V; trouver le lieu du troisième sommet.

La solution de ce problème peut se ramener aux trois opérations suivantes : former l'équation des tangentes menées à U par le troisième sommet (x', y', z'); trouver l'équation des droites qui joignent les points où ces tangentes rencontrent V; enfin, exprimer qu'une de ces droites qui doit être un des côtés du triangle, est tangente à V. Nous désignerons par U' et V' les résultats obtenus en substituant aux coordonnées courantes dans U et V celles du troisième sommet.

Si l'on représente par P la polaire par rapport à U de (x', y', z'), on aura pour l'équation des tangentes

$$UU' - P^2 = 0.$$

L'équation des cordes d'intersection de ces tangentes avec V s'obtiendra en exprimant que $UU' - P^2 + \lambda V$ se réduit à deux droites. En égalant à zéro son discriminant, on trouve pour déterminer λ l'équation du second degré

$$\lambda^2\Delta' + \lambda F' + \Delta U'V' = 0.$$

Pour exprimer qu'une de ces cordes d'intersection est tangente à U, il suffit de former (372) le discriminant de $\mu U + (UU' - P^2 + \lambda V)$, et d'écrire que l'équation en μ

$$\mu^2\Delta + \mu(2U'\Delta + \lambda\Theta) + U'^2\Delta + \lambda(\Theta U' + \Delta V') + \lambda^2\Theta' = 0,$$

obtenue en l'égalant à zéro, a ses racines égales, ce qui donne la relation

$$\lambda(4\Delta\Theta' - \Theta^2) + 4\Delta^2 V' = 0.$$

En éliminant λ entre cette équation et celle obtenue plus haut

$$\lambda^2\Delta' + \lambda F' + \Delta U'V' = 0,$$

on trouve, pour le lieu cherché, l'équation

$$16\Delta^3\Delta' V - 4\Delta(4\Delta\Theta' - \Theta^2)F + U(4\Delta\Theta' - \Theta^2)^2 = 0,$$

qui se réduit à $V = 0$, lorsqu'on a $4\Delta\Theta' = \Theta^2$ (*).

(*) On trouvera dans le *Quarterly Journal of Mathematics*, t. I, p. 344, une

X. Deux des côtés d'un triangle sont tangents à U, le troisième à $aU + bV$, tandis que deux de ses sommets glissent sur V; trouver le lieu du troisième sommet.

En suivant la même marche que dans l'exemple précédent, on voit que le lieu cherché est l'une ou l'autre des coniques inscrites dans le quadrilatère formé par les quatre tangentes communes à U et à V, et définies par l'équation

$$\Delta\Delta'\lambda^2 V + \lambda\mu F + \mu^2 U = 0,$$

dont les constantes λ et μ vérifient la relation

$$a(\alpha b - \beta a)\lambda^2 + a(4\Delta a + 2\Theta b)\lambda\mu - b^2\mu^2 = 0,$$

dans laquelle on a fait

$$\alpha = 4\Delta\Delta', \quad \beta = \Theta^2 - 4\Delta\Theta'.$$

XI. Les n côtés d'un polygone sont tangents à U, tandis que $n-1$ de ses sommets glissent sur V; trouver le lieu du sommet libre.

Ce problème se ramène au précédent, car la droite qui passe par les deux sommets adjacents au sommet libre est tangente à la conique $aU + bV$. Si l'on représente par λ', μ', λ'', μ'', λ''', μ''' les valeurs de λ et μ pour les polygones de $n-1$, n, $n+1$ côtés, il vient

$$\lambda''' = \mu'\mu''^2, \quad \mu''' = \Delta'\lambda'\lambda''(\alpha\mu'' - \Delta'\beta\lambda'').$$

On a pour le triangle $\lambda' = \alpha$, $\mu' = \Delta'\beta$, et pour le quadrilatère $\lambda'' = \beta^2$, $\mu'' = \alpha(4\Delta\alpha + 2\beta\Theta)$; en augmentant successivement le nombre des sommets, on trouve facilement les valeurs de λ et μ relatives aux autres polygones (*).

XII. Les polaires des milieux des côtés d'un triangle, prises par rapport à une conique inscrite, forment un triangle dont l'aire est constante (M. FAURE).

XIII. On joint par des droites chacun des sommets du triangle de référence aux points où le côté opposé rencontre une conique; trouver la condition pour que ces droites passent trois par trois par un même point.

RÉPONSE. $abc - 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0.$

---

discussion de M. Cayley, relative au lieu décrit par le sommet d'un triangle circonscrit à une conique S, et dont les deux autres sommets glissent sur des courbes données. Lorsque ces courbes sont toutes deux des coniques, le lieu est du huitième degré, et touche S aux points où il est rencontré par les polaires, prises par rapport à S, des intersections des deux coniques.

(*) Voir *Philosophical Magazine*, t. XIII, p. 337.

XIV. Trouver la condition pour qu'un point soit extérieur (ou intérieur) à une conique, autrement dit pour que les tangentes menées à la conique par ce point soient réelles (ou imaginaires) (M. SYLVESTER).

RÉPONSE. Le point est intérieur lorsque Δ et S' sont de même signe (*Voir* nº 285, Ex. III).

382. La théorie des invariants et des covariants permet de trouver facilement en coordonnées trilinéaires les formules équivalentes de certaines formules bien connues exprimées en coordonnées cartésiennes.

L'équation générale d'une droite passant par un des points imaginaires et à l'infini du cercle étant $x \pm y\sqrt{-1} + c = 0$, la condition pour que la droite $\lambda x + \mu y + \nu$ passe par un de ces points est $\lambda^2 + \mu^2 = 0$; autrement dit, ces points ont $\lambda^2 + \mu^2 = 0$ pour équation tangentielle.

Lorsque $\Sigma = 0$, $\Sigma' = 0$ sont les équations tangentielles de deux coniques, le discriminant de $\Sigma + k\Sigma'$ a pour expression (285-286)

$$\Delta^2 + k\Delta\Theta' + k^2\Delta'\Theta + k^3\Delta'^2,$$

qui devient

$$\Delta^2 + k\Delta(a+b) + k^2(ab - h^2)$$

pour $\Sigma' = \lambda^2 + \mu^2$.

Si donc, dans un système quelconque de coordonnées, on forme les invariants d'une conique et des points imaginaires du cercle, la relation $\Theta' = 0$ exprimera que la conique est une hyperbole équilatère, et $\Theta = 0$ qu'elle est une parabole. Pour que la conique passe par un des points à l'infini du cercle, il faut que la condition

$$(a+b)^2 = 4(ab - h^2) \quad \text{ou} \quad (a-b)^2 + 4h^2 = 0$$

soit remplie, et elle ne peut l'être par des valeurs réelles que si la conique passe à la fois par ces deux points, car alors $a = b$, $h = 0$.

La relation $\lambda^2 + \mu^2 = 0$ (*) exprime (34) que la distance

(*) Cette condition implique aussi (nº 25) que chacune des droites menées par un de ces deux points est perpendiculaire à elle-même. On peut, en partant de là, expliquer la présence, dans les équations de certains lieux, de facteurs

d'un point à une droite menée par un des points à l'infini est toujours infinie. La condition équivalente en coordonnées trilinéaires s'obtient en égalant à zéro le dénominateur de la fraction qui représente la distance d'un point à une droite (61). L'équation tangentielle des points imaginaires du cercle sera donc

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 - 2\mu\nu\cos A - 2\nu\lambda\cos B - 2\lambda\mu\cos C = 0.$$

Si l'on calcule les invariants Θ, Θ' du système formé par ces points et une conique, on trouve : pour la relation $\Theta' = 0$, qui exprime que la conique est une hyperbole équilatère,

$$a + b + c - 2f\cos A - 2g\cos B - 2h\cos C = 0\,;$$

pour la condition $\Theta = 0$, qui est vérifiée lorsque la conique est une parabole,

$$\begin{aligned}&A\sin^2 A + B\sin^2 B + C\sin^2 C\\ &\quad + 2F\sin B\sin C + 2G\sin C\sin A + 2H\sin A\sin B = 0.\end{aligned}$$

L'équation $\Theta'^2 = 4\Theta$, qui exprime que la conique passe par un des points à l'infini du cercle, peut se ramener par divers procédés à une somme de carrés.

383. Le covariant F du système formé par une conique et un couple de points représente le lieu des sommets des faisceaux harmoniques qui ont pour rayons deux tangentes à la conique, et deux droites menées par les points du couple. Lorsque ces points sont les points à l'infini du cercle, F représente le lieu des sommets des angles droits circonscrits à la conique. En se reportant à la valeur de F donnée au n° 378, et observant que la seconde conique se réduit à $\lambda^2 + \mu^2$, c'est-à-dire que $A' = B' = 1$, et que tous les autres coefficients de son équation tangentielle sont nuls, il est facile de voir que

en apparence étrangers ; comme, par exemple, celle du facteur $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2$ dans l'équation de la projection du foyer (α, β) sur une tangente. Car la perpendiculaire abaissée du foyer sur une des tangentes qui s'y coupent coïncidant avec cette tangente, la tangente fait partie du lieu.

l'équation

$$F = 0,$$

ou

$$F = C(x^2 + y^2) - 2Gx - 2Fy + A + B = 0,$$

représente, en coordonnées cartésiennes, le lieu des sommets des angles droits circonscrits à la conique (**294**, Ex.).

Lorsque cette conique est une parabole, on a $C = 0$, et le lieu se réduit à la directrice, dont l'équation prend la forme

$$2(Gx + Fy) = A + B.$$

En suivant la même marche, on trouve, pour l'équation trilinéaire correspondante,

$$\begin{aligned}
&(B + C + 2F\cos A)x^2 \\
&+ (C + A + 2G\cos B)y^2 \\
&+ (A + B + 2H\cos C)z^2 \\
&+ 2(A\cos A - F - G\cos C - H\cos B)yz \\
&+ 2(B\cos B - G - H\cos A - F\cos C)zx \\
&+ 2(C\cos C - H - F\cos B - G\cos A)xy = 0,
\end{aligned}$$

et l'on peut voir, comme au n° **128**, qu'elle représente un cercle, en la mettant sous la forme

$$\begin{aligned}
&(x\sin A + y\sin B + z\sin C) \\
&\times\left(\frac{B + C + 2F\cos A}{\sin A}x + \frac{C + A + 2G\cos B}{\sin B}y + \frac{A + B + 2H\cos C}{\sin C}z\right) \\
&= \frac{\Theta}{\sin A\sin B\sin C}(yz\sin A + zx\sin B + xy\sin C).
\end{aligned}$$

Si l'on y fait $\Theta = 0$, qui exprime que la conique (**382**) est une parabole, on obtient l'équation de la directrice.

384. En général, $\Sigma + k\Sigma'$ représente une conique inscrite dans le quadrilatère formé par les quatre tangentes communes à Σ et Σ'; lorsque, par suite d'une valeur particulière de k, $\Sigma + k\Sigma'$ se réduit à un couple de points, ces points sont deux sommets opposés de ce quadrilatère. Dans le cas où Σ' et $\Sigma + k\Sigma'$ représentent respectivement les points à l'infini du

cercle et un couple de points, ces derniers sont les foyers de Σ (279). Pour trouver les foyers d'une conique définie par une équation numérique en coordonnées cartésiennes, on peut donc employer la méthode suivante : déterminer k d'après l'équation du second degré

$$(ab - h^2)k^2 + \Delta(a + b)k + \Delta^2 = 0,$$

exprimant que le lieu $\Sigma + k(\lambda^2 + \mu^2)$ représente deux points ; introduire l'une ou l'autre des valeurs de k dans l'équation de ce lieu qui se décompose alors en deux facteurs

$$(\lambda x' + \mu y' + \nu z')(\lambda x'' + \mu y'' + \nu z''),$$

et donne pour les coordonnées des foyers

$$\frac{x'}{z'},\quad \frac{y'}{z'};\quad \frac{x''}{z''},\quad \frac{y''}{z''}.$$

L'une des valeurs de k correspond aux foyers réels, l'autre aux foyers imaginaires. La même méthode est applicable aux coordonnées trilinéaires.

L'équation $\Sigma + k(\lambda^2 + \mu^2) = 0$ représente en coordonnées tangentielles une conique homofocale de la conique donnée Σ; en la transformant en coordonnées cartésiennes (285), on trouve, pour l'équation générale des coniques homofocales à S,

$$\Delta S + k[C(x^2 + y^2) - 2Gx - 2Fy + A + B] + k^2 = 0,$$

et, par suite, pour les tangentes communes à ces coniques,

$$[C(x^2 + y^2) - 2Gx - 2Fy + A + B]^2 = 4\Delta S.$$

Si l'on décompose cette équation en deux facteurs,

$$[(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2][(x - \alpha')^2 + (y - \beta')^2],$$

on obtient les coordonnées des foyers, qui sont alors α, β; α', β'.

EXERCICES.

I. Trouver les foyers de la conique

$$2x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x - 8y + 11 = 0.$$

L'équation du second degré en k est alors $3k^2 + 4k\Delta + \Delta^2 = 0$, d'où l'on tire $k' = -\Delta$, $k'' = -\frac{1}{3}\Delta$; d'ailleurs $\Delta = -9$. En partant de la valeur $k'' = 3$, on trouve

$$\begin{aligned} &6\lambda^2 + 21\mu^2 + 3\nu^2 + 18\mu\nu + 12\nu\lambda + 30\lambda\mu + 3(\lambda^2 + \mu^2) \\ &\quad = 3(\lambda + 2\mu + \nu)(3\lambda + \mu + \nu), \end{aligned}$$

ce qui donno $(1, 2)$, $(3, 1)$ pour les foyers. La valeur $k' = 9$ correspond aux foyers imaginaires $(2 \pm \sqrt{-1},\ 3 \mp \sqrt{-1})$.

II. Trouver les coordonnées du foyer d'une parabole définie par une équation en coordonnées cartésiennes.

L'équation du second degré se réduit alors au premier, et l'expression

$$(a + b)[A\lambda^2 + B\mu^2 + 2F\mu\nu + 2G\nu\lambda + 2H\lambda\mu] - \Delta(\lambda^2 + \mu^2)$$

peut se décomposer en deux facteurs, qui sont

$$(a + b)(2G\lambda + 2F\mu), \quad \frac{(a + b)A - \Delta}{2(a + b)G}\lambda + \frac{(a + b)B - \Delta}{2(a + b)F}\mu + \nu.$$

Le premier donne le foyer situé à l'infini et montre que l'axe de la courbe est parallèle à $Fx - Gy$. L'autre foyer a pour coordonnées les coefficients de λ et μ dans le second facteur.

III. Trouver les coordonnées du foyer d'une parabole définie par une équation en coordonnées trilinéaires.

Ces foyers sont représentés par l'équation

$$\Theta'\Sigma = \Delta(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 - 2\mu\nu\cos A - 2\nu\lambda\cos B - 2\lambda\mu\cos C).$$

Les coordonnées du foyer situé à l'infini sont connues (293), puisque ce foyer est le pôle de la ligno à l'infini. Les coordonnées de l'autre foyer sont alors

$$\frac{\Theta' A - \Delta}{A\sin A + H\sin B + G\sin C}, \quad \frac{\Theta' B - \Delta}{H\sin A + B\sin B + F\sin C},$$

$$\frac{\Theta' C - \Delta}{G\sin A + F\sin B + C\sin C}.$$

385. La condition (61) pour que deux droites soient perpendiculaires entre elles

$$\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu' - (\mu\nu' + \mu'\nu)\cos A - (\nu\lambda' + \nu'\lambda)\cos B - (\lambda\mu' + \lambda'\mu)\cos C = 0$$

exprime en même temps (293) que ces droites sont conjuguées par rapport à la conique

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 - 2\mu\nu\cos A - 2\nu\lambda\cos B - 2\lambda\mu\cos C = 0.$$

La relation qui existe entre deux perpendiculaires n'est donc qu'un cas particulier de celle que vérifient deux droites conjuguées par rapport à une conique fixe. Ainsi le théorème : *Les trois hauteurs d'un triangle se coupent en un même point*, n'est qu'un cas particulier du suivant : *Les droites qui joignent les sommets correspondants de deux triangles polaires par rapport à une conique se coupent en un même point.*

Sur la sphère (*), les deux points imaginaires et à l'infini du cercle sont remplacés par une conique imaginaire fixe; tous les cercles peuvent être considérés comme des coniques ayant un double contact avec une conique fixe, le centre du cercle étant le pôle de la corde de contact; deux lignes sont perpendiculaires lorsque chacune d'elles passe par le pôle de l'autre par rapport à cette conique, etc.

La méthode des projections nous a permis de généraliser certains théorèmes en remplaçant dans leur énoncé les deux points imaginaires et à l'infini du cercle, par deux points quelconques. Ce qui précède nous autorise à donner à ces théorèmes une extension plus grande encore, en substituant une conique à ces deux points. Mais il ne faut pas perdre de vue que les théorèmes auxquels on arrive par cette sorte d'induction doivent être soumis à une démonstration ultérieure. Ainsi, c'est par cette méthode inductive que nous avons été conduit en partant du théorème : *Le point de concours des hauteurs d'un triangle inscrit dans une hyperbole*

(*) *Voir* la *Géométrie à trois dimensions* de M. G. Salmon, Chap. IX.

équilatère appartient à l'hyperbole, aux propriétés des coniques assujetties à la relation $\Theta = 0$, propriétés que nous avons ensuite démontrées à la fin du n° 375.

Nons indiquerons, dans les deux numéros suivants, quelques-unes des recherches analytiques relatives aux théorèmes qui concernent les coniques ayant un double contact avec une conique fixe, et correspondent, ainsi que nous l'avons fait voir au n° 306, à une série de théorèmes relatifs aux systèmes de cercles.

386. *Trouver la condition pour que la droite* $\lambda x + \mu y + \nu z$ *soit tangente à la conique* $S + (\lambda' x + \mu' y + \nu' z)^2$.

Il suffit de remplacer dans $\Sigma, a, b, c\ldots$ par $a + \lambda'^2$, $b + \mu'^2, \ldots$, ce qui donne

$$\Sigma + [a(\mu\nu' - \mu'\nu)^2 + \ldots] = 0;$$

la quantité entre parenthèses indiquant le résultat de la substitution de $\mu\nu' - \mu'\nu$, $\nu\lambda' - \nu'\lambda$, $\lambda\mu' - \lambda'\mu$ à x, y, z dans S. Cette équation peut se mettre sous une autre forme : on a, en effet (294),

$$(ax^2 + by^2 + \ldots)(ax'^2 + by'^2 + \ldots) - (axx' + byy' + \ldots)^2$$
$$= A(yz' - y'z)^2 + \ldots;$$

un calcul analogue donne la relation

$$(A\lambda^2 + B\mu^2 + \ldots)(A\lambda'^2 + B\mu'^2 + \ldots) - (A\lambda\lambda' + \ldots)^2$$
$$= \Delta[a(\mu\nu' - \mu'\nu)^2 + \ldots],$$

dans laquelle le facteur $(A\lambda\lambda' + \ldots)$ est le premier membre de l'équation

$$A\lambda\lambda' + B\mu\mu' + C\nu\nu'$$
$$+ F(\mu\nu' + \mu'\nu) + G(\nu\lambda' + \nu'\lambda) + H(\lambda\mu' + \lambda'\mu) = 0,$$

qui exprime que les droites $\lambda x + \mu y + \nu z$, $\lambda' x + \mu' y + \nu' z$ sont conjuguées. En posant alors

$$\Sigma' = A\lambda'^2 + B\mu'^2 + \ldots, \quad \Pi = A\lambda\lambda' + B\mu\mu' + \ldots,$$

et remplaçant $a(\mu\nu' - \mu'\nu)^2 + \ldots$ par la valeur trouvée précé-

demment, on a enfin, pour la condition cherchée,

$$(\Delta + \Sigma')\Sigma - \Pi^2 = 0.$$

Si l'on considère λ, μ et ν comme les coordonnées d'un point de la conique réciproque, ce qui est possible (321), on voit que cette dernière équation peut servir de démonstration analytique au théorème : *Le système réciproque de deux coniques ayant un double contact se compose de deux coniques ayant également un double contact.*

Cette condition peut aussi se mettre sous une forme plus commode pour quelques applications, en définissant la droite $\lambda x + \mu y + \nu z$, non plus par les coefficients λ, μ et ν, mais bien par les coordonnées de son pôle par rapport à S. Si l'on désigne par P' la polaire $(axx' + byy' + \ldots)$ de (x', y', z') par rapport à S, et par P'' la droite $\lambda' x + \mu' y + \nu' z$ considérée comme polaire de (x'', y'', z''), il suffit d'exprimer que P' est tangent à $S + P''^2$, en substituant aux fonctions Σ, Σ', Π en λ, μ et ν les fonctions équivalentes en x, y, z.

Lorsque la polaire de (x', y', z') est tangente à S, les coefficients S_1, S_2, S_3 de son équation vérifient la relation $\Sigma = 0$ en λ, μ, ν, et le point (x', y', z') appartient à S; Σ doit donc être remplacé par $\Delta S'$ (285), et de même Σ' par $\Delta S''$. Quand deux droites sont conjuguées par rapport à S', il en est de même de leurs pôles; les coefficients S_1, S_2, S_3 satisfont donc à la relation Π qui devient ΔR, si l'on représente par R le résultat de la substitution des coordonnées d'un des points (x', y', z'), (x'', y'', z'') dans la polaire de l'autre. La condition pour que P' soit une tangente de $S + P''^2$ prend alors la forme

$$(1 + S'')S' = R^2.$$

387. *Trouver la condition pour que les deux coniques*

$$S + (\lambda' x + \mu' y + \nu' z)^2, \quad S + (\lambda'' x + \mu'' y + \nu'' z)^2$$

soient tangentes.

Ces coniques sont tangentes lorsqu'une de leurs cordes communes

$$(\lambda' x + \mu' y + \nu' z) \pm (\lambda'' x + \mu'' y + \nu'' z)$$

est tangente à l'une des coniques; et en remplaçant, dans la condition trouvée précédemment, λ par $\lambda' \pm \lambda''$, il vient, pour la condition cherchée,

$$(\Delta + \Sigma')(\Sigma' \pm 2\,\mathrm{II} + \Sigma'') = (\Sigma' \pm \mathrm{II})^2,$$

qui peut se mettre sous la forme plus symétrique

$$(\Delta + \Sigma')(\Delta + \Sigma'') = (\Delta \pm \mathrm{II})^2.$$

On trouverait de même que les deux coniques $S + P'^2$, $S + P''^2$ sont tangentes, quand on a la relation

$$(1 + S')(1 + S'') = (1 \pm R)^2.$$

EXERCICES.

I. Décrire une conique $S + P^2$ ayant un double contact avec S, et tangente à trois coniques données $S + P'^2$, $S + P''^2$, $S + P'''^2$ qui ont avec S un double contact.

Soient x, y, z les coordonnées du pôle de la corde de contact de S avec la conique cherchée $S + P^2$, on aura les équations

$$(1 + S)(1 + S') = (1 + P')^2, \quad (1 + S)(1 + S'') = (1 + P'')^2,$$
$$(1 + S)(1 + S''') = (1 + P''')^2,$$

dans lesquelles S', S'', S''' sont des constantes connues, tandis que S, P',... renferment les coordonnées x, y, z du point cherché. Si l'on pose

$$1 + S = k^2, \quad 1 + S' = k'^2 \ldots,$$

il vient

$$kk' = 1 + P', \quad kk'' = 1 + P'', \quad kk''' = 1 + P''',$$

et en observant que P', P'', P''', k', k'', k''' comportent le double signe, on voit que le problème, eu égard à la combinaison de ces signes, admet trente-deux solutions. Les équations précédentes donnent

$$k(k' - k'') = P' - P'', \quad k(k'' - k''') = P'' - P''',$$

et en éliminant k, on obtient l'équation

$$P'(k'' - k''') + P''(k''' - k') + P'''(k' - k'') = 0,$$

qui est celle d'une droite sur laquelle doit se trouver le pôle par rapport à S de la corde de contact de la conique cherchée. Elle est évidemment vérifiée par le point $P' = P'' = P'''$ qui est un des *centres radicaux* (306) des coniques $S + P'^2$, $S + P''^2$, $S + P'''^2$.

Cette équation est aussi vérifiée par le point $\frac{P'}{k'} = \frac{P''}{k''} = \frac{P'''}{k'''}$ dont nous allons chercher la signification géométrique. D'après le n° 386, les équations tangentielles des coniques $S + P'^2$, $S + P''^2$ sont respectivement données par

$$(1 + S')\Sigma = \Delta(\lambda x' + \mu y' + \nu z')^2, \quad (1 + S'')\Sigma = \Delta(\lambda x'' + \mu y'' + \nu z'')^2,$$

et l'équation

$$\frac{\lambda x' + \mu y' + \nu z'}{k'} \pm \frac{\lambda x'' + \mu y'' + \nu z''}{k''} = 0$$

représente les points d'intersection des tangentes communes à $S + P'^2$ et $S + P''^2$; ces points dont les coordonnées sont $\frac{x'}{k'} \pm \frac{x''}{k''}$ ..., ont

$$\frac{P'}{k'} \pm \frac{P''}{k''}$$

pour polaires par rapport à S. Donc $\frac{P'}{k'} = \frac{P''}{k''} = \frac{P'''}{k'''}$ représente le pôle par rapport à S d'un axe de similitude (306) des trois coniques données.

Par conséquent, *le pôle de la corde de contact cherchée se trouve sur l'une des droites qui joignent un des quatre centres radicaux au pôle par rapport à S d'un des quatre axes de similitude.* Ce théorème n'est du reste qu'une extension de celui qui se trouve à la fin du n° 118.

Pour compléter la solution, nous chercherons les coordonnées du point de contact de $S + P^2$ avec $S + P'^2$. Soient $\frac{x}{k} - \frac{x'}{k'}, \ldots$, les coordonnées de ce point, qui est un centre de similitude des deux coniques ; en remplaçant x par $x + \frac{k}{k'}x'$, dans $kk' = 1 + P', \ldots$ et désignant par R et R′ ce que devient l'équation de la polaire de (x', y', z') lorsqu'on substitue x'', y'', z''; x''', y''', z''' aux coordonnées courantes, on a

$$kk' = 1 + P' + \frac{k}{k'}S', \quad kk'' = 1 + P'' + \frac{k}{k'}R, \quad kk''' = 1 + P''' + \frac{k}{k'}R';$$

par suite

$$k(k' - k'') = P' - P'' + \frac{k}{k'}(S' - R),$$

$$k(k' - k''') = P' - P''' + \frac{k}{k'}(S' - R'),$$

d'où, en éliminant k,

$$P'\left[k'' - \frac{R}{k'} - \left(k''' - \frac{R'}{k'}\right)\right] + P''\left[k''' - \frac{R'}{k'} - \left(k' - \frac{S'}{k'}\right)\right]$$
$$+ P'''\left[k' - \frac{S'}{k'} - \left(k'' - \frac{R}{k'}\right)\right] = 0.$$

Cette équation représente une droite sur laquelle doit se trouver le point de contact cherché. Cette droite joint évidemment un des centres radicaux au point défini par les équations que l'on obtient en exprimant que P', P'', P''' sont respectivement proportionnels à $k' - \frac{S'}{k'}$, $k'' - \frac{R}{k'}$, $k''' - \frac{R'}{k'}$, ou bien à 1, $k'k'' - R$, $k'k''' - R'$. Et comme les polaires par rapport à $S + P'^2$ des trois centres de similitude des coniques $S + P'^2$, $S + P''^2$, $S + P'''^2$ ont pour équations

$$(k'k'' - R)P' = P'', \quad (k'k''' - R')P' = P''', \text{ etc.},$$

la droite cherchée s'obtiendra en joignant l'un des quatre centres radicaux au pôle, par rapport à $S + P'^2$ d'un des quatre axes de similitude. Cette construction pourrait aussi, d'après le procédé indiqué au n° 121, se déduire géométriquement des théorèmes du n° 306. Les seize droites qu'on peut mener de cette manière rencontrent $S + P'^2$ en trente-deux points, qui sont les points de contact des coniques satisfaisant aux conditions du problème (*).

(*) La solution que nous venons de donner de ce problème ne diffère pas au fond de celle qui a été donnée par M. Cayley (*Crelle*, t. XXXIX).

M. Casey (*Proceedings of the Royal Irish Academy*, 1866) a donné une autre solution de ce problème en se basant sur des considérations de géométrie sphérique, et leur appliquant la méthode indiquée dans les n°s 121 (a) et 121 (b). La relation 121 (a), à laquelle sont assujetties les tangentes communes à quatre cercles tracés sur un plan et tangents à un cinquième, est vérifiée par les sinus des moitiés des tangentes communes menées à quatre cercles tracés sur la sphère dans des conditions analogues. Si donc les équations

$$S - L^2 = 0, \quad S - M^2 = 0, \quad S - N^2 = 0$$

représentent trois cercles pris sur une sphère (G. Salmon, *Geometry of three dimensions*, Chap. IX), les cercles qui leur sont tangents doivent vérifier la relation

$$\sqrt{\lambda\left(S^{\frac{1}{2}} - L\right)} + \sqrt{\mu\left(S^{\frac{1}{2}} - M\right)} + \sqrt{\nu\left(S^{\frac{1}{2}} - N\right)} = 0,$$

qui donne une solution du problème posé à l'Exercice I. On trouvera une Note à ce sujet à la fin du volume.

II. Les quatre coniques qu'on peut mener par trois points fixes de telle sorte qu'elles aient un double contact avec une conique donnée S, sont tangentes à quatre coniques qui ont aussi un double contact avec S (*).

Soit

$$S = x^2 + y^2 + z^2 - 2yz\cos A - 2zx\cos B - 2xy\cos C = 0;$$

les quatre coniques passant par les trois points ont pour équation

$$S = (x \pm y \pm z)^2$$

et sont tangentes à la conique

$$S = [x\cos(B - C) + y\cos(C - A) + z\cos(A - B)]^2$$

ainsi qu'aux trois coniques obtenues en changeant successivement les signes de A, B et C dans cette équation.

III. Les quatre coniques qu'on peut mener tangentiellement à trois droites fixes x, y, z de telle sorte qu'elles aient un double contact avec S, sont tangentes à quatre coniques qui ont aussi un double contact avec S.

Si l'on pose $M = \frac{1}{2}(A + B + C)$, les quatre premières coniques seront données par l'équation

$$S = [x\sin(M - A) + y\sin(M - B) + z\sin(M - C)]^2$$

et celles qu'on en déduit on y changeant successivement les signes de A, B et C. Les quatre autres coniques sont représentées par l'équation

$$S = \left[x\frac{\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}A} + y\frac{\sin\frac{1}{2}C\sin\frac{1}{2}A}{\sin\frac{1}{2}B} + z\frac{\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B}{\sin\frac{1}{2}C}\right]^2$$

et celles qu'on en déduit en y changeant le signe de x et augmentant de 180 degrés les angles B et C, etc.

IV. Trouver la condition pour que les trois coniques U, V, W aient un double contact avec la même conique.

Cette condition s'obtient en éliminant λ, μ et ν entre l'équation

$$\Delta\lambda^3 - \Theta\lambda^2\mu + \Theta'\lambda\mu^2 - \Delta'\mu^3 = 0$$

et les équations correspondantes qu'on obtient en exprimant que les coniques $\mu V - \nu W$, $\nu W - \lambda U$ se réduisent respectivement à deux droites.

(*) Cette extension du théorème de Feuerbach (131, Ex.) peut recevoir encore une plus grande extension. Voir *Quarterly Journal of Mathematics*, t. VI, p. 67.

388. Nous terminerons ce Chapitre par quelques indications sur la théorie des invariants et des covariants des systèmes de trois coniques, dont l'étude complète nécessite la connaissance des propriétés des courbes du troisième degré.

Le lieu du point dont les polaires par rapport à trois coniques U, V *et* W *sont concourantes, est une courbe du troisième degré, qu'on appelle le* Jacobien *des trois coniques.*

En effet, en éliminant x, y, z entre les équations des trois polaires

$$U_1 x + U_2 y + U_3 z = 0, \quad V_1 x + V_2 y + V_3 z = 0,$$
$$W_1 x + W_2 y + W_3 z = 0,$$

on obtient, pour l'équation du lieu,

$$U_1(V_2 W_3 - V_3 W_2) + U_2(V_3 W_1 - V_1 W_3) + U_3(V_1 W_2 - V_2 W_1) = 0.$$

Il est d'ailleurs évident que si les polaires d'un point A prises par rapport à U, V, W se coupent en un même point, il en est de même des polaires de ce point prises par rapport à toutes les coniques du système $lU + mV + nW$.

Lorsque les polaires, par rapport à toutes ces coniques, d'un point A du Jacobien passent par le point B, la droite AB est divisée harmoniquement par toutes les coniques, et par suite la polaire de B passe par le point A. Le point B appartient donc au Jacobien, et l'on dit qu'il *correspond* au point A. La droite AB est évidemment divisée en involution par toutes les coniques, et les points A et B sont les foyers de cette division. Et comme aux foyers se confondent deux points correspondants de la division, il en résulte que si une conique du système est tangente à AB, ce ne peut être qu'en un des points A et B. Lorsqu'une conique se réduit à un couple de droites se coupant sur AB, l'intersection de ces droites ne peut se trouver qu'en A ou B, à moins que la droite AB ne fasse elle-même partie de ce couple.

On peut, du reste, démontrer directement que lorsque $lU + mV + nW$ représente deux droites, leur intersection se

trouve sur le Jacobien. En effet, cette intersection (292) vérifie les trois équations

$$lU_1 + mV_1 + nW_1 = 0, \quad lU_2 + mV_2 + nW_2 = 0,$$
$$lU_3 + mV_3 + nW_3 = 0,$$

et l'équation du lieu, obtenue en éliminant l, m et n, est la même que celle trouvée précédemment. La droite AB, qui joint deux points correspondants du Jacobien, rencontre cette courbe en un troisième point, et il résulte de ce que nous venons de dire que la droite AB appartient au couple de droites issues de ce point, et compris dans le système $lU + mV + nW$.

L'équation générale du Jacobien, qu'on désigne habituellement par la lettre J, peut s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
&(agh)x^3 + (bhf)y^3 + (cfg)z^3 \\
&- [(abg) + (ahf)]x^2y - [(cah) + (afg)]x^2z \\
&- [(abf) + (bgh)]y^2x - [(bch) + (bfg)]y^2z \\
&- [(caf) + (cgh)]z^2x - [(bcg) + (chf)]z^2y \\
&\qquad\qquad - [(abc) + 2(fgh)]xyz = 0,
\end{aligned}$$

en représentant, pour abréger, par (abc) le déterminant des neuf coefficients $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$.

Le Jacobien est un covariant qui est du même degré par rapport aux coefficients et par rapport aux variables.

EXERCICES.

I. Faire passer par quatre points une conique tangente à une conique donnée W.

Supposons les quatre points définis par l'intersection des deux coniques U et V. Le problème admet six solutions, puisqu'en remplaçant $a, \ldots$ par $a + ka'$, dans la condition (372) qui exprime que U et W sont tangentes, on obtient une équation du sixième degré en k. Le Jacobien de U, V et W coupe W aux six points de contact cherchés. Car la polaire du point de contact par rapport à V étant aussi sa polaire par rapport à une conique $\lambda U + \mu V$ passe par l'intersection de ses polaires prises par rapport à U et à V.

II. Le Jacobien de trois coniques ayant un triangle autopolaire commun se réduit à trois droites.

Il est facile de vérifier que $xyz = 0$ est le Jacobien des coniques

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0, \quad a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 = 0, \quad a''x^2 + b''y^2 + c''z^2 = 0.$$

On peut donc trouver l'équation des côtés du triangle autopolaire commun à deux coniques en formant le Jacobien (J) de S, S′ et du covariant F, puisque ce triangle est aussi autopolaire par rapport à F (381, Ex. I).

En comparant ce qui précède au résultat obtenu au n° 381. Ex. IV, on obtient l'équation

$$\begin{aligned} J^2 = F^3 - F^2(\Theta S' + \Theta' S) + F(\Delta'\Theta S^2 + \Delta\Theta' S'^2) + F(\Theta\Theta' - 3\Delta\Delta')SS' \\ - \Delta'^2\Delta S^3 - \Delta\Delta'^2 S'^3 + \Delta'(2\Delta\Theta' - \Theta^2)S^2S' + \Delta(2\Delta'\Theta - \Theta'^2)SS'^2. \end{aligned}$$

III. Le Jacobien de trois coniques qui ont deux points communs se réduit à une droite et à une conique passant par ces deux points.

Il est évident, par la Géométrie, qu'un point quelconque de la droite menée par les deux points satisfait aux conditions du problème; le théorème peut d'ailleurs se vérifier facilement par l'analyse. Dans le cas particulier où les coniques sont des cercles, le Jacobien n'est autre chose que le cercle qui les coupe orthogonalement.

IV. Le Jacobien se réduit encore à une droite et à une conique lorsqu'une des coniques S est un carré parfait L^2.

En effet, L est un facteur du lieu. On peut donc mener quatre coniques tangentes à une conique donnée aux deux points (S, L) et en même temps à S″; l'intersection du lieu avec S″ détermine les points de contact.

Lorsque les trois coniques sont : une conique, un cercle et le carré de la ligne à l'infini, le Jacobien passe par le pied des normales qu'on peut mener à la conique par le centre du cercle.

388 (*a*). *Trouver la condition pour que la droite $\lambda x + \mu y + \nu z$ soit divisée en involution par trois coniques.*

En se reportant au n° 335 et à la Note du n° 342, on voit que la condition cherchée s'obtient en égalant à zéro le déterminant

$$\begin{vmatrix} c\lambda^2 - 2g\nu\lambda + a\nu^2 & c\mu^2 - 2f\mu\nu + b\nu^2 & c\lambda\mu - f\nu\lambda - g\nu\mu + h\nu^2 \\ c'\lambda^2 - 2g'\nu\lambda + a'\nu^2 & c'\mu^2 - 2f'\mu\nu + b'\nu^2 & c'\lambda\mu - f'\nu\lambda - g'\nu\mu + h'\nu^2 \\ c''\lambda^2 - 2g''\nu\lambda + a''\nu^2 & c''\mu^2 - 2f''\mu\nu + b''\nu^2 & c''\lambda\mu - f''\nu\lambda - g''\nu\mu + h''\nu^2 \end{vmatrix}$$

qui, développé et divisé par ν^2, peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned}\lambda^3(bcf)+\mu^3(cag)+\nu^3(abh)+\lambda^2\mu[(chf)-(bcg)]\\+\lambda^2\nu[2(bfg)-(bch)]+\mu^2\lambda[2(cgh)-(caf)]\\+\mu^2\nu[2(afg)-(cah)]+\nu^2\lambda[2(bgh)-(abf)]\\+\nu^2\mu[2(ahf)-(abg)]+\lambda\mu\nu[(abc)-4(fgh)]=0,\end{aligned}$$

en employant pour les déterminants l'abréviation indiquée précédemment. On désigne habituellement ce contrevariant par la lettre Φ. Sa forme suffit pour montrer que toute droite divisée en involution par les trois coniques U, V et W, l'est aussi par trois coniques quelconques du système $lU+mV+nW$. L'équation du lieu des points tels, que les tangentes menées par l'un d'eux aux trois coniques forment un faisceau en involution, peut se déduire de celle qui précède en y remplaçant λ, μ, ν par x, y, z et a, b, c... par les coefficients A, B, C,... de l'équation réciproque ou tangentielle.

389. Lorsqu'on forme le discriminant de $lU+mV+nW$, on obtient une fonction en l, m, n, dont les coefficients sont les invariants du système de coniques. Tous ces invariants appartiennent à la catégorie de ceux que nous avons étudiés précédemment, sauf un, qui est dans ce développement le coefficient de lmn, et qui se déduit du discriminant Δ d'une conique U en y remplaçant chaque terme abc,... par six nouveaux termes tels que

$$ab'c''+ab''c'+a'b''c+a'bc''+a''bc'+a''b'c.$$

Il existe encore un invariant remarquable de ce système de trois coniques, qu'on obtient en se basant sur le principe suivant (*): *Étant donnés un covariant et un contrevariant de même degré, on peut, en substituant dans l'un des symboles différentiels et opérant ensuite sur l'autre, obtenir un invariant.* On a ainsi, en partant du Jacobien et du contrevariant

(*) *Voir* la traduction française de l'*Algèbre supérieure* de M. Salmon, p. 108.

trouvé au numéro précédent,

$$\begin{aligned}T = (abc)^2 &+ 4(abf)(acf) + 4(bcg)(bag) + 4(cah)(cbh)\\ &+ 8(afg)(bfg) + 8(afh)(cfh) + 8(cgh)(bgh)\\ &- 8(agh)(bcf) - 8(bhf)(cag) - 8(cfg)(abh)\\ &+ 4(abc)(fgh) - 8(fgh)^2.\end{aligned}$$

Cet invariant a été indiqué par M. Sylvester, qui l'a obtenu par un procédé différent de celui que nous venons d'employer.

389 (*a*). On peut simplifier l'étude de certaines propriétés des systèmes de trois coniques, en rapportant chacune de ces courbes à quatre droites x, y, z, w et mettant leurs équations sous la forme

$$U = ax^2 + by^2 + cz^2 + dw^2, \quad V = a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 + d'w^2,$$
$$W = a''x^2 + b''y^2 + c''z^2 + d''w^2,$$

à laquelle il est toujours possible de les ramener d'une infinité de manières. En effet, chacune de ces équations renferme trois constantes indépendantes, et chaque ligne est définie par deux constantes; la forme ci-dessus contient donc dix-sept constantes, tandis que la forme employée habituellement pour U, V, W n'en renferme que trois fois cinq, ou quinze. D'ailleurs, les équations de quatre droites vérifient toujours une relation de la forme $w = \lambda x + \mu y + \nu z$, que, pour plus de symétrie, on peut écrire de la manière suivante :

$$x + y + z + w = 0,$$

en supposant les constantes λ, μ et ν contenues implicitement dans x, y et z.

Comme application, nous résoudrons le problème suivant.

Trouver la condition pour que les trois coniques U, V, W *passent par un même point.*

Si l'on résout, par rapport à x^2, y^2, z^2, w^2, les équations

$$U = 0, \quad V = 0, \quad W = 0,$$

et que l'on représente par A, B, C, D les quatre déterminants (bcd), (dca), (dab), (bac), on voit que x^2, y^2, z^2, w^2 sont respectivement proportionnels à A, B, C et D, et, en substituant dans l'équation

$$x + y + z + w = 0,$$

il vient, pour la condition cherchée,

$$\sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C} + \sqrt{D} = 0,$$

ou, en faisant disparaître les radicaux,

$$(A^2 + B^2 + C^2 + D^2 - 2AB - 2BC - 2CA - 2AD - 2BD - 2CD)^2 = 64ABCD.$$

Le premier membre de cette équation est le carré de l'invariant T obtenu précédemment, le second membre est un invariant que nous désignerons par la lettre M. La relation $M = 0$ exprime que l'on peut trouver des valeurs de l, m, n telles, que $lU + mV + nW$ se réduise à un carré parfait. Et comme M est du quatrième degré par rapport aux coefficients de chaque conique, on peut rendre $S + lU + mV + nW$ un carré parfait de quatre manières (*voir* n° 373, Ex. III), puisqu'en égalant à zéro l'invariant M relatif à $S + lU$, V, W, on obtient une équation du quatrième degré pour déterminer l.

389 (*b*). En général, trois coniques quelconques peuvent être considérées comme les polaires de trois points relativement à une même courbe du troisième degré, ou cubique; autrement dit, leurs équations peuvent se ramener à la forme

$$\alpha(x^2 - 2yz) + \beta(y^2 - 2zx) + \gamma(z^2 - 2xy) = 0.$$

Si l'on emploie pour les équations des coniques la forme indiquée au numéro précédent, l'équation de la cubique dont elles se déduisent pourra s'écrire

$$\frac{x^3}{A} + \frac{y^3}{B} + \frac{z^3}{C} + \frac{w^3}{D} = 0,$$

et l'on voit que si l'invariant M s'annule (ce qui ne peut arriver que lorsqu'une des expressions A, B, C, D est nulle), il y a

exception, et les coniques ne peuvent être considérées comme déduites de la même cubique.

Dans le cas général, on peut obtenir l'équation de la cubique en formant le Hessien (*) du Jacobien des trois coniques, et retranchant du résultat le produit du Jacobien par l'invariant T.

En opérant sur le contrevariant Φ du troisième degré successivement avec chacune des coniques, ou sur le Jacobien avec leurs réciproques, on obtient les contrevariants et les covariants linéaires qui représentent géométriquement les points dont les coniques données sont les polaires, ou les lignes polaires de ces points par rapport à la cubique.

(*) *Voir* la traduction française de l'*Algèbre supérieure* de M. SALMON, p. 96.

CHAPITRE XIX.

MÉTHODE DES INFINIMENT PETITS.

390. Les problèmes relatifs au tracé des tangentes, à la détermination des aires et des longueurs d'arcs des courbes, peuvent être traités par deux méthodes différentes : l'analyse et la géométrie. Renvoyant le lecteur aux ouvrages spéciaux pour l'emploi de la première, nous nous bornerons à exposer dans ce Chapitre quelques exemples de la seconde, afin de donner une idée des procédés employés par les géomètres avant la découverte de l'analyse. Ces procédés, en dehors de l'intérêt historique qui s'y rattache, peuvent, dans certains cas, conduire plus simplement et plus rapidement à une solution que l'analyse : qu'il nous suffise de rappeler ici le beau théorème énoncé au nº 400, théorème qui n'avait pas même été entrevu par ceux qui ont appliqué le calcul intégral à la rectification des sections coniques.

A mesure que le nombre des côtés d'un polygone *inscrit* dans une courbe augmente, l'aire et le périmètre du polygone se rapprochent de l'aire et du périmètre de la courbe; le côté du polygone tend à coïncider avec la tangente menée à la courbe par son extrémité. Lorsque ce nombre devient *infini*, le polygone se confond avec la courbe, et la tangente en un point coïncide avec la droite qui le joint à un autre point infiniment voisin.

A mesure que le nombre des côtés d'un polygone *circonscrit* augmente, son aire et son périmètre se rapprochent de l'aire et du périmètre de la courbe, et le point d'intersection de deux de ses côtés consécutifs tend à coïncider avec le point de contact d'un de ses côtés.

Lors donc que nous voudrons déterminer l'aire ou le péri-

mètre d'une courbe, nous pourrons substituer à cette courbe un polygone inscrit ou circonscrit d'un nombre infini de côtés; de plus, nous pourrons considérer une tangente comme la corde menée par deux points infiniment voisins de la courbe, et un point de la courbe comme l'intersection de deux tangentes infiniment voisines.

391. I. *Trouver la direction de la tangente menée en un point* B *du cercle.*

Dans un triangle isoscèle AOB (*fig.* 111), formé par les deux rayons OA, OB et la corde BA qui joint leurs extrémités,

Fig. 111.



l'angle à la base ABO est égal à un angle droit diminué de la moitié de l'angle au sommet BOA; à mesure que les points A et B se rapprochent, cet angle au sommet tend à devenir plus petit que toute grandeur donnée; donc, à la limite, l'angle OBA que la tangente fait avec le rayon est égal à un angle droit.

Nous aurons souvent occasion d'employer le principe qui vient d'être démontré, et qu'on peut énoncer de la manière suivante : *Deux droites égales, infiniment voisines, et issues du même point, sont perpendiculaires à la droite qui joint leurs extrémités.*

II. *Les circonférences de deux cercles sont entre elles dans le même rapport que leurs rayons.*

Par le centre des deux cercles (*fig.* 111) supposés concentriques (ce qui est toujours possible), menons des rayons OA,

OB,..., Oa, Ob,..., et les cordes qui, dans chaque cercle, joignent leurs extrémités; nous formerons ainsi deux polygones inscrits ABCD..., $abcd$... d'un même nombre de côtés, semblables, et dont les périmètres sont, par suite, dans le même rapport que les rayons des cercles; cette propriété, étant indépendante du nombre des côtés, subsiste encore à la limite lorsque les polygones se confondent avec les circonférences circonscrites : donc *les circonférences de deux cercles sont entre elles dans le même rapport que leurs rayons.*

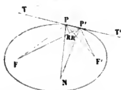
III. *L'aire d'un cercle est égale au produit du rayon par la moitié de la circonférence.*

L'aire d'un triangle OAB (*fig.* 111), formé par une corde et deux rayons, est égale au produit de la moitié de la corde, par la distance de cette corde au centre; par suite, l'aire d'un polygone régulier inscrit est égale à la moitié de son périmètre multipliée par la distance d'un quelconque de ses côtés au centre; à mesure que le nombre des côtés du polygone augmente, son périmètre tend à devenir égal à la circonférence, et la distance d'un de ses côtés au centre tend à devenir égale au rayon; les différences respectives entre le périmètre et la circonférence, la distance et le rayon, pouvant devenir plus petites que toute quantité donnée, il en résulte que *l'aire du cercle est égale au produit du rayon par la moitié de la circonférence.*

392. I. *Mener la tangente* TT′ *en un point* P *de l'ellipse.*

Considérons sur la courbe deux points P, P′ infiniment voi-

Fig. 112.



sins (*fig.* 112); en les joignant aux foyers F et F′ de l'ellipse, il vient

$$FP + PF' = FP' + P'F'.$$

Prenons sur FP', $FR = FP$, et sur $F'P$, $F'R' = F'P'$; on aura ainsi $P'R = PR'$. Les deux triangles PRP' et $PR'P'$ sont rectangles en R et R' (391, I); d'ailleurs ils ont une base commune PP', et les côtés $P'R$, PR' sont égaux : donc les angles $PP'R$ et $P'PR'$ sont égaux. Mais à la limite $TPF = PP'F$, la différence PFP' entre ces deux angles pouvant devenir plus petite que toute quantité donnée; par suite, $TPF = P'PF'$; la tangente fait donc des angles égaux avec les rayons vecteurs menés du foyer au point de contact.

II. *Mener la tangente en un point* P *de l'hyperbole.*

En répétant sur l'hyperbole une construction analogue à

Fig. 113.

celle qui se rapporte à l'ellipse, on a (*fig.* 113)

$$F'P' - F'P = FP' - FP, \quad P'R = P'R',$$

et les angles $PP'R$ et $PP'R'$ sont égaux. Donc la tangente est la bissectrice intérieure de l'angle FPF' formé par les rayons vecteurs menés des foyers au point de contact.

III. *Mener la tangente en un point* P *de la parabole.*

Soient P, P' (*fig.* 114) deux points infiniment voisins; si l'on mène au foyer F les rayons vecteurs FP, FP' et les perpendiculaires PN, $P'N'$ à la directrice D, et que l'on prenne en outre $N'S = PN$, $FR = FP$, on a

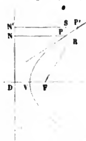
$$FP = PN, \quad FP' = P'N', \quad P'R = P'S.$$

Les angles N'P'P, FP'P sont égaux. La tangente est donc la bissectrice de l'angle FPN.

393. I. *Trouver l'aire du segment parabolique* FVP *compris entre la courbe, son axe* VF, *et un rayon vecteur* FP *issu du foyer* F.

Puisque PS = PR (*fig.* 114) et PN = FP, le triangle FPR est la moitié du parallélogramme PSNN'; si l'on prend entre V

Fig. 114.



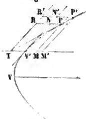
et P un certain nombre de points P', P'',..., on formera un certain nombre de triangles et de parallélogrammes dont les aires seront dans le rapport de 1 à 2; à la limite, la somme des parallélogrammes devient l'aire NPDV, et la somme des triangles l'aire FPV, qui est ainsi la moitié de la précédente, et, par suite, le tiers de l'aire du quadrilatère NPFD.

II. *Trouver l'aire du segment* PMV' *de parabole limité par une ordonnée* PM *et son diamètre conjugué* V'M.

Par le point T, où la tangente en P (*fig.* 115) rencontre le diamètre V'M, par l'extrémité V' de ce diamètre, et par le point P' infiniment voisin de P, menons des parallèles TR', V'N' et P'M' à l'ordonnée PM; les parallèles PR, P'R' menées par P et P' au diamètre couperont les précédentes en R, N, R', N'. Les parallélogrammes PR' et PM' sont équivalents (la diagonale TP' divisant en deux parties égales les parallélogrammes RM, R'M'); d'ailleurs, V' étant le milieu de TM, le parallélogramme PN' est la moitié de PR'; si donc on prend

entre P et V′ un certain nombre de points P′, P″, P‴,..., on formera une série de parallélogrammes PM′..., PN′..., et

Fig. 115.

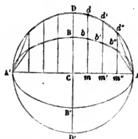


la somme des premiers sera double de la somme des seconds; l'aire V′PM est, par suite, double de l'aire V′PN; autrement dit, l'aire du segment parabolique PMV′ est les deux tiers de celle du parallélogramme PMV′N.

394. I. *L'aire de l'ellipse est égale à l'aire du cercle qui a pour rayon une moyenne proportionnelle entre les demi-axes de l'ellipse.*

Si l'on divise l'ellipse ABA′ (*fig.* 116) et le cercle ADA′ décrit sur le grand axe AA′ de l'ellipse comme diamètre, par

Fig. 116.



une série de parallèles dbm, $d'b'm'$,... au petit axe BC, on a la relation

$$mb : md :: m'b' : m'd' :: b : a,$$

et les aires des quadrilatères $mbb'm'$, $mdd'm'$,... sont entre

elles dans le rapport $b : a$; il en est de même de leurs sommes respectives, c'est-à-dire des polygones $Bbb' \ldots$ $A, Ddd' \ldots$ A inscrits dans l'ellipse et le cercle, quel que soit du reste le nombre des côtés de ces polygones. Donc *l'aire de l'ellipse est à celle du cercle dans le rapport de b à a*; et comme l'aire du cercle est égale à ϖa^2, celle de l'ellipse a pour valeur ϖab.

Corollaire. — On peut prouver, de la même manière, que, si deux figures sont telles, que les ordonnées de l'une soient dans un rapport constant avec les ordonnées de l'autre, les aires de ces figures sont entre elles dans le même rapport.

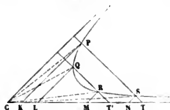
II. *Un diamètre quelconque d'une conique divise l'aire de la courbe en deux parties équivalentes.*

Le diamètre, divisant ses ordonnées en deux parties égales, divise, par cela même, en deux parties équivalentes l'aire du trapèze formé en joignant les extrémités de deux ordonnées consécutives; le nombre de ces trapèzes augmentant au delà de toute limite, la somme de leurs aires devient égale à l'aire de la courbe, qui est ainsi divisée en deux parties équivalentes par le diamètre.

395. I. *Dans l'hyperbole, l'aire du secteur* PCQ, *déterminé par les droites qui joignent deux points* P *et* Q *de la courbe au centre* C, *est équivalente à celle du segment* PQKL *obtenu en menant par ces points des parallèles* PK, QL *à une asymptote.*

D'après la génération de la courbe, les triangles PKC, QLC

Fig. 117.



(*fig.* 117) sont équivalents; donc les aires PQC et PQKL sont équivalentes.

II. *Deux segments* PQLK *et* RSNM *sont équivalents lorsqu'on a la proportion* PK : QL :: RM : SN.

En effet, l'équation de la courbe donne la relation

$$PK : QL :: CL : CK,$$

et si l'on mène les droites QR et PS, on a (197)

$$CL = MT', \quad CK = NT,$$

par suite,

$$RM : SN :: MT' : NT.$$

QR est donc parallèle à PS. Il est dès lors facile de voir que les secteurs PCQ, RCS sont équivalents, puisque le diamètre des cordes PS et QR divise en deux parties équivalentes l'aire hyperbolique PQRS, ainsi que les triangles PCS et QCR.

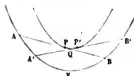
Lorsque les points Q et R coïncident, l'aire PKNS est divisée en deux parties équivalentes par l'ordonnée QL qui est alors moyenne géométrique entre les ordonnées PK, SN des extrémités de l'arc PQS.

De plus, si l'on mène un certain nombre d'ordonnées en progression géométrique continue, l'aire comprise entre deux ordonnées consécutives est constante.

396. *Lorsque deux coniques sont semblables, semblablement placées et concentriques, toute tangente* AB *à la conique intérieure détermine dans la conique extérieure un segment* AVB *dont l'aire est constante.*

Nous avons vu (236, Ex. V) que cette tangente AB (*fig.* 118) est divisée en deux parties égales par son point de contact P.

Fig. 118.



Si l'on mène une deuxième tangente A'B' ayant son point de

contact en P′ et coupant la précédente en Q, les angles AQA′ et BQB′ sont égaux; d'ailleurs, plus le point Q se rapprochera de P, plus les côtés AQ, AQ′ tendront à devenir égaux aux côtés BQ, B′Q; lors donc que les tangentes sont infiniment voisines, les triangles AQA′, BQB′ sont égaux, ainsi que les segments AVB et A′VB′. Le segment AVB, ne variant pas lorsqu'on passe d'une tangente à une tangente consécutive, est donc constant.

Corollaire. — On prouverait de la même manière que, lorsque la tangente à une courbe détermine sur une autre courbe un segment dont l'aire est constante, elle est divisée en deux parties égales au point de contact, et réciproquement que, si elle est divisée en deux parties égales au point de contact, elle détermine un segment d'aire constant.

On peut, en s'appuyant sur ce qui précède, mener par un point donné une corde déterminant dans une conique un segment minimum. En effet, pour déterminer un segment de grandeur donnée, il suffit de mener par le point une tangente à une conique semblable et concentrique, dont la distance à la première est d'autant plus grande que l'aire donnée est elle-même plus grande. Pour que l'aire soit minimum, il faut donc que la conique auxiliaire passe par le point donné, et comme alors la tangente qu'on lui mène y est divisée en deux parties égales, on voit que la corde menée par un point détermine dans une conique un segment d'aire minimum lorsqu'elle est divisée en ce point en deux parties égales.

De même, la corde menée par un point donné de manière à déterminer dans une courbe quelconque un segment maximum ou minimum est divisée en ce point en deux parties égales.

On démontrerait par des raisonnements analogues les deux théorèmes suivants, dus à feu le professeur Mac-Cullagh.

I. *Si une tangente* AB *à une courbe détermine sur une deuxième courbe un arc constant, elle est divisée au point de contact* P *de telle sorte que le rapport* AP : PB *est l'inverse*

du rapport AO : OB *des tangentes menées en* A *et* B *à la deuxième courbe.*

II. *Si la tangente* AB *est de longueur constante, et si* M *est la projection sur* AB *de l'intersection des tangentes en* A *et* B, *on aura* AP = MB.

397. *Trouver le rayon de courbure de l'ellipse.*

Le centre du cercle circonscrit à un triangle se trouvant à l'intersection des perpendiculaires menées aux côtés du triangle par leurs milieux, le centre du cercle qui passe par trois points consécutifs de la courbe est l'intersection de deux normales consécutives.

Lorsqu'on mène les bissectrices PN, PN' (*fig.* 112) des angles au sommet de deux triangles FPF', FP'F, qui ont une base commune, on a la relation

$$2\widehat{PNP'} = \widehat{PFP'} + \widehat{PF'P'}.$$

Si l'on observe qu'un arc de cercle est proportionnel à la fois à l'angle au centre correspondant et au rayon (391), on peut, en considérant PP' comme un arc de cercle ayant son centre en N, prendre le rapport $\frac{PP'}{PN}$ pour mesure de l'angle PNP'. Si, de plus, prenant FR = FP, F'R = F'R', on mesure les angles PFP', PF'P' par les rapports $\frac{PR}{FP}$, $\frac{P'R'}{F'P'}$, on a

$$\frac{2PP'}{PN} = \frac{PR}{FP} + \frac{P'R'}{F'P'};$$

mais

$$PR = P'R' = PP' \sin PP'F,$$

et, en représentant l'angle PP'F par θ, et les longueurs PN, FP, F'P par R, ρ et ρ', on obtient la relation

$$\frac{2}{R\sin\theta} = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'},$$

qui peut s'énoncer de la manière suivante : *La corde focale de courbure* (245, Ex. IV) *est égale au double de la moyenne*

harmonique des rayons vecteurs qui joignent les foyers au point de contact. En remplaçant respectivement $\sin\theta$, $\rho+\rho'$ et $\rho\rho'$ par $\frac{b}{b'}$, $2a$ et b'^2, on retombe sur la valeur connue du rayon de courbure $R = \frac{b'^3}{ab}$.

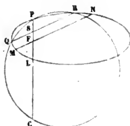
Le rayon de courbure de l'hyperbole ou de la parabole peut se déterminer de la même manière. Dans le cas de la parabole, ρ' devient infini, et la formule précédente se réduit à

$$\frac{2}{R\sin\theta} = \frac{1}{\rho}.$$

On peut encore arriver à la détermination de la corde focale de courbure par la méthode suivante, due à M. Townsend.

Menons une parallèle *quelconque* QR (*fig.* 119) à la tangente en P à la conique, et faisons passer par PQR un cercle

Fig. 119.



qui rencontre la corde focale de la conique en C; on a, dans le cercle, la relation

$$PS.SC = QS.SR.$$

D'ailleurs, MN étant la parallèle menée à la tangente par le foyer F, on a, dans la conique (193, Ex. II),

$$PS.SL : QS.SR :: PL : MN ;$$

donc, quel que soit le cercle,

$$SC : SL :: MN : PL,$$

et, comme pour le cercle de courbure S et P coïncident, il

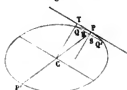
vient

$$PC : PL :: MN : PL,$$

c'est-à-dire *la corde focale de courbure est égale à la corde focale de la conique menée parallèlement à la tangente* (245, Ex. IV).

398. Le rayon de courbure d'une conique à centre C peut encore se trouver de la manière suivante. Si l'on prend sur la courbe un point Q (*fig.* 120) infiniment voisin du point P, la

Fig. 120.



parallèle QR′ à la tangente TP en P rencontre la normale en S et le diamètre PP′ de P en R. D'ailleurs QS est perpendiculaire au diamètre du cercle mené par P et Q tangentiellement à TT′ en P, et $\overline{PQ}^2$ est égal au produit de PS par le diamètre; le rayon de courbure est donc égal à

$$\frac{\overline{PQ}^2}{2PS}.$$

Mais, comme QR est toujours parallèle à la tangente et que PQ coïncide à la limite avec cette tangente, on aura à la limite PQ = QR; d'où, par une propriété connue de l'ellipse (en représentant par a', b', CP et son conjugué),

$$b'^2 : a'^2 :: \overline{QR}^2 : PR.RP'(= 2a'.PR);$$

donc

$$\overline{QR}^2 = \frac{2.b'^2.PR}{a'},$$

ce qui donne, pour le rayon de courbure R,

$$R = \frac{b'^2}{a'} \frac{PR}{PS};$$

et comme, quelque petits que soient PR et PS, on a toujours, en raison de la similitude des triangles, CT étant parallèle à la normale,

$$\frac{PR}{PS} = \frac{CP}{CT} = \frac{a'}{p},$$

l'expression du rayon de courbure se réduit à

$$R = \frac{b'^2}{p}.$$

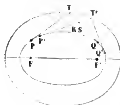
On démontrerait de même le théorème suivant :

Dans un système de deux coniques homofocales S *et* S' *se coupant en* A, *le centre de courbure correspondant au point* A *dans la conique* S *est par rapport à la conique* S' *le pôle de la tangente en* A *à la conique* S.

399. *Si par un point* T *d'une ellipse on mène deux tangentes* TP, TQ *à une ellipse homofocale, l'excès de la somme de ces tangentes sur l'arc qu'elles interceptent est constant* (*).

Si l'on prend un point T' (*fig.* 121) infiniment voisin du

Fig. 121.



premier, et que l'on mène les tangentes T'P', T'Q' et les perpendiculaires TR et T'S à PT' et TQ (348), il vient

$$PT = PR = PP' + P'R$$

(*) Ce beau théorème a été découvert par le Dr Graves, qui l'a énoncé dans sa traduction des Mémoires de M. Chasles sur les cônes et les coniques sphériques.

($P'R$ pouvant être considéré comme le prolongement de PP'); de même

$$Q'T' = QQ' + QS.$$

Et comme (194) les angles $TT'R$, $T'TS$ sont égaux, on a

$$TS = T'R,$$

par suite,

$$PT + TQ' = PT' + T'Q',$$

d'où l'on déduit

$$(PT + TQ) - (P'T' + T'Q') = PP' - QQ' = PQ - P'Q'.$$

Corollaire. — Le théorème est encore vrai pour deux courbes telles, que les tangentes TP, TQ menées par un point T de la courbe extérieure à la courbe intérieure fassent des angles égaux avec la tangente TT' menée en T à la courbe extérieure.

400. *Si l'on mène deux tangentes* TP, TQ *à une ellipse par un point* T *d'une hyperbole homofocale, la différence des arcs* PK *et* QK *est égale à la différence* TP — TQ *des tangentes* (*).

En prenant un point T' (*fig.* 122) infiniment voisin et répétant la construction du numéro précédent, on arrive aux relations

$$(T'P' - P'K) - (TP - PK) = T'R,$$
$$(T'Q' - Q'K) - (TQ - QK) = T'S.$$

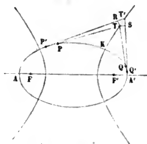
Mais $T'R = T'S$, puisque (189) TT' est la bissectrice de l'angle $RT'S$. Donc la différence entre l'excès de TP sur PK et celui de TQ sur QK est constante, et comme, dans le cas particulier où T coïncide avec K, ces deux excès et, par suite, leur différence s'évanouissent, il s'ensuit qu'on a, dans tous les cas,

$$TP - PK = TQ - QK.$$

(*) Cette extension du théorème précédent a été donnée par Mac-Cullagh (*Dublin, Exam. Papers*, 1841, p. 41; 1842, p. 68 et p. 83). M. Chasles y est arrivé de son côté (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, octobre 1843, t. XVII, p. 838).

Corollaire. — Un quadrant elliptique peut être divisé de telle manière que la différence des deux segments soit égale à la différence des demi-axes. Il suffit, en effet, pour déterminer

Fig. 122.



le point de division, de faire passer une hyperbole homofocale à l'ellipse donnée par l'intersection des tangentes menées à l'ellipse aux extrémités des axes. Les coordonnées x et y des points d'intersection sont, du reste,

$$x^2 = \frac{a^3}{a+b}, \quad y^2 = \frac{b^3}{a+b}.$$

Ce théorème est connu sous le nom de *théorème de Fagnani.*

401. *Si tous les sommets, moins un, d'un polygone circonscrit à une conique glissent sur des coniques homofocales, le sommet libre décrit une conique homofocale.*

Lorsque le sommet T d'un angle PTQ (*fig.* 121) circonscrit à une conique se meut sur une conique homofocale, si l'on désigne par a et b les diamètres parallèles à TP, TQ; par α et β les angles TPT', TQ'T' que font chacun des côtés avec leurs positions consécutives, on a la relation $a\alpha = b\beta$, qui résulte des égalités (399)

$$TR = T'S, \quad TR = TP.\alpha, \quad T'S = T'Q'.\beta,$$

et de ce que (149) TP et TQ sont proportionnels aux diamètres qui leur sont parallèles.

Réciproquement, quand on a $a\alpha = b\beta$, le point T se meut sur une conique homofocale. En effet, en reprenant les équa-

tions qui précèdent dans l'ordre inverse, on arrive à l'égalité $TR = T'S$ qui montre que TT' fait des angles égaux avec TP, TQ, et, par suite, coïncide avec la tangente à la conique homofocale menée par le point T. Le point T se trouve donc sur cette conique.

Si l'on désigne par $a, b, c, \ldots, n$ les diamètres de la conique inscrite, parallèles aux côtés du polygone, et par $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \nu$ les angles compris respectivement entre deux positions consécutives des côtés, les relations

$$a\alpha = b\beta, \quad b\beta = c\gamma, \ldots, \quad m\mu = n\nu$$

expriment que tous les sommets, moins un, glissent sur des coniques homofocales, et l'équation qui en résulte

$$a\alpha = n\nu$$

montre que le dernier sommet glisse aussi sur une conique homofocale (*).

(*) Cette démonstration a été donnée par le Dr Hart (*Cambridge and Dublin Math. Journ*, t. IV, p. 193).

NOTES.

SUR LE THÉORÈME DE PASCAL.

(Page 340.)

M. Steiner est le premier qui appela (*) l'attention des géomètres sur la figure complète obtenue en joignant de toutes les manières possibles six points pris sur une conique, par l'énoncé d'une série de théorèmes qui furent corrigés et étendus par M. Plücker (**). Ce sujet a encore été repris plus récemment (***) par M. Cayley et surtout par M. Kirkman, qui l'ont enrichi de nouveaux théorèmes.

Nons exposerons dans cette Note les plus importants de ces théorèmes dont la plupart peuvent s'obtenir à l'aide des principes les plus élémentaires de la théorie des combinaisons, et des théorèmes suivants ainsi que de leurs réciproques :

Lorsque les droites qui joignent les sommets correspondants de deux triangles concourent en un même point, qui est le *centre d'homologie* des deux triangles, *les intersections des côtés correspondants sont situées sur une ligne droite*, qui est *l'axe d'homologie* (60, Ex. III).

Lorsque dans un système de trois triangles, les intersections des côtés correspondants de deux quelconques d'entre eux sont situés en ligne droite, les centres d'homologie du premier et du second triangle, du second et du troisième, du troisième et du premier sont sur une même ligne droite.

Prenons sur une conique six points a, b, c, d, e, f que nous appellerons les points P. On peut les joindre deux à deux par *quinze* droites ab, ac, ad,..., qui seront les droites C. Chacune d'elles, ab par exemple, rencontre les quatorze autres; quatre au poiut a, quatre au point b, par conséquent six en des points (ab, cd),... distincts des points P et que nous appellerons p. Il y a *quarante-cinq* points p, puisque chaque ligne C en contient six, et qu'il passe deux lignes C par chacun d'eux.

(*) *Annales de Gergonne.*
(**) *Journal de Crelle*, t. V, p. 274.
(***) *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, t. V, p. 185.

Si l'on prend les côtés de l'hexagone dans l'ordre $abcdef$, le théorème de Pascal exprime que les trois points p, (ab, de), (cd, fa), (bc, ef) sont situés sur une même droite qui est le *Pascal abcdef* et que nous désignerons le plus souvent par la notation

$$\left\{ \begin{matrix} ab.cd.ef \\ de.fa.bc \end{matrix} \right\}$$

pour indiquer les points par lesquels il passe.

Par chaque point p, on peut mener quatre Pascals. Ainsi le point (ab, de) appartient aux quatre Pascals *abcdef*, *abfdec*, *abcedf*, *abfedc*. On trouvera, par conséquent, le nombre des Pascals, en multipliant par 4 le nombre des points p, et en divisant le produit par 3, puisqu'il y a trois points p sur chaque Pascal. Il y a donc *soixante* Pascals. On aurait pu obtenir ce résultat plus directement, en calculant le nombre d'arrangements possibles des lettres a, b, c, d, e, f.

Considérons les trois triangles

(1) $ab.cd.ef$

(2) $de.fa.bc$

(3) $cf.be.ad$

définis par leurs côtés. Les intersections des côtés correspondants de (1) et (2) appartiennent au même Pascal; par suite les droites qui joignent les sommets homologues concourent en un même point. Ces droites sont les trois Pascals

$$\left\{ \begin{matrix} ab.de.cf \\ cd.fa.be \end{matrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{matrix} cd.fa.be \\ cf.bc.ad \end{matrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{matrix} cf.bc.ad \\ ab.de.cf \end{matrix} \right\},$$

et nous avons ainsi le théorème de Steiner énoncé au n° 268. Leur point de concours, que nous appellerons le point g, sera désigné par la notation

$$\left\{ \begin{matrix} ab.de.cf \\ cd.fa.be \\ cf.bc.ad \end{matrix} \right\};$$

elle montre que sur chaque Pascal, il n'y a qu'un seul point g, puisqu'étant donné le Pascal

$$\left\{ \begin{matrix} ab.de.cf \\ cd.fa.be \end{matrix} \right\},$$

on obtient un point g, en ajoutant à chacune de ses colonnes verticales, un nouveau terme formé des deux lettres qui n'entrent point dans les

deux termes de cette colonne. Et comme il passe trois Pascals par chaque point g, il y a en tout *vingt* points g.

Les droites qui dans les triangles (2) et (3), (1) et (2) joignent les sommets correspondants coïncident respectivement et sont concourantes; on voit donc, en se reportant au théorème réciproque de la deuxième proposition rappelée plus haut, que les trois *axes* de ces trois triangles concourent en un même point

$$\left\{\begin{matrix} ab.cd.ef \\ de.fa.bc \\ cf.be.ad \end{matrix}\right\}$$

qui est un point g, conjugué harmonique par rapport à la conique de celui trouvé précédemment. Les vingt points g forment donc, ainsi que l'a montré Steiner, dix couples de points conjugués. Les Pascals qui passent par ces deux points g correspondent respectivement aux hexagones *abefcd*, *afedcb*, *adebcf*; *abcdef*, *afebcd*, *adcfeb*, dans lesquels les sommets de rang impair conservent la même position relative.

Soient les trois triangles

$$\begin{array}{llll}
(1) & ab & cd & ef \\
(4) & \left\{\begin{matrix} ab.ce.df \\ de.bf.ac \end{matrix}\right\}, & \left\{\begin{matrix} cd.bf.ae \\ af.ce.bd \end{matrix}\right\}, & \left\{\begin{matrix} ef.bd.ac \\ be.ac.df \end{matrix}\right\}, \\
(5) & \left\{\begin{matrix} ab.ce.df \\ cf.bd.ae \end{matrix}\right\}, & \left\{\begin{matrix} cd.bf.ae \\ be.ac.df \end{matrix}\right\}, & \left\{\begin{matrix} ef.bd.ac \\ ad.ce.bf \end{matrix}\right\}.
\end{array}$$

Les intersections des côtés homologues do (1) et (4) sont trois points qui appartiennent au même Pascal; par suite, les droites qui joignent les sommets correspondants concourent en un même point. D'ailleurs ces droites sont les trois Pascals

$$\left\{\begin{matrix} ab.ce.df \\ cd.bf.ae \end{matrix}\right\}, \quad \left\{\begin{matrix} cd.bf.ae \\ ef.ac.bd \end{matrix}\right\}, \quad \left\{\begin{matrix} ef.ac.bd \\ ab.df.ce \end{matrix}\right\}.$$

Leur point de concours

$$\left\{\begin{matrix} ab.ce.df \\ cd.bf.ae \\ ef.ac.bd \end{matrix}\right\}$$

sera un point h, dont la notation diffère de celle d'un point g en ce qu'elle ne renferme qu'une seule colonne verticale comprenant les six lettres sans omission ni répétition.

Sur chaque Pascal

$$\left\{\begin{array}{c} ab.cd.ef \\ de.af.bc \end{array}\right\}$$

se trouvent les trois points h

$$\left\{\begin{array}{c} \overline{ab}.cd.ef \\ de.af.bc \\ cf.bd.ae \end{array}\right\}, \quad \left\{\begin{array}{c} ab.\overline{cd}.ef \\ de.af.bc \\ ae.bc.df \end{array}\right\}, \quad \left\{\begin{array}{c} ab.cd.\overline{ef} \\ de.af.bc \\ bf.ce.ad \end{array}\right\}.$$

(Les colonnes placées sous le signe — sont celles qui contiennent les six lettres.) Nous avons ainsi le théorème de Steiner, étendu par M. Kirkman.

Les Pascals se coupent trois par trois, non-seulement aux vingt points g de Steiner, mais encore en soixante autres points h.

La démonstration du n° 268 s'applique aussi bien au théorème de M. Kirkman qu'à celui de Steiner.

Les lignes qui dans les triangles (1) et (5) joignent les sommets correspondants se confondent avec les droites analogues des triangles (1) et (4); les côtés homologues se coupent donc sur une même droite, qui est un Pascal. De même, les côtés homologues de (4) et (5) se coupent aux trois points h

$$\left\{\begin{array}{c} \overline{ab}.ce.df \\ de.bf.ac \\ cf.ae.bd \end{array}\right\}, \quad \left\{\begin{array}{c} ae.\overline{cd}.bf \\ bd.af.ce \\ ae.bc.df \end{array}\right\}, \quad \left\{\begin{array}{c} ac.bd.\overline{ef} \\ df.ae.bc \\ ce.bf.ad \end{array}\right\},$$

qui sont en ligne droite.

De plus les axes de (4) et (5), de (1) et (4), de (1) et (5) concourent en un même point, qui est le point g

$$\left\{\begin{array}{c} ab.cd.ef \\ de.af.bc \\ cf.be.ad \end{array}\right\},$$

dont la notation s'obtient en combinant les trois colonnes verticales complètes, des trois points h. On a ainsi le théorème suivant :

Il y a vingt lignes G, qui contiennent chacune un point g et trois points h.

Ces lignes ont été indiquées par M. Cayley et par M. Salmon. La démonstration donnée plus haut est celle de M. Cayley.

On peut démontrer de la même manière que *les vingt lignes G passent*

quatre par quatre, par quinze points i. En effet les quatre droites G sur lesquelles se trouvent les points *h*, qui dans la notation précédente ont une colonne verticale commune, passent par le même point.

Si l'on considère trois Pascals passant par un même point *h*,

$$\left\{\begin{matrix} ab.ce.df \\ de.bf.ac \end{matrix}\right\},\quad \left\{\begin{matrix} de.bf.ac \\ cf.ae.bd \end{matrix}\right\},\quad \left\{\begin{matrix} cf.ae.bd \\ ab.df.ce \end{matrix}\right\},$$

on peut, en prenant sur chacun d'eux un point *p*, former un triangle ayant $(df.ac)$, $(bf.ae)$, $(bd.ce)$ pour sommets, et par suite pour côtés

$$\left\{\begin{matrix} ac.bf.de \\ df.ae.cb \end{matrix}\right\},\quad \left\{\begin{matrix} bf.ce.ad \\ ac.bd.ef \end{matrix}\right\},\quad \left\{\begin{matrix} bd.ae.cf \\ ce.df.ab \end{matrix}\right\}.$$

Si de plus on prend sur chacun d'eux un point *h*, en écrivant sous chaque Pascal *af*, *cd*, *be*, on forme un triangle dont les côtés sont

$$\left\{\begin{matrix} ac.bf.de \\ be.cd.af \end{matrix}\right\},\quad \left\{\begin{matrix} cf.ae.bd \\ be.cd.af \end{matrix}\right\},\quad \left\{\begin{matrix} df.ab.ce \\ be.cd.af \end{matrix}\right\}.$$

Les intersections des côtés homologues de ces triangles, qui doivent être situés en ligne droite, sont les trois points *g*

$$\left\{\begin{matrix} be.cd.af \\ ac.bf.de \\ df.ae.bc \end{matrix}\right\},\quad \left\{\begin{matrix} be.cd.af \\ cf.ae.bd \\ ad.bf.ce \end{matrix}\right\},\quad \left\{\begin{matrix} be.cd.af \\ df.ab.ce \\ ae.cf.bd \end{matrix}\right\},$$

auxquels on peut en ajouter un quatrième

$$\left\{\begin{matrix} be.cd.af \\ cf.ab.de \\ ad.cf.be \end{matrix}\right\},$$

en se guidant sur la symétrie de la notation, qui fait voir que ce quatrième point doit se trouver sur la droite déterminée par les trois autres. Ces points *g* sont du reste les seuls dans l'expression desquels on puisse faire entrer *be.cd.af*. D'ailleurs on peut former quinze produits de la forme *be.cd.af*, ce qui donne le théorème de Steiner.

Les points g sont situés quatre par quatre sur quinze droites I.

Les théoremes que nous venons de démontrer sont assujettis, ainsi que l'a fait remarquer M. Hesse, à une certaine loi de réciprocité. Ainsi il y a *soixante* points *h* de Kirkman auxquels correspondent *soixante* lignes H de Pascal. Par chacun des *vingt* points *g* de Steiner passent *trois Pascals* H et *une ligne* G; à chacune des *vingt* droites G appartiennent *trois points h*

de Kirkman et *un point* g de Steiner. Les *vingt lignes* G passent, quatre par quatre, par *quinze points* i, et les *vingt points* g sont situés, quatre par quatre, sur *quinze droites* I.

Les indications suivantes, qui peuvent fournir une démonstration de quelques-uns des théorèmes précédents, servent en outre à déterminer le point h qui correspond au Pascal obtenu en prenant les sommets dans un ordre déterminé *abcdef*. Considérons les deux triangles inscrits *ace*, *bdf* : leurs côtés sont tangents à une même conique (335, Ex. IV), et l'on peut appliquer le théorème de Brianchon à l'hexagone dont les côtés sont *ce*, *df*, *ae*, *bf*, *ac*, *bd*. En prenant les côtés dans cet ordre, les diagonales de l'hexagone sont les trois Pascals concourant au point h

$$\left\{\begin{matrix} ce.bf.\overline{ad} \\ df.ac.be \\ ae.bd.cf \end{matrix}\right\},$$

et puisqu'en conservant les côtés de rang impair, on peut effectuer sur les trois autres une permutation circulaire, on voit, d'après le théorème réciproque du théorème de Steiner, que les trois points de Brianchon qui résultent de cette permutation appartiennent à une même droite : par suite, qu'il y a trois points h sur une ligne G. En partant du même hexagone circonscrit, on voit, en outre, que les droites qui joignent respectivement les points a et $(bc.df)$, d et $(ac.ef)$ se coupent sur le Pascal *abcdef*, et que chaque Pascal contient six intersections analogues.

Dans une publication récente (*), M. Cayley a déduit les propriétés de cette figure en la considérant comme la projection des intersections de six plans.

DES SYSTÈMES DE COORDONNÉES TANGENTIELLES.

(Page 402.)

Dans le cours de cet Ouvrage, nous avons habituellement considéré comme coordonnées tangentielles d'une droite $l\alpha + m\beta + n\gamma$, les constantes l, m et n de l'équation de cette droite (70), et nous avons appelé *équation tangentielle* d'une courbe, la relation qui doit exister entre ces constantes pour que cette droite soit tangente à la courbe. Ce système, auquel on peut du reste ramener tous les autres systèmes de coordonnées tangentielles, nous paraissait lié d'une façon plus intime aux

(*) *Quarterly Journal*, t. IX, p. 348.

théories qui font l'objet de ce Traité. Nous donnerons dans cette Note quelques indications complémentaires sur ce système, et nous exposerons sommairement les principes de quelques autres sytèmes de coordonnées tangentielles.

Nous avons vu (132, Ex. VI) que l'équation tangentielle d'un cercle de rayon r, ayant son centre en $(\alpha', \beta', \gamma')$ est de la forme

$$(l\alpha' + m\beta' + n\gamma')^2$$
$$= r^2(l^2 + m^2 + n^2 - 2mn\cos A - 2nl\cos B - 2lm\cos C).$$

En égalant séparément son deuxième membre à zéro, on obtient une équation qui se décompose en deux facteurs et, par suite, représente deux points que nous allons déterminer. Ce produit a été obtenu, en formant, dans le développement de $l\alpha + m\beta + n\gamma$ (61) la somme des carrés des coefficients de x et y, $l\cos\alpha + m\cos\beta + n\cos\gamma$, $l\sin\alpha + m\sin\beta + n\sin\gamma$; d'ailleurs la relation $a^2 + b^2 = 0$ exprime que la droite $ax + by + c = 0$ est parallèle à l'une ou à l'autre des droites $x \pm y\sqrt{-1} = 0$. Ces deux points sont donc les deux points imaginaires et à l'infini du cercle.

Ce résultat peut du reste se déduire directement de l'équation tangentiello du cercle que nous venons de rappeler. Soient en effet ω et ω' les deux facteurs qui forment le deuxième membre de l'équation, α le centre; cette équation pourra se mettre sous la forme $\alpha^2 = r^2\omega\omega'$, qui montre que ω et ω' sont les points de contact des tangentes menées au cercle par α.

De même, si, pour former l'équation tangentielle d'une conique dont les foyers sont donnés, on exprime que le produit des distances d'une tangente aux foyers est constante, on obtient la relation

$$(l\alpha' + m\beta' + n\gamma')(l\alpha'' + m\beta'' + n\gamma'') = b^2\omega\omega',$$

qui montre que la conique est tangente aux droites qui joignent les deux foyers aux points ω, ω' (279).

Le résultat obtenu en substituant les coordonnées tangentielles d'une droite dans l'équation d'un point est proportionnel à la distance de la droite à ce point (61); et en interprétant, d'après ce principe, les équations tangentielles $\alpha\beta = k\gamma\delta$, $\alpha\gamma = k\beta^2$, on retombe sur les théorèmes démontrés comme réciproques au n° 311. De même, le résultat obtenu en substituant, aux coordonnées courantes de l'équation du cercle, les coordonnées tangentielles d'une droite, est proportionnel au carré de la corde interceptée par le cercle sur la droite; si donc Σ et Σ' représentent deux cercles, l'équation $\Sigma = k^2\Sigma'$ exprime que l'enveloppe d'une droite, sur laquelle deux cercles donnés déterminent des segments qui sont dans un

rapport constant, est une conique qui touche les tangentes communes aux deux cercles.

Remarquons enfin qu'un système de deux points ne peut pas être représenté par une équation trilinéaire, pas plus qu'un couple de droites par une équation tangentielle. Lorsqu'on se donne une équation tangentielle représentant deux points, et que l'on forme, comme au n° 285, l'équation trilinéaire correspondante, on obtient pour résultat le carré de l'équation de la droite qui joint ces deux points, mais toute trace des points eux-mêmes a disparu. De même, l'équation trilinéaire du couple de droites passant par un point $(\alpha', \beta', \gamma')$ correspond à l'équation tangentielle $(l\alpha' + m\beta' + n\gamma')^2 = 0$. D'ailleurs, une droite est tangente à une courbe lorsqu'elle la rencontre en deux points qui coïncident, et quand une conique se transforme en un couple de droites, toute droite qui passe par leur intersection peut être considérée comme une tangente du système.

La méthode des coordonnées tangentielles peut être présentée sous une forme qui ne suppose aucune connaissance préalable des coordonnées cartésiennes ou trilinéaires. De même que, dans ce dernier système, nous avons défini la position d'un point par les rapports mutuels de ses distances à trois droites fixes, de même nous pouvons (311) définir une droite par les rapports mutuels de ses distances à trois points fixes. Il est alors facile de voir, en suivant la même marche qu'au n° 7, que si λ et μ sont les distances à cette droite de deux points A et B, la distance du point, qui divise AB dans le rapport de m à l a pour expression $\frac{l\lambda + m\mu}{l+m}$: par suite, la relation $l\lambda + m\mu = 0$, qui exprime qu'une droite passe par ce point, peut être considérée comme l'équation de ce point. Ainsi $\lambda + \mu = 0$ représente le milieu de AB, et $\lambda - \mu = 0$ est l'équation d'un point situé à l'infini sur AB. On démontrerait de même (7, Ex. VI) que $l\lambda + m\mu + n\nu = 0$ représente un point O (*fig.* 39, p. 87) qu'on peut obtenir en divisant respectivement, soit BC et AD dans les rapports de n à m, et de $m + n$ à l, soit AC et BE dans les rapports de l à n et de $l + n$ à m, soit enfin AB et CF dans les rapports de m à l et de $l + m$ à n. Si l'on observe que le rapport des triangles AOB et AOC est le même que celui de BD à BC, on voit que l'on peut mettre l'équation du point O sous la forme

$$\text{BOC}.\lambda + \text{COA}.\mu + \text{AOB}.\nu = 0,$$

ou, en remplaçant l'aire de chaque triangle BOC par sa valeur $\rho'\rho''\sin\theta$ (311),

$$\frac{\lambda \sin\theta}{\rho} + \frac{\mu \sin\theta'}{\rho'} + \frac{\nu \sin\theta''}{\rho''} = 0.$$

Les coordonnées de la droite à l'infini sont $\lambda = \mu = \nu$, puisque tous les points situés à une distance finie peuvent être considérés comme également distants de cette droite; par suite, le point $l\lambda + m\mu + n\nu$ sera situé à l'infini, quand on aura $l + m + n = 0$: plus généralement, une courbe est tangente à la droite à l'infini lorsque la somme des coefficients de son équation est égale à zéro. On verrait, de même, que les intersections des médianes, des bissectrices et des hauteurs du triangle de référence ont respectivement pour équations

$$\lambda + \mu + \nu = 0, \quad \lambda \sin A + \mu \sin B + \nu \sin C = 0,$$
$$\lambda \operatorname{tang} A + \mu \operatorname{tang} B + \nu \operatorname{tang} C = 0.$$

Nous bornerons ici l'étude des applications de ces coordonnées, parce qu'en définitive, elles ne diffèrent que par un facteur constant de celles dont nous avons fait usage habituellement. En effet, la distance d'un point $(\alpha', \beta', \gamma')$ à une droite $l\alpha + m\beta + n\gamma$ a pour valeur l'expression (61)

$$\frac{l\alpha' + m\beta' + n\gamma'}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2 - 2mn\cos A - 2nl\cos B - 2lm\cos C}},$$

dans laquelle le dénominateur est indépendant de la position du point. Si donc p, p', p'' représentent les distances des sommets du triangle de référence aux côtés opposés, les distances λ, μ et ν de ces sommets à cette droite sont respectivement proportionnelles à lp, mp', np''; et on peut facilement transformer les équations tangentielles ordinaires, qui sont homogènes en l, m, n, en de nouvelles équations tangentielles exprimées au moyen des distances λ, μ et ν. Il est d'ailleurs évident, d'après ce que nous venons de dire, que les valeurs de λ, μ et ν vérifient la relation

$$\frac{\lambda^2}{p^2} + \frac{\mu^2}{p'^2} + \frac{\nu^2}{p''^2} - 2\frac{\mu\nu}{p'p''}\cos A - 2\frac{\nu\lambda}{p''p}\cos B - 2\frac{\lambda\mu}{pp'}\cos C = 1.$$

Nous avons du reste indiqué (311) la marche à suivre pour déduire de l'équation trilinéaire d'une courbe l'équation en coordonnées tangentielles de la courbe réciproque.

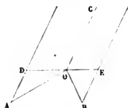
Au système de coordonnées tangentielles, défini par trois points de référence, se rattachent deux autres systèmes, qui en paraissent indépendants de prime abord : ce sont ceux qu'on obtient en supposant qu'un ou deux des points de référence s'éloignent à l'infini.

Supposons qu'un des points de référence C (*fig.* 123) soit à l'infini; ν et p'' deviennent à la fois infinis ; mais leur rapport reste fini et égal à sinCOE, DOE étant une droite quelconque menée par le point O. L'équation du point donnée plus haut prend alors la forme

$$\frac{\sin\theta}{p}\,\frac{\lambda}{\sin COE} + \frac{\sin\theta'}{p'}\,\frac{\mu}{\sin COE} + \sin\theta'' = 0.$$

Lorsque le point O est donné, elle ne contient que les deux variables $\lambda : \sin COE$, $\mu : \sin COE$, qui, en raison de l'égalité $\sin COE = \sin ODA$, peuvent êtres remplacées par AD et BE. En d'autres termes, si l'on prend

Fig. 123.



pour coordonnées les segments AD et BE déterminés par une droite variable DE sur deux parallèles fixes AD et BE, une équation quelconque $a\lambda + b\mu + c = 0$ représente un point et peut être considérée comme la forme prise par l'équation homogène $a\lambda + b\mu + c\nu = 0$, lorsque le point $\nu = 0$ s'éloigne à l'infini. (*Voir* n° 69.)

L'exemple suivant se rapporte à l'emploi de pareilles coordonnées. On sait, d'après la théorie des sections coniques, que l'équation générale du second degré peut se ramener à la forme $\alpha\beta = k^2$, dans lesquelles α et β sont des fonctions linéaires des coordonnées : et ce résultat analytique est complétement indépendant de l'interprétation géométrique que l'on peut donner des équations. Il en résulte que, dans le système de coordonnées indiqué plus haut, l'équation générale des courbes de la seconde classe peut se ramener à la même forme $\alpha\beta = k^2$, qui représente alors une courbe, à laquelle appartiennent les points α et β, et qui a pour tangentes, en ces points, les parallèles qui joignent α et β au point k situé à l'infini. On retombe ainsi sur le théorème bien connu : *Dans une conique, toute tangente variable détermine sur deux tangentes fixes et parallèles des segments dont le produit est constant.*

Considérons enfin le cas où deux des points de référence s'éloignent à l'infini. L'équation du point devient alors (*fig.* 124)

$$\frac{\lambda \sin\theta}{\rho} + \sin\theta' \sin BOD + \sin\theta'' COE = 0,$$

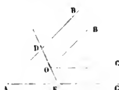
ou, comme il est facile de le voir,

$$\frac{\sin\theta}{\rho} + \sin\theta' \frac{1}{AD} + \sin\theta'' \frac{1}{AE} = 0.$$

Lorsque le point O est donné, cette équation ne renferme comme va-

riables que les segments AD et AE. Si donc on prend, pour coordonnées d'une droite, les *inverses* des segments qu'elle détermine sur les axes, une

Fig. 124.



équation linéaire entre ces coordonnées représente un point, et une équation du degré n, une courbe de la $n^{ième}$ classe.

Il est d'ailleurs évident que l'équation tangentielle obtenue de cette manière est de la même forme que celle que nous avons employée jusqu'ici, et qui a pour coordonnées soit les coefficients l, m de l'équation en coordonnées cartésiennes $lx + my = 1$, soit les rapports mutuels des coefficients de l'équation analogue $lx + my + n = 0$.

SUR LA FORME DONNÉE PAR M. CASEY A L'ÉQUATION D'UNE CONIQUE AYANT UN DOUBLE CONTACT AVEC UNE CONIQUE FIXE, ET TANGENTE A TROIS AUTRES CONIQUES.

(Page 505.)

On peut obtenir cette équation en suivant une marche analogue à celle indiquée au n° **132**, Ex. IV. Soient

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0, \quad lx + my + nz = 0, \quad l'x + m'y + n'z = 0$$

les équations de la conique S et des droites L et M. La condition pour que les deux coniques $S - L^2$, $S - M^2$ se touchent, peut s'écrire (387)

$$(1 - S')(1 - S'') = (1 - R)^2,$$

en posant $S' = l^2 + m^2 + n^2$, $S'' = l'^2 + m'^2 + n'^2$, $R = ll' + mm' + nn'$. Désignons en outre, pour abréger, par (12) la quantité

$$\sqrt{(1 - S')(1 - S'')} - (1 - R).$$

Si l'on effectue, d'après les règles connues, le produit des deux expressions

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & l & m & n & \sqrt{1-S'} \\ 1 & l' & m' & n' & \sqrt{1-S''} \\ 1 & l'' & m'' & n'' & \sqrt{1-S'''} \\ 1 & l''' & m''' & n''' & \sqrt{1-S^{\text{IV}}} \\ 1 & l^{\text{IV}} & m^{\text{IV}} & n^{\text{IV}} & \sqrt{1-S^{\text{V}}} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & l & m & n & \sqrt{1-S'} \\ -1 & l' & m' & n' & \sqrt{1-S''} \\ -1 & l'' & m'' & n'' & \sqrt{1-S'''} \\ -1 & l''' & m''' & n''' & \sqrt{1-S^{\text{IV}}} \\ -1 & l^{\text{IV}} & m^{\text{IV}} & n^{\text{IV}} & \sqrt{1-S^{\text{V}}} \end{vmatrix},$$

on obtient le déterminant

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{1-S'} & 0 & (12) & (13) & (14) & (15) \\ \sqrt{1-S''} & (12) & 0 & (23) & (24) & (25) \\ \sqrt{1-S'''} & (13) & (23) & 0 & (34) & (35) \\ \sqrt{1-S^{\text{IV}}} & (14) & (24) & (34) & 0 & (45) \\ \sqrt{1-S^{\text{V}}} & (15) & (25) & (35) & (45) & 0 \end{vmatrix},$$

qui doit être nul, puisque les facteurs contiennent six lignes horizontales et seulement cinq colonnes. L'équation qu'on obtient ainsi est vérifiée par les invariants des cinq coniques qui ont un double contact avec S. Lorsque la conique (5) est tangente aux quatre autres, les expressions (15),... s'annulent, et les invariants des quatre coniques qui, ayant avec S un double contact, sont tangentes à une cinquième conique, satisfont à la relation

$$\begin{vmatrix} 0 & (12) & (13) & (14) \\ (12) & 0 & (23) & (24) \\ (13) & (23) & 0 & (34) \\ (14) & (24) & (34) & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

qui devient, après le développement,

$$\sqrt{(12)(34)} \pm \sqrt{(13)(24)} \pm \sqrt{(14)(23)} = 0.$$

On peut déduire de cette équation, celle d'une conique qui en touche trois autres, en opérant de la manière suivante. Lorsque le discriminant d'une conique s'annule on a $S = 1$, et la condition de contact avec une quelconque des autres coniques se réduit à $R = 1$; si donc α, β et γ sont les coordonnées d'un point vérifiant la relation $S - L^2 = 0$, c'est-à-dire

$x^2+y^2+z^2-(lx+my+nz)^2=0$, l'équation

$$x^2+y^2+z^2-\left\{\frac{\alpha x+\beta y+\gamma z}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}\right\}^2=0$$

représente une conique, dont le discriminant est nul, et qui touche $S-L^2$. Par suite, étant données les trois coniques $S-L^2$, $S-M^2$, $S-N^2$, si l'on prend un point quelconque (α,β,γ) sur la conique qui leur est tangente, et que l'on considère comme quatrième conique celle dont nous venons d'écrire l'équation, les quantités (14), (24), (34) ont respectivement pour valeurs $1-\frac{L}{\sqrt{S}}$, $1-\frac{M}{\sqrt{S}}$, $1-\frac{N}{\sqrt{S}}$, et les coordonnées d'un point quelconque de la conique tangente aux trois autres satisfont à la relation

$$\sqrt{(23)(\sqrt{S}-L)}\pm\sqrt{(31)(\sqrt{S}-M)}\pm\sqrt{(12)(\sqrt{S}-N)}=0.$$

SUR LE TRACÉ D'UNE CONIQUE ASSUJETTIE A CINQ CONDITIONS.

Nous avons vu (128) que cinq conditions déterminent une courbe du second degré; on peut donc, en général, tracer une conique lorsqu'on en connaît m points et n tangentes, $m+n$ étant égal à 5. Nous ne pensons pas qu'il y ait grande utilité à traiter séparément les cas où parmi les données s'en trouvent quelques-unes à l'infini, d'autant plus qu'il suffit presque toujours, pour construire la conique, de modifier légèrement la construction indiquée pour le cas général. Ainsi, par exemple, on sait qu'*une parallèle à une asymptote* équivaut à une condition, puisqu'on a ainsi un point de la courbe, celui qui est situé à l'infini sur cette parallèle. Pour tracer une conique, étant donnés quatre points et une asymptote, il suffit de supposer, dans la construction indiquée au n° 338, que le point E est à l'infini, et que les droites DE, QE sont paralleles à la droite donnée; ce qui n'entraine pas une modification bien grande dans le tracé primitif.

Une *asymptote* équivaut à deux conditions, puisque l'on se donne ainsi une tangente et son point de contact, qui est à l'infini sur l'asymptote, Dire que *la courbe est une parabole* correspond à une condition, puisque l'on connait alors une tangente qui est la droite à l'infini. Savoir que *la courbe est un cercle* implique deux conditions, puisque tous les cercles passent par deux mêmes points situés à l'infini. Un *foyer* équivaut à deux

tangentes (258) et par suite à deux conditions. On peut voir, du reste, qu'il suffit alors de trois autres conditions pour déterminer la conique, puisqu'en prenant le foyer pour origine, et se reportant au tracé des courbes réciproques, tout se réduit à décrire un cercle assujetti à trois conditions; et rien n'empêche de transformer par la méthode réciproque, pour revenir à la conique, la solution de ce problème, qu'il est facile d'obtenir par la géométrie élémentaire. Nous laissons au lecteur le soin de déterminer, par ce procédé, les directrices des quatre coniques définies par un foyer et trois points.

Le pôle d'une droite donnée par rapport à la conique équivaut à deux conditions. En effet, soient P le pôle de R'R" (*fig.* 54, p. 207) et T un point de la courbe; en prenant le quatrième harmonique T' on aura un autre point de la courbe; d'ailleurs si OT est une tangente, OT' en sera une autre. Si donc on se donne, outre une droite et son pôle, trois points ou trois tangentes, on peut en trouver immédiatement trois autres et tracer la courbe.

Le *centre* équivaut à deux conditions, puisque le centre est le pôle de la droite à l'infini. Connaître un point de la polaire d'un point donné représente une condition. Ainsi, dire que *la courbe est une hyperbole équilatère* revient à exprimer que les deux points à l'infini du cercle se trouvent chacun sur la polaire de l'autre par rapport à la courbe. Un *triangle autopolaire* équivaut à trois conditions (lorsque cette donnée se rapporte à une parabole, elle est la même que celle de trois tangentes):

1° *Construire une conique connaissant cinq points.* Nous avons montré (269), comment, avec le secours de la règle seulement, on peut déterminer autant de points de la courbe qu'on le désire: on peut également trouver la polaire d'un point quelconque par rapport à la courbe (146), ou le pôle d'une droite donnée, et par suite le centre.

2° *Cinq tangentes.* On peut transformer, par voie réciproque, la construction du n° 269; ou ramener ce problème au précédent d'après les indications de l'Exercice IV du n° 268.

3° *Quatre points et une tangente.* Nous avons déjà (345, Ex. IV) indiqué une solution de ce problème, qui en admet deux et, par suite, exige plus que l'emploi de la règle.

Soient AB, a, a', b, b' la tangente et les quatre points donnés; on a, d'après le théorème de Carnot (313)

$$Ac.Ac'.Ba.Ba'.Cb.Cb' = Ab.Ab'.Bc.Bc'.Ca.Ca',$$

et comme les points c et c' coïncident, cette relation suffit pour déterminer le rapport $\overline{Ac}^2 : \overline{Bc}^2$. On peut aussi ramener ce problème à l'un

des suivants, en observant que la connaissance de quatre points entraine (282) celle des polaires de trois points, et qu'en ayant une tangente on peut immédiatement en trouver trois; de telle sorte qu'on obtient ainsi quatre points et quatre tangentes.

4° *Quatre tangentes et un point*. La solution de ce problème peut se déduire de celle du précédent, par la méthode réciproque, ou par le procédé qui s'y trouve indiqué, puisqu'en se donnant quatre tangentes, il y a trois points dont on connait les polaires (146).

5° *Trois points et deux tangentes*. Le théorème suivant est un cas particulier de celui du n° 344. Les deux points où une droite rencontre une conique et ceux où elle coupe deux de ses tangentes appartiennent à un système en involution qui a pour un de ses foyers l'intersection de cette droite avec la corde de contact. Si donc la ligne qui joint deux des points donnés a et b est coupée par les deux tangentes en A et B, la corde de contact de ces tangentes passe par l'un ou l'autre des points fixes F et F', qui sont les foyers du système ($a.b.$A.B), (286, Ex.). De même la corde de contact passe par l'un ou l'autre des points fixes G, G' situés sur la droite qui joint les points donnés a et c. La corde de contact est donc l'une ou l'autre des droites FG, FG', F'G, F'G', et le problème admet quatre solutions.

6° *Deux points et trois tangentes*. Le triangle formé par les trois cordes de contact a ses sommets situés chacun sur une des tangentes, et comme, d'après le théorème énoncé plus haut, chacun de ces cotés passe par un point fixe de la droite qui joint les deux points fixes, on peut construire le triangle.

La construction d'une conique de laquelle on connait deux points ou deux tangentes, n'est qu'un cas particulier de celui où la conique doit avoir un double contact avec une conique donnée. Le tracé d'une conique ayant un double contact avec une conique donnée et tangente à trois droites, ou passant par trois points, a été indiqué aux n°s 328 et 387. Nous avons résolu au n° 286 le problème de trouver une conique ayant un double contact avec deux coniques données et passant par un point, ou tangente à une droite; et au n° 387 celui de tracer une conique ayant un double contact avec une conique donnée, et touchant en même temps trois autres coniques qui ont aussi un double contact avec la première.

DES SYSTÈMES DE CONIQUES ASSUJETTIES A QUATRE CONDITIONS.

Lorsqu'on ne donne que quatre conditions pour déterminer une conique, on peut trouver tout un système de coniques satisfaisant à ces conditions. Les propriétés des systèmes de courbes assujetties à un nombre de conditions inférieur d'une unité à celui qui est nécessaire pour les définir, ont été étudiées par MM. de Jonquières, Chasles, Zeuthen et Cayley (*); nous exposerons succinctement dans cette Note quelques-uns des résultats qu'on peut obtenir par la méthode des caractéristiques, méthode qui est due à M. Chasles.

Lorsque dans un système de coniques satisfaisant à quatre conditions, il y en a μ qui passent par un point donné, et ν qui touchent une droite donnée, on dit que μ et ν sont les *caractéristiques* du système. Ainsi les caractéristiques d'un système de coniques passant par quatre points sont 1 et 2, parce qu'en ajoutant aux conditions primitives un cinquième point on ne peut construire qu'une seule conique, tandis qu'en y ajoutant une tangente on peut en construire deux. De même, les caractéristiques des systèmes définis par trois points et une tangente, deux points et deux tangentes, un point et trois tangentes, quatre tangentes, sont respectivement (2, 4) (4, 4), (4, 2), (2, 1).

On peut déterminer *à priori* l'ordre et la classe de beaucoup de lieux liés au système, en se basant uniquement sur les définitions que nous avons données de l'ordre et de la classe : une courbe est du $n^{ième}$ ordre lorsqu'elle rencontre une droite quelconque en n points, réels ou imaginaires; une courbe est de la $n^{ième}$ classe lorsque par un point arbitraire on peut lui mener n tangentes, réelles ou imaginaires. Ainsi le lieu du pôle d'une droite donnée par rapport à un système dont les caractéristiques sont μ et ν est une courbe de l'ordre ν. En effet, si l'on examine en combien de points ce lieu peut couper la droite donnée, on voit qu'il ne peut la rencontrer que lorsque le pôle de la droite se trouve sur la droite, c'est-à-dire quand cette droite est tangente à une conique du système : et comme, par hypothèse, ce contact ne peut se produire que dans ν cas, le lieu est du degré ν. Ce résultat est en parfaite concordance avec ceux que nous avons obtenus dans quelques cas particuliers, comme le degré du lieu des centres des coniques passant par quatre points ou tangentes à quatre droites, etc.

(*) On trouvera l'indication des sources originales dans le Mémoire de M. Cayley (*Philosophical Transactions*, 1867, p. 75).

Déterminons maintenant l'ordre du lieu du foyer des coniques de ce système. En généralisant la question, au moyen de la conception des foyers exposée au n° 374, on voit que ce problème n'est qu'un cas particulier du suivant : Étant donnés deux points A et B, trouver le degré du lieu de l'intersection des tangentes menées respectivement aux coniques du système par A et B. Si l'on examine en combien de points ce lieu peut rencontrer la droite AB, on voit immédiatement que lorsqu'un de ses points est sur AB, AB est tangente à la conique. Soit T le point de contact; la tangente AT rencontre en T la tangente BT, et en B la deuxième tangente menée par B; de même la tangente BT rencontre en A la deuxième tangente menée par le point A. Par suite, à toutes les coniques qui touchent AB, correspondent sur AB trois points du lieu, qui est ainsi de l'ordre 3ν et dans lequel A et B sont des points multiples de l'ordre ν. Le lieu des foyers des coniques tangentes à quatre droites est donc une cubique, qui passe par les deux points du cercle situés à l'infini.

Lorsque parmi les conditions du système se trouve celle que la droite AB soit tangente aux coniques, toute transversale menée par A rencontre le lieu en ν points distincts de A, et A lui-même est un point multiple de l'ordre ν; le lieu se réduit alors à l'ordre 2ν. C'est celui du lieu des foyers des paraboles assujetties à trois conditions.

Le principe suivant est très-important au point de vue de ces recherches. Lorsque deux points A et A', appartenant à une droite, se correspondent de telle sorte qu'à une position quelconque de A correspondent m positions de A', et qu'à une position quelconque de A' correspondent n positions de A, il y a $m+n$ cas dans lesquels A et A' coïncident. Ce théorème se démontre, comme ceux des n°s 336 et 340. Si l'on prend la droite sur laquelle se trouvent A et A' pour axe des x, les abscisses x et x' de ces points sont assujettis à une certaine relation qui est par hypothèse du $m^{ième}$ degré en x, et du $n^{ième}$ en x', et qui devient, par suite, du degré $m+n$ lorsqu'on y fait $x=x'$.

Comme application de ce principe, cherchons l'ordre du lieu des points dont la polaire, par rapport à une conique fixe, est la même que par rapport à une conique du système, et voyons combien de ses points peuvent se trouver en ligne droite. Si l'on considère sur cette droite deux points A et A' tels, que la polaire de A par rapport à la conique fixe coïncide avec la polaire de A', par rapport à une des coniques du système, le problème revient à trouver dans combien de cas A et A' coïncident. Lorsque A est fixe, sa polaire par rapport à la conique fixe est fixe; le lieu du pôle de cette dernière ligne par rapport aux coniques du système est, d'après le premier théorème, de l'ordre ν, et détermine, par suite, sur la droite donnée ν positions du point A'. Examinons maintenant combien de positions

de A correspondent à une position déterminée de A'. D'après le théorème réciproque du premier, les polaires de A' par rapport aux coniques du système enveloppent une courbe de la classe μ, à laquelle, par suite, on peut mener μ tangentes par le pôle de la droite donnée AA', pris par rapport à la conique fixe. Par conséquent μ positions de A correspondent à une position de A' : il y a donc $\mu + \nu$ cas pour lesquels A et A' coïncident, et le lieu cherché est de l'ordre $\mu + \nu$.

Ce qui précède nous permet de déterminer immédiatement dans un système le nombre de coniques qui touchent une conique fixe, puisque chaque point de contact a même polaire par rapport à la conique fixe et à une conique du système. Ce point de contact se trouve donc à l'intersection de la conique fixe avec le lieu trouvé précédemment, qui la rencontre évidemment en $2(\mu + \nu)$ points. On obtient ainsi le nombre de coniques qui, touchant une conique fixe, sont assujetties à quatre conditions : quatre points, trois points et une tangente, deux points et deux tangentes, etc. Ces nombres, qui sont respectivement 6, 12, 16, 12, 6, nous permettent de calculer les caractéristiques des systèmes de coniques qui touchent une conique et satisfont à trois autres conditions : trois points, deux points et une tangente, etc. : elles ont pour valeurs respectives (6, 12), (12, 16), (16, 12), (12, 6).

De même, les coniques de ces différents systèmes qui touchent une deuxième conique fixe sont au nombre de 36, 56, 56, 36, ce qui donne (36, 56), (56, 56), (56, 36), pour les caractéristiques respectives des systèmes dont les courbes touchent deux coniques fixes et satisfont à deux conditions : deux points, un point et une tangente, deux tangentes.

Les coniques de ces différents systèmes qui touchent une troisième conique fixe sont au nombre de 184, 224, 184 : on a ainsi (184, 224), (224, 184) pour les caractéristiques des systèmes définis par trois coniques et un point, trois coniques et une tangente.

Le nonbre des coniques de ces systèmes qui touchent une quatrième conique est pour chacun d'eux de 816; et, par suite, on peut mener 3264 coniques qui touchent à la fois cinq coniques données.

Nous renverrons pour de plus amples détails aux Mémoires déjà cités, et nous nous contenterons d'ajouter ici que $2\nu - \mu$ coniques du système se réduisent à un couple de droites et $2\mu - \nu$ à un couple de points.

FIN.

TABLE ANALYTIQUE.

Aire. — Aire d'un polygone en fonction des coordonnées de ses sommets, p. 44, 186.

Aire d'un triangle en fonction des équations de ses côtés, p. 46.

Aire d'un triangle inscrit, circonscrit, à une conique, p. 293, 305.

Aire d'un triangle formé par trois normales, p. 306.

L'aire du triangle formé en joignant les extrémités de deux diamètres conjugués est *constante*, p. 223, 236.

L'aire comprise entre une tangente et les asymptotes est *constante*, p. 262.

L'aire du triangle formé par les polaires des milieux des côtés d'un triangle fixe par rapport à une conique inscrite est *constante*, p. 494.

Étant donnés deux diamètres, si de l'extrémité de l'un on abaisse une ordonnée sur l'autre on forme deux triangles *équivalents*, p. 241.

Détermination des aires par la méthode des infiniment petits, p. 518.

Aire *constante* déterminée dans une conique par la tangente à une conique homothétique, p. 521.

Les cordes qui interceptent une *aire constante* dans une courbe ont leur milieu sur leur enveloppe, p. 522.

Angle. — Angle compris entre deux droites définies en coordonnées cartésiennes, p. 29, 30.

Angle de deux droites en coordonnées trilinéaires, p. 89.

Angle de deux droites représentées par une seule equation, p. 101.

Angle de deux tangentes à une conique, p. 232, 291, 375.

Angle de deux diamètres conjugués, p. 235.

Angle des asymptotes en fonction de l'excentricité, p. 229.

Angle compris entre une tangente et un rayon vecteur focal, p. 250.

Angle sous lequel la tangente menée par un point est vue du foyer, p. 253, 282.

Angles ayant pour sommets les points limités d'un système de cercles, p. 406.

Théorèmes sur les angles qui ont leurs sommets au foyer. Démonstration basée sur la méthode des polaires réciproques, p. 397.

Démonstration par la géométrie sphérique, p. 467.

Théorème sur la manière dont se projettent les angles, p. 451, 455.

Angle excentrique. — Théorie de l'angle excentrique, p. 302.

Expression de l'angle excentrique en fonction de l'angle focal, p. 307.

Relation entre les angles excentriques de quatre points situés sur une circonférence, p. 319.

Apollonius, p. 462.

Arc. — Le milieu de la corde qui intercepte un arc de longueur constante est sur son enveloppe, p. 522.
Théorèmes sur les arcs des coniques, p. 527.

Asymptotes. — Les asymptotes sont des tangentes menées par le centre et dont le point de contact est à l'infini, p. 216.
Une asymptote est à elle-même son diamètre conjugué, p. 233.
Les asymptotes sont les diagonales du parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués, p. 259.
Équation générale des asymptotes, p. 380, 479.
Les asymptotes forment, avec deux diamètres conjugués, un faisceau harmonique, p. 414.
La portion de tangente limitée aux asymptotes a pour milieu le point de contact, p. 260.
Les segments déterminés sur une corde par la courbe et les asymptotes sont égaux, p. 260.
La longueur du segment déterminé sur l'asymptote par la corde qui joint un point quelconque de la courbe à deux points fixes est constant, p. 263, 411, 416.
Rapport des segments déterminés sur une corde par une parallèle à une asymptote, p. 416.
Segments déterminés par une parallèle à une asymptote sur deux tangentes et leur corde de contact, p. 416.
La distance d'un point à sa polaire, estimée parallèlement à une asymptote, a son milieu sur la courbe, p. 413.
Le produit des parallèles aux asymptotes menées par un point de la courbe est constant, p. 263, 410, 416.
Segments déterminés sur un diamètre par une parallèle à une asymptote, p. 416.

Axes. — Axes d'une conique; leur équation, p. 217.
Longueurs de ces axes; leur détermination, p. 219.
Construction géométrique des axes d'une conique, p. 225.
Tracé des axes lorsqu'on connaît deux diamètres conjugués, p. 240.
Axes de la courbe réciproque, p. 406.
Axe de la parabole, p. 267.
Axes de similitude, p. 156, 312, 394.
Axe radical, p. 144, 182.
Axe d'homologie, p. 88.

Bissectrices. — Équation des bissectrices des angles formés par deux droites, p. 102.

Bobillier. — Équations des coniques inscrite et circonscrite à un triangle, p. 173.

Boole (M.). — Invariants des coefficients de l'équation d'une conique, p. 219.

Brianchon. — Théorème sur l'hexagone circonscrit, p. 337, 391, 535.

Burnside (M.). — Théorèmes et démonstrations qui lui sont dus, p. 116, 306, 308, 334, 341, 356, 380, 482.

Carnot. — Théorèmes sur les transversales, p. 404, 447, 543.

Casey (M.). — Ses théorèmes, p. 163, 183, 189, 505, 540.

Cayley (M.) — Théorèmes qui lui sont dus, p. 188, 483, 494, 530, 545.

Centre. — Centre des distances proportionnelles, p. 72.
Centre d'homologie, p. 88.
Centre radical, p. 144, 394.
Centre de similitude, p. 152, 312, 394.
Les cordes qui joignent les extrémités des rayons vecteurs menés par le centre de similitude se coupent sur l'axe radical, p. 155, 312, 345.
Centre d'une conique; ses coordonnées, p. 199.
Le centre est le pôle de la droite à l'infini, p. 217, 413.
Sa détermination, lorsqu'on a cinq points de la conique, p. 342.
Centre d'un système en involution, p. 433.
Centre de courbure, p. 321, 524.

Cercle. — Équation du cercle, p. 17, 109, 126.
Équation tangentielle du cercle, p. 173, 179, 185, 536.
Le cercle passe par deux points imaginaires et à l'infini, p. 330.
Équation et centre du cercle circonscrit à un triangle, p. 124, 170, 186, 403.
Équation du cercle inscrit dans un triangle, p. 177, 402.
Équation du cercle rapportée à un triangle autopolaire comme triangle de référence, p. 352.
Équation du cercle passant par les milieux des côtés (*voir* Feuerbach), p. 125, 176.
Le cercle qui coupe deux cercles sous des angles constants est tangent à deux cercles fixes, p. 149.
Cercle tangent à trois cercles donnés, p. 159, 165, 407.
Cercle coupant orthogonalement trois cercles donnés, p. 148, 186.
Le cercle circonscrit à un triangle formé par trois tangentes à la parabole passe par le foyer, p. 283, 296, 384, 399, 450.
Cercle circonscrit au triangle formé par deux tangentes et une corde, p. 334.
Cercle circonscrit à un triangle inscrit dans une conique, p. 306, 469.
Cercle inscrit ou circonscrit à un triangle autopolaire, p. 481.
Les cercles circonscrits aux triangles formés par quatre droites passent par un même point, p. 341.
Étant données cinq droites, les foyers des paraboles tangentes à quatre d'entre elles sont situés sur un cercle, p. 341.
Détermination des tangentes, de l'aire et des arcs de cercle par les infiniment petits, p. 515.

Cercle directeur, p. 375, 497.
Les cercles directeurs des coniques inscrites dans un quadrilatère ont même axe radical, p. 388.

Cercle osculateur, p. 317, 325.
Il existe sur une conique trois points dont les cercles osculateurs passent par un même point de la courbe, p. 319.

Chasles (M.), p. 410, 412, 420, 427, 527, 545.

Classe d'une courbe, p. 205.

Conditions : — Pour que trois points soient en ligne droite, p. 34.
Pour que trois droites soient concourantes, p. 45, 48.
Pour que quatre droites concourantes forment un faisceau harmonique, p. 83.
Pour que deux droites soient perpendiculaires, p. 30, 88, 500.
Pour qu'une droite passe par un point fixe, p. 73.
Pour que l'équation du second degré représente : 1° deux droites, p. 104, 208, 213, 216, 370 ; — 2° un cercle, p. 109, 174, 496 ; — 3° une parabole, p. 196, 384, 496 ; — 4° une hyperbole équilatère, p. 234, 496.
Pour qu'une équation d'un degré quelconque représente des droites, p. 107.
Pour que deux cercles soient concentriques, p. 111.
Pour que quatre points appartiennent à une même circonférence, p. 126.
Pour que le segment déterminé par un cercle sur une droite soit vu sous un angle droit d'un point donné, p. 131.
Pour que deux cercles se coupent à angle droit, p. 147, 490.
Pour qu'une droite touche une conique, p. 117, 212, 368, 479.
Pour que deux coniques soient semblables et semblablement placées, p. 310.
Pour que deux coniques soient semblables, p. 313.
Pour que deux coniques soient tangentes, p. 474, 502.
Pour qu'un point soit situé en dehors d'une conique, p. 363, 495.
Pour que deux droites soient conjuguées par rapport à une conique, p. 371.
Pour que deux couples de points soient conjugués harmoniques, p. 428.
Pour que quatre points d'une conique appartiennent à un cercle, p. 319.
Pour qu'une droite soit divisée harmoniquement par deux coniques, p. 431.
Pour qu'une droite soit coupée en involution par trois coniques, p. 509.
Pour que trois couples de droites touchent la même conique, p. 376.
Pour que trois couples de points forment un système en involution, p. 435
Pour qu'un triangle puisse être inscrit dans une conique et circonscrit à un autre, p. 482.
Pour qu'un triangle autopolaire par rapport à une conique puisse être inscrit dans un autre, p. 479.
Pour que trois coniques aient un double contact avec une même conique, p. 506.
Pour que trois coniques passent par un même point, p. 511.
Pour que les droites qui joignent les sommets d'un triangle aux points où une conique rencontre les côtés forment deux systèmes de droites concourantes, p. 494.

Cône (Sections du), p. 459.

Coniques. — 1° Coniques homofocales. Elles se coupent à angle droit, p. 251, 453.
Elles peuvent être considérées comme inscrites dans un même quadrilatère, p. 352.
Équation la plus générale des coniques homofocales, p. 497.
Les tangentes menées à une conique (2) par un point d'une conique (1) homofocale sont également inclinées sur la tangente à (1), p. 252.
Le pôle, par rapport à une conique (2) de la tangente à une conique homofocale (1), est sur la normale à (1), p. 288.
Emploi des coniques homofocales pour trouver les axes des courbes réciproques, p. 406.

Emploi de ces coniques pour trouver le centre de courbure, p. 526.
Longueur de l'arc intercepté sur une conique par deux tangentes, p. 526.
Propriétés des coniques homofocales démontrées par la méthode des polaires réciproques, p. 406.
2° Coniques semblables et semblablement placées, p. 310.
Conditions pour que deux coniques soient semblables, p. 313.
Les coniques homothétiques ont deux points communs situés à l'infini, p. 328.
Toute tangente à une conique détermine une aire constante dans une conique homothétique et concentrique, p. 521.

Contact des sections coniques, p. 314.

Continuité (Principe de), p. 458.

Contrevariants, p. 487.

Coordonnées. — Coordonnées cartésiennes, p. 1, 95.
Coordonnées trilinéaires, p. 90.
Coordonnées tangentielles, p. 96.
Coordonnées polaires, p. 13.

Cordes. — Dans une conique la corde est perpendiculaire à la droite qui joint son pôle au foyer, p. 254, 452.
La corde qui touche une conique homofocale est proportionnelle au carré du demi-diamètre parallèle, p. 308.
Cordes d'intersection de deux coniques; leur équation, p. 471.
Cordes supplémentaires, p. 238.

Courbes parallèles, p. 475.

Courbure. — Rayon de courbure, sa longueur et sa construction, p. 317, 523.
Équation du cercle de courbure, p. 325.
Centre de courbure : ses coordonnées, p. 321.

Covariants, p. 487.

Critériums : — Pour reconnaître que trois droites sont concourantes, p. 48.
Pour voir si un point est à l'intérieur ou à l'extérieur d'une conique, p. 363.
Pour reconnaître lorsque deux coniques se coupent en deux points réels et deux points imaginaires, p. 474.

Descartes, p. 1.

Déterminants, p. 186.

Développées des coniques, p. 322, 476.

Diagonales d'un quadrilatère. — Leurs milieux sont en ligne droite, p. 36, 92, 300.
Les cercles décrits sur les diagonales comme diamètres ont même axe radical, p. 388.

Diamètres conjugués, p. 203.
Relation entre la longueur de deux diamètres conjugués, p. 223, 234.

L'aire du parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués est constante, p. 223, 236.

Deux diamètres conjugués forment avec les asymptotes un faisceau harmonique, p. 414.

Un diamètre est la polaire du point à l'infini de son conjugué, p. 413.

Construire deux diamètres conjugués qui se coupent sous un angle donné, p. 238.

Tracer le diamètre conjugué d'un diamètre donné, p. 304.

Directrice, p. 248.

Équation de la directrice de la parabole, p. 375, 496.

La directrice est le lieu des sommets des angles droits circonscrits à la parabole, p. 281, 375, 496.

La directrice passe par le point de concours des hauteurs du triangle circonscrit à la parabole, p. 293, 341, 385, 406, 482.

Discriminants, p. 369.

Leur formation, p. 104, 209, 212, 216.

Distance de deux points, p. 5, 15, 185.

Les distances de deux points au centre d'un cercle sont proportionnelles aux distances de ces points à leurs polaires, p. 136.

Dans quel cas la distance de deux points est une fonction rationnelle des coordonnées, p. 249.

Relation entre les distances mutuelles de quatre points pris sur un plan, p. 188.

Distance d'un point a une droite, p. 39, 89.

Distance du centre et des foyers a une tangente, p. 235, 250, 280.

Division harmonique, p. 83.

Ce qu'elle devient lorsqu'un des points s'éloigne à l'infini, p. 412.

Propriétés harmoniques du quadrilatère, p. 86, 446.

Proprietes des pôles et polaires, p. 122, 206, 413, 447.

Faisceau harmonique formé : 1° par deux tangentes et deux droites conjuguées, p. 207, 414.

2° Par les asymptotes et deux diamètres conjugués, p. 414.

3° Par les diagonales des quadrilatères inscrit et circonscrit, p. 335.

4° Par les cordes de contact et les cordes communes de deux coniques ayant un double contact avec une troisième, p. 335.

Propriétés harmoniques déduites par projection de théorèmes sur les angles droits, p. 451.

Condition analytique pour que quatre points forment un faisceau harmonique, p. 428.

Condition pour qu'une droite soit divisée harmoniquement par deux coniques, p. 431.

Lieu des points tels, que les tangentes menées par l'un d'eux à deux coniques forment un faisceau harmonique, p. 429.

Double contact, p. 315, 326.

Équation d'une conique ayant un double contact avec deux autres, p. 364.

Lorsque deux coniques ont un double contact, toute tangente à l'une est divisée harmoniquement par l'autre et la corde de contact, p. 439, 448.

Propriétés de deux coniques ayant un double contact avec une troisième, p. 335, 392.

Propriétés de trois coniques ayant un double contact avec une quatrième, p. 336, 393.

Équation tangentielle d'une conique ayant un double contact avec une conique donnée, p. 501.

Condition pour que deux coniques ayant un double contact avec une troisième se touchent, p. 502.

Décrire une conique tangente à trois coniques, la conique cherchée et les coniques données ayant toutes un double contact avec une conique fixe, p. 503, 505, 540.

Droites conjuguées, p. 371.

Dualité (Principe de), p. 386.

Ellipse. — Origine de cette dénomination, p. 258, 462.

Tracé mécanique de cette courbe, p. 247, 303.

Aire de l'ellipse, p. 519.

Enveloppes. — D'une droite : 1° dont l'équation renferme une indéterminée au deuxième degré, p. 358.

2° Telle que la somme de ses distances à plusieurs points fixes soit constante, p. 139.

3° Telle que le produit, la somme ou la différence des carrés, de ses distances à deux points fixes soit constant, p. 359.

Du troisième côté d'un triangle : 1° étant donnés l'angle opposé et la somme des autres côtés, p. 361.

2° Dont les sommets glissent sur trois droites, et dont les deux autres côtés passent par des points fixes, p. 359.

3° Inscrit dans une conique, et dont les deux autres côtés tournent autour de deux points fixes, p. 346, 392, 448.

4° Ce troisième côté étant vu sous un angle constant d'un point fixe et les autres côtés étant donnés de position, p. 398.

De la polaire d'un point fixe par rapport à une conique assujettie à quatre conditions, p. 378, 393.

De la polaire du centre d'un cercle tangent à deux cercles donnés, p. 407.

Des cordes d'une conique vues d'un point donné sous un angle constant, p. 254, 397, 398.

Des perpendiculaires élevées aux extrémités des rayons vecteurs menés par un point à un cercle, p. 399.

De l'asymptote des hyperboles : 1° ayant une directrice et un foyer communs, p. 398 ; — 2° définies par trois points et l'autre asymptote, p. 380.

De la droite qui joint les points correspondants de deux systèmes homographiques : 1° pris sur deux droites différentes, p. 425 ; — 2° pris sur une conique, p. 349, 425.

Du côté libre d'un polygone inscrit dans une conique, et dont les autres côtés passent par des points fixes, p. 346, 422.

Du troisième côté d'un triangle inscrit dans une conique, et dont les deux autres côtés enveloppent une conique, p. 492.

Du rayon d'un faisceau anharmonique donné, dans différentes conditions, p. 456.

D'une ellipse pour laquelle on donne la position de deux diamètres conjugués et la somme de leurs carrés, p. 361.

Équations. — Les équations en coordonnées cartésiennes ne sont qu'un cas particulier des équations trilinéaires, p. 95.

Ce que représente une équation lorsqu'on y remplace les coordonnées courantes par celle d'un point; cas de la ligne droite, du cercle, de la conique, p. 41, 121, 183, 333.

Même problème pour les équations tangentielles, p. 536.

Équations cartésiennes ou trilinéaires.

Des bissectrices des angles que forment deux droites, p. 102.

De l'axe radical de deux cercles, p. 143, 183.

Des tangentes communes à deux cercles, p. 150, 366.

Du cercle : 1° passant par trois points, p. 125, 186; — 2° coupant orthogonalement trois cercles donnés, p. 147, 186; — 3° tangent à trois cercles, p. 165, 188, 541; — 4° inscrit ou circonscrit dans un triangle, p. 170, 181, 403; — 5° ayant le triangle de référence pour triangle autopolaire, p. 352.

De la tangente à un cercle ou à une conique, p. 115, 204, 367.

De la polaire par rapport à un cercle ou à une conique, p. 119, 205, 368.

Du couple de tangentes menées à une conique : 1° par un point, p. 123, 208, 374; — 2° par les points où elle rencontre une droite, p. 379.

Des asymptotes d'une conique, p. 380, 479.

Des cordes d'intersection de deux coniques, p. 471.

Du cercle osculateur d'une conique, p. 321.

D'une conique : 1° passant par cinq points, p. 324; — 2° tangente à cinq droites, p. 383; — 3° ayant un double contact avec deux coniques données, p. 364; — 4° ayant un double contact avec une conique donnée et en touchant trois autres, p. 505, 541.

D'une conique passant par trois points, ou tangente à trois droites : 1° dont le centre est donné, p. 372; — 2° dont l'un des foyers est donné, p. 402.

De la conique réciproque d'une conique donnée, p. 407, 489, 501.

De la directrice et du cercle directeur, p. 375, 496.

Des droites qui joignent à un point les points d'intersection de deux courbes, p. 377, 431.

Des quatre tangentes menées à une conique par les points où elle est coupée par une autre conique, p. 386, 485.

De la courbe parallèle à une conique, p. 475.

De la développée d'une conique, p. 322, 476.

Du Jacobien de trois coniques, p. 508.

Équations tangentielles, p. 96, 386, 535.

Des cercles inscrit et circonscrit, p. 173, 179, 402.

D'une conique en général, p. 212, 361.

Du cercle en général, p. 185, 535.

Des points imaginaires et à l'infini du cercle, p. 495.

Des coniques homofocales, p. 498, 536.
Des points communs à deux coniques, p. 484.
Interprétation de cette equation, p. 536.

Équations en coordonnées polaires, p. 52, 126, 139, 224, 256, 283.
Équations homogènes à deux variables; leur signification, p. 98.

Euler. — Expression de la distance des centres des cercles inscrit et circonscrit, p. 483.

Excentricité. — Excentricité d'une conique définie par l'équation générale, p. 229.
Elle ne dépend que de l'angle compris entre les asymptotes, p. 229.

Fagnani. — Théorèmes sur les arcs de coniques, p. 528.

Faure (Théorèmes de M.), p. 481, 494.

Feuerbach. — Relation entre quatre points pris sur un cercle, p. 126, 301.
Theorèmes sur les cercles tangents à quatre droites, p. 183, 187, 440, 506.

Foyers, de 245 à 257; de 287 à 292.
Le foyer est un cercle infiniment petit ayant un double contact avec la conique, p. 333.
Les foyers sont à l'intersection des tangentes menées par deux points fixes et imaginaires situés à l'infini, p. 333.
Un foyer équivaut à deux conditions, p. 542.
Coordonnées du foyer : 1° étant données trois tangentes, 384; — 2° lorsque la conique est définie par l'équation générale, p. 353, 497.
Foyer et directrice, p. 248, 333.
Théorèmes relatifs aux angles qui ont leur sommet au foyer, p. 397, 467.
Démonstration, par projection, des propriétés des foyers, p. 449.
Relation entre les inverses des segments des deux cordes qui joignent un point quelconque aux foyers, p. 292.
La droite qui joint l'intersection des normales à celles des tangentes menees aux extrémités d'une corde focale passe par l'autre foyer, p. 291.
Lieu du foyer des paraboles inscrites dans un triangle, p. 283, 296, 385, 399, 450.
Lieu du foyer des coniques : 1° inscrites dans un quadrilatère, p. 385, 388; — 2° circonscrites à un quadrilatère, p. 301, 403; — 3° étant donnés un point et trois tangentes, p. 403.
Détermination des foyers de la section d'un cône droit, p. 466.

Foyers d'un système en involution, p. 434.

Gaultier de Tours, p. 144.

Gergonne. — Tracé d'un cercle tangent à trois cercles donnés, p. 160.

Graves (Théorèmes du Dr), p. 469, 526.

Hart (Théorèmes et démonstrations du Dr), p. 178, 181, 366, 528.

Hearn (M.). — Methode pour déterminer le lieu du centre des coniques assujetties à quatre conditions, p. 372.

Hermes (M.). — Équation de la conique circonscrite à un triangle, p. 173.

Hesse (M.), p. 534.

Hexagone (voir Brianchon et Pascal). — Propriétés des angles de l'hexagone circonscrit, p. 376, 406.

Homographie. — Systèmes homographiques, p. 84, 94.
Critérium pour les reconnaître, et méthode pour les former, p. 427.
Lieu de l'intersection des droites correspondantes, p. 378.
Enveloppe de la droite qui joint des points correspondants, p. 425.

Homologie, p. 88, 530.

Homothétie, p. 310.

Hyperbole. — Origine de cette dénomination, p. 258, 462.
Aire de la courbe, p. 520.
Hyperboles conjuguées, p. 228.
Hyberbole équilatère; condition générale pour qu'une hyperbole soit équilatère, p. 234, 495.
L'hyperbole équilatère circonscrite à un triangle passe par le point de concours des hauteurs, p. 297, 406, 481.
Le cercle circonscrit à un triangle autopolaire passe par le centre, p. 298, 481.

Imaginaires. — Droites et points imaginaires, p. 99, 112.
Équation des points imaginaires et à l'infini du cercle, p. 495.
Les droites menées par ces points sont à elles-mêmes leurs perpendiculaires, p. 495.

Infini (Droite à l'); son équation, p. 94.
Elle est tangente à la parabole, p. 327, 405, 463.
Elle a pour pôle le centre de la courbe, p. 217, 413.

Invariants, p. 219, 472.

Inversion des courbes, p. 165.

Involution, p. 431.

Jacobien de trois coniques, p. 507.

Joachimsthal. — Relation entre les angles excentriques de quatre points situés sur un cercle, p. 319.
Methode pour trouver les points d'intersection d'une droite et d'une courbe, p. 368.

Jonquières (M. de), p. 545.

Kirkman (Theorèmes sur l'hexagone de M.), p. 530.

Lieux géométriques. — Du sommet d'un triangle, étant donné le côté opposé et: 1° une relation entre les longueurs des autres côtés, p. 55, 68; — 2° une relation entre les angles, p. 55, 68, 128; — 3° les segments déterminés par les autres côtés sur une droite fixe, p. 420; — 4° le rapport des segments que ces côtés determinent sur une parallèle à la base, p. 59.
Du troisième sommet d'un triangle donné, dont les autres sommets glissent sur deux droites fixes, p. 286.

Du troisième sommet d'un triangle dont les angles sont donnés et dans lequel le premier sommet est fixe, tandis que le second glisse sur un lieu donné, p. 75, 141.

Du troisième sommet d'un triangle dont les côtes tournent autour de points fixes, tandis que les deux autres sommets glissent sur des droites fixes, p. 71, 342, 392, 419.

Généralisation de cet énoncé, p. 420.

Du troisième sommet d'un triangle dont les côtés enveloppent une conique, tandis que les deux autres sommets glissent sur des droites fixes, p. 346, 492. Généralisation, p. 494.

Du sommet commun de plusieurs triangles définis par un côté, ce sommet et la somme de leurs aires, p. 57.

Du sommet d'un cône droit ayant pour section une conique donnée, p. 467.

Du point qui divise dans un rapport donné : 1° les cordes parallèles dans un cercle, p. 226; — 2° une droite mobile sous certaines conditions par rapport à deux droites fixes, p. 57, 70; — 3° la portion de tangente variable comprise entre deux tangentes fixes à une conique, p. 387, 456.

Du point tel, que les tangentes menées de ce point à deux cercles soient dans un rapport donné, ou bien aient une somme donnée, p. 144, 365.

Du point pris suivant une loi déterminée sur des rayons vecteurs issus d'un point fixe, p. 74.

Du point tel, que la somme des carrés de ses distances à des points donnés soit constante, p. 129.

D'un point tel, que le carré de la tangente menée à un cercle par ce point soit dans un rapport constant avec le produit de ses distances à deux droites fixes, p. 332.

Du point déterminant une division anharmonique donnée sur une corde menée par un point fixe à une conique, p. 449.

D'un point pris sur la hauteur d'un triangle à une distance de la base égale à cette base, étant données cette base et la somme des deux autres côtés, p. 56.

D'un point tel, que la surface du triangle formé par ses projections sur les trois côtés d'un triangle donné soit constante, p. 172.

D'un des points o d'une transversale, de direction donnée, rencontrant un triangle, de telle sorte qu'on ait $\overline{oc}^2 = oa.ob$, p. 417.

D'un point des cordes vues sous un angle droit d'un point de la conique, p. 377.

D'un point tel, que les tangentes menées de ce point à deux coniques forment un faisceau harmonique, p. 429.

Du point dont les polaires par rapport à trois coniques fixes sont concourantes, p. 507.

Du centre des rectangles inscrits dans un triangle, p. 63.

Des milieux des cordes : 1° parallèles d'une conique, p. 200; — 2° concourantes d'un cercle, p. 140.

De l'intersection P de la bissectrice PC de l'angle C d'un triangle, avec la perpendiculaire BP élevée au côté CB, lorsqu'on connaît le côté BC et la somme des autres côtés, p. 75.

De l'intersection de la perpendiculaire abaissée du centre, ou du foyer, sur la tangente avec le rayon vecteur mené par le centre, ou le foyer, p. 287.

De l'intersection du rayon vecteur issu du foyer avec la droite menée par le centre et rencontrant l'axe sous un angle égal à l'angle excentrique, p. 306.

Du point de concours des hauteurs d'un triangle : 1° étant donnés un côté et l'angle opposé, p. 129 ; — 2° inscrit dans une conique et circonscrit à une autre, p. 482.

De l'intersection de la normale en un point, avec la droite issue du centre et faisant avec l'axe un angle égal à l'angle excentrique, p. 307.

De l'intersection des droites correspondantes de deux faisceaux homographiques, p. 378.

De l'intersection des polaires par rapport à deux coniques d'un point qui glisse sur une droite, p. 379.

De l'intersection des tangentes à une parabole qui se coupent sous un angle donné, p. 295, 355, 398.

De l'intersection des tangentes à une conique : 1° qui se coupent à angle droit, p. 232, 238, 375, 496 ; — 2° menées aux extrémités de deux diamètres conjugués, p. 287 ; — 3° dont la corde de contact est vue du foyer sous un angle constant, p. 397 ; — 4° qui déterminent sur la droite qui joint deux points fixes une division harmonique, p. 496.

De l'intersection des tangentes menées par deux points fixes : 1° aux coniques passant par ces points et assujetties à deux autres conditions, p. 450 ; — 2° aux coniques inscrites dans un quadrilatère dont deux côtés passent par ces points fixes, p. 450.

De l'intersection des tangentes interceptant sur une droite fixe un segment de longueur constante, p. 298.

De l'intersection des normales menées aux extrémités : 1° d'une corde focale, p. 291 ; — 2° des cordes passant par un point fixe, p. 296, 471.

Des projections du foyer : 1° sur les tangentes, p. 253, 280 ; — 2° sur les normales à la parabole, p. 295.

Des projections du centre sur les cordes qui, dans un cercle, sont vues du centre sous un angle droit, p. 131.

De l'extrémité de la sous-tangente polaire dans la parabole, le foyer étant pris pour origine, p. 255.

Des centres des cercles : 1° déterminant des segments donnés sur deux droites fixes, p. 286 ; — 2° inscrits dans un triangle, étant donnés un côté et la somme des deux autres, p. 286 ; — 3° qui coupent trois cercles sous des angles égaux, p. 157 ; — 4° circonscrits, deux des côtés du triangle étant donnés de position et leurs longueurs vérifiant une relation donnée, p. 130 ; — 5° qui touchent deux cercles donnés, p. 407, 450.

Des centres (pôles de la droite à l'infini) des coniques : 1° circonscrites à un quadrilatère, p. 213, 351, 372, 379, 425, 449 ; — 2° inscrites dans un quadrilatère, p. 352, 372, 387, 393, 451 ; — 3° définies par trois tangentes et la somme des carrés des axes, p. 300 ; — 4° assujetties à quatre conditions, p. 372, 545.

Des pôles d'une droite fixe par rapport à un système de coniques homofocales, p. 288, 452.

Des pôles, par rapport à une conique, des tangentes à une autre conique, p. 287, 389.

Des foyers des paraboles inscrites dans un triangle, p. 283, 296, 385, 399, 450.

Des foyers des coniques : 1° inscrites dans un quadrilatère, p. 385, 388 ; — 2° circonscrites à un quadrilatère, p. 301, 403 ; — 3° définies par trois tangentes et un point, p. 403 ; — 4° assujetties à quatre conditions, p. 546.

Des sommets du triangle autopolaire commun à une conique fixe et à chacune des coniques d'un système défini par quatre conditions, p. 546.

Mac Cullagh (Démonstration et théorèmes de), p. 306, 468, 522, 527.

Mac Laurin (Génération des coniques d'après), p. 342, 347, 419.

Malfatti (Problème de), p. 366.

Médianes. — Les médianes d'un triangle se coupent en un même point, p. 48, 81.

Miquel (M.). — Sur les cinq paraboles inscrites dans les quadrilatères formés par cinq droites, p. 341.

Moebius. — Des coordonnées tangentielles, p. 389.
Des propriétés harmoniques, p. 412.

Moore (M.). — Démonstration basée sur le théorème de Brianchon, d'un théorème de Steiner, p. 341.

Mulcahy (M.). — Sur les angles qui ont leur sommet au foyer, p. 467.

Newton (Génération des coniques d'après), p. 419.

Normale, p. 241, 471.
Sous-normale, p. 242.
La sous-normale dans la parabole est constante, p. 276.

Nombre : — De termes dans l'équation générale de degré n, p. 108.
De conditions pour déterminer une conique, p. 190.
De points d'intersection de deux courbes, p. 314.
De solutions du problème : Tracer une conique tangente à cinq coniques données, p. 547.

Pappus, p. 259, 412, 462.

Parabole. — Origine de cette dénomination, p. 258, 462.
La parabole a une tangente située tout entière à l'infini, p. 327, 405, 463.
Coordonnées du foyer, p. 353, 384, 497.
Équation de la directrice, p. 376, 496.

Paramètre, p. 257, 269, 276.
Le paramètre est double de l'ordonnée du foyer, p. 257.
Les coniques réciproques de cercles égaux ont même paramètre, p. 400.

Pascal (Hexagone de), p. 339, 391, 424, 448.

Perpendiculaires. — Équation de la perpendiculaire, p. 36, 89.
Condition pour que deux droites soient perpendiculaires, p. 88.
Extension donnée à cette condition, p. 500.

Plucker, p. 389, 530.

Point fixe (Les lignes suivantes passent par un). — La droite représentée par une équation dont les coefficients vérifient une relation linéaire, p. 73.

Le côté d'un triangle, étant donné l'angle opposé, la somme des inverses des autres côtés, p. 70.

Le troisième côté d'un triangle dont les deux autres côtés passent par des points fixes, tandis que les sommets glissent sur trois droites concourantes, p. 71.

La droite telle que la somme de ses distances à plusieurs points fixes soit constante, p. 72.

La polaire d'un point fixe, par rapport aux cercles ayant même axe radical, p. 146.

La polaire d'un point fixe, par rapport aux coniques passant par quatre points, p. 213, 378, 393.

Les cordes d'intersection d'un cercle fixe avec des cercles passant par deux points donnés, p. 146.

La droite qui joint les points où deux droites fixes rencontrent une conique passant par quatre points (dont deux sur les droites fixes), p. 424.

La corde de contact de deux coniques ayant un double contact, l'une étant fixe, l'autre passant par deux points fixes, p. 364.

La corde qui est vue sous un angle droit d'un point fixe de la conique, p. 243, 377.

Les cordes vues d'un point fixe de la conique sous un angle qui soit divisé par la normale au point fixe, en deux angles tels, que le produit de leurs tangentes soit constant, p. 244.

Les cordes vues d'un point fixe de la conique sous un angle dont la bissectrice est donnée, p. 454.

La perpendiculaire abaissée d'un point d'une ordonnée fixe de l'axe sur la polaire de ce point, p. 256.

Points limites d'un système de cercles, p. 146, 406.

Poles et polaires. — Leurs propriétés, p. 133, 207.

Équation de la polaire, p. 119, 205, 367.

Coordonnées du pôle d'une droite donnée, p. 370.

Un point et sa polaire équivalent à deux condititions, p. 543.

Polaires réciproques, p. 389.

Poncelet, p. 147, 389, 423, 442.

Projections, p. 442, 467.

Quadrilatère. — Les milieux des diagonales sont en ligne droite, p. 36, 92, 300.

Les cercles décrits sur les diagonales comme diamètre ont même axe radical, p. 388.

Propriétés harmoniques, p. 86, 446.

Inscrit dans une conique, p. 168.

Les côtés et les diagonales d'un quadrilatère inscrit dans une conique déterminent sur une transversale un système en involution, p. 437.

Les diagonales des quadrilatères inscrit et circonscrit correspondants forment un faisceau harmonique, p. 335.

Rapport anharmonique. — Démonstration du théorème fondamental, p. 82.

Ce qu'il devient lorsqu'un point s'éloigne à l'infini, p. 412.

Rapport anharmonique de quatre droites dont les équations sont données, p. 83, 428.

Rapport anharmonique : 1° de quatre points d'une conique, p. 332, 348, 403, 447; — 2° de quatre tangentes, p. 348; — de trois tangentes à une parabole, p. 418.

Développements sur les propriétés correspondantes, p. 413.

Leur démonstration par la projection des angles, p. 454.

Dans quels cas le rapport anharmonique de quatre points d'une conique est égal à celui de quatre autres points : 1° de la même conique, p. 349; — 2° d'une autre conique, p. 349, 425.

Le rapport anharmonique : 1° de quatre points est égal à celui de leurs polaires, p. 379; — 2° de quatre diamètres est égal à celui de leurs conjugués, p. 424.

Le rapport anharmonique des segments déterminés par deux coniques sur la tangente à une troisième conique est constant, lorsque les trois coniques ont un double contact suivant la même droite, p. 448.

Rapport harmonique (*voir* division harmonique).

Rayon du cercle circonscrit au triangle inscrit dans une conique, p. 293, 469.

Rayon de courbure, p. 317.

Réciproques (Méthode des), p. 97, 386, 501.

Sadleir (Théorèmes de M.), p. 256.

Segments. — Les segments déterminés sur une corde par la courbe et les asymptotes sont égaux, p. 260.

Le segment déterminé sur les asymptotes par les droites qui joignent deux points fixes de la courbe à un quelconque de ses points est constant, p. 263.

Deux droites quelconques déterminent sur l'axe d'une parabole un segment de même grandeur que les projections sur cet axe des pôles de ces droites, p. 275, 410.

Relation entre les segments déterminés par une tangente variable sur deux tangentes fixes et parallèles, p. 239, 404, 419, 539.

Serret (M. P.). — Lieu du centre des coniques inscrites dans un quadrilatère, p. 299.

Similitude, p. 313.

Centre de similitude, p. 151, 311, 393.

Steiner. — Théorème sur le triangle circonscrit à la parabole, p. 283, 296, 384, 399, 450.

Des points dont le cercle osculateur passe par un point donné, p. 319.

Théorèmes sur l'hexagone de Pascal, p. 340, 530.

Solution du problème de Malfatti, p. 366.

Systèmes de cercles ayant même axe radical, p. 145.

De cercles coupant à angle droit une série de cercles, p. 147, 185, 490, 509.

Tangentes. — Définition générale, p. 113.

Équation de la tangente, p. 115, 204, 230, 274.

Tangente au cercle ; sa longueur, p. 121.

Construction géométrique de la tangente à une conique, p. 207.
Détermination des points de contact d'une conique avec les cinq tangentes qui la définissent, p. 341.
Relation entre les segments que détermine une tangente variable : 1° sur deux tangentes fixes et parallèles, p. 239, 404, 419; — 2° sur deux diamètres conjugués, p. 239.
Division déterminée sur une tangente variable par trois tangentes fixes à la parabole, p. 418.
Tangentes communes : 1° à deux cercles, p. 150, 366; — 2° à deux coniques, p. 485.
Leurs huit points de contact appartiennent à une même conique, p. 486.

Townsend (Théorèmes et démonstration de M.), p. 349, 423, 524.

Transformation des coordonnées, p. 8, 12, 472.

Transversales. — Relation entre les segments que détermine une transversale sur les côtés d'un triangle, p. 50.
Des systèmes de coniques déterminant sur une transversale une division en involution, p. 437.

Triangle autopolaire, p. 133.
Équation du cercle ayant le triangle de référence pour triangle autopolaire, p. 352.
Équation d'une conique rapportée à un triangle autopolaire, p. 331, 350.
Les sommets de deux triangles autopolaires appartiennent à une même conique, p. 481.
Leurs six côtés sont tangents à une autre conique, p. 481.
Deux coniques ont toujours un triangle autopolaire commun, p. 355.
Détermination de ce triangle, p. 490, 509.

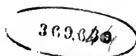
Triangle polaire; définition et propriétés, p. 133, 134.

Triangles homologues, p. 88, 530.

Triangles inscrits ou circonscrits. — Les sommets de deux triangles circonscrits à une conique sont situés sur une conique, p. 450.
Triangle inscrit dans une conique dont les côtés passent par trois points donnés, p. 321.
Le point de concours des hauteurs d'un triangle circonscrit à une parabole se trouve sur la directrice, p. 482.
Triangle inscrit dans une conique et circonscrit à une autre, p. 483.

Zeuthen, p. 545.

Paris. — Imprimerie de Gauthier-Villars, rue de Seine-Saint-Germain, 10.



Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.





